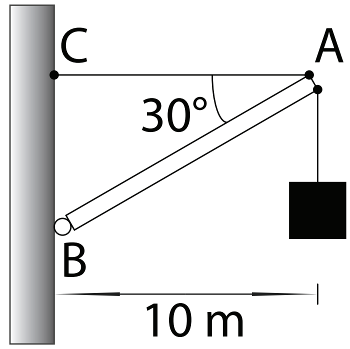
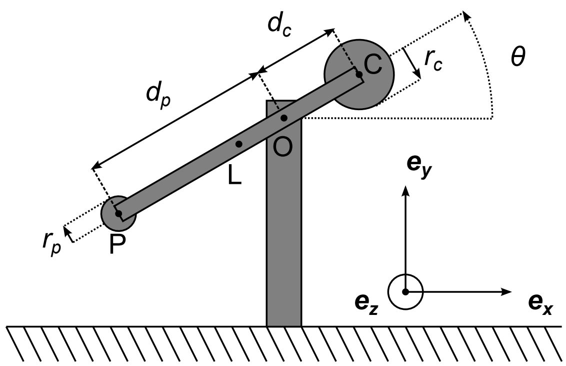
Exercices

Exercice 1 *Ambiance tendue au bistrot*
Une enseigne de bistro est accrochée comme montré sur le schéma ci-contre. AB est une poutre reliée au mur par un pivot en B. AC est un câble qui retient la poutre et l'enseigne et est aussi fixée par un câble. Les câbles sont de masse négligeables et la masse de la poutre et de l'enseigne sont 15 kg et 300 kg respectivement.



Trouvez les forces $\vec{F}_B$ et $\vec{F}_C$ agissant sur B et C respectivement.

Exercice 2 *Être catapulté au centre du problème*
On se propose d'étudier la dynamique de la catapulte représentée sur la figure ci-dessous.



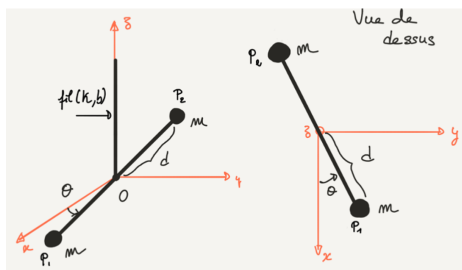
La catapulte est constituée d'un levier assimilé à une tige mince homogène de masse m_l fixé à un support au point O. Le projectile est une boule pleine de masse m_p et de rayon r_p fixée à l'extrémité P du levier à une distance d_p de l'axe de rotation. Une boule pleine de masse m_c et de rayon r_c placée à l'autre extrémité C à une distance d_c de l'axe de rotation sert de contre-poids permettant d'actionner la catapulte. L'angle θ est défini comme étant l'angle entre l'horizontale $\vec{e}_x$ et le vecteur $\overrightarrow{OC}$. On suppose qu'un mécanisme permet d'éjecter le projectile quand l'angle θ_e atteint la valeur désirée.

1. Placer sur la figure les forces agissant sur la catapulte.
2. Calculer les moments d'inertie par rapport à l'axe de rotation pour le projectile (I_p), le contre-poids (I_c) et le levier (I_l) ? En déduire le moment d'inertie global I_O du système projectile+contre-poids+levier.

3. Quelle condition doit-on avoir entre m_c, d_p, m_c, d_c et m_l pour faire fonctionner la catapulte ?
4. Donner l'équation différentielle sur $\theta(t)$ qui permet de décrire le mouvement de la catapulte en utilisant le moment d'inertie global I_O du système.
5. Donner la vitesse du projectile en fonction de l'angle d'éjection, sachant que l'angle initiale $\theta(t=0)=\theta_0$ et que la vitesse angulaire initiale est nulle.

Exercice 3 *Balance ton Cavendish. Examen 2019*
La balance de Cavendish est un instrument permettant de déterminer expérimentalement la constante de gravitation G. Elle est constituée de deux points matériels P_1 et P_2 de même masse m reliés par une tige sans masse à un fil, formant un pendant de torsion. Deux grosses sphères de masse M, S_A et S_B, peuvent être placées de manières à faire dévier le pendule dans un sous ou dans l'autre par l'effet de la gravitation.

Partie 1 : Etude du pendule de torsion
Les masses P_1 et P_2 sont reliées par une tiges sans masse de longeur $2d$, et contraintes de tourner autour de O dans le plan horizontal (O, x, y).

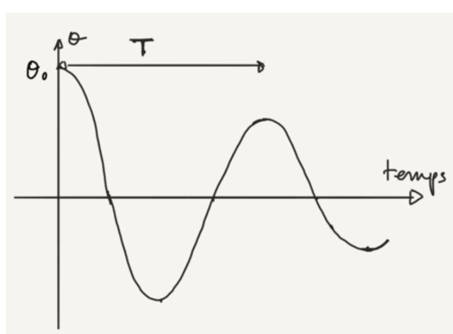


a) Calculer le moment d'inertie I_O du pendule de torsion par rapport à l'axe (Oz)

Le fil est caractérisé par deux constantes, κ et b, définies comme suit :

- le fil exerce un moment élastique dépendant de l'angle de déviation θ, donné par $\overrightarrow{M_O^{el}} = -\kappa\theta\vec{e}_z$
- et les frottements internes du fil exercent le moment $\overrightarrow{M_O^{f}} = -b\dot{\theta}\vec{e}_z$

On écarte le pendule de sa position d'équilibre de l'angle θ_0 et on le lâche sans lui communiquer de vitesse angulaire. On mesure l'angle de déviation en fonction du temps et on observe des oscillations décroissantes avec une pseudo période T (voir ci-contre)



b) Etablire l'équation différentielle du mouvement sur la variable θ.

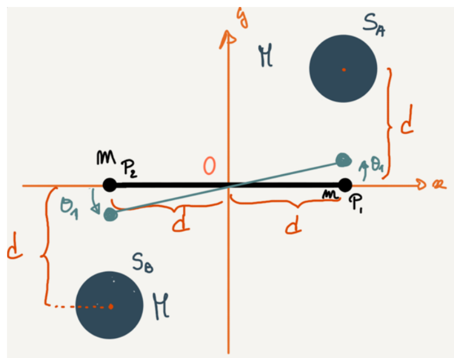
c) Quelle est la pulsation propre du pendule de torsion ?

d) Donner la forme générale de la solution de l'équation différentielle sans calculer les constantes d'intégration. Expliciter la pseudo-période et le facteur d'amortissement en fonction des données du problème.

e) On suppose l'amortissement très faible ($b \approx 0$) et on mesure T. Déterminer κ en fonction de T, m et d.

Partie 2 : Influence de la force de gravitation des 2 grosses sphères sur les deux masses ponctuelles

On amène les deux grosses sphères (S_A, S_B) de masse M, en regard des masses ponctuelles (P_1, P_2) à une distance d de l'axe Ox, et on laisse le pendule s'équilibrer avec l'angle de déviation θ_1. On suppose l'angle θ_1 très faible ($\theta \ll 1$).



a) Exprimer (vectoriellement) le moment $\overrightarrow{M_{O,1}^{tot}}$, par rapport à O sur le pendule, lié à la force de gravitation de S_A sur P_1 et de S_B sur P_2.

b) Exprimer (vectoriellement) le moment $\overrightarrow{M_{O,2}^{tot}}$ lié à la force de gravitation de S_A sur P_2 et de S_B sur P_1.

c) Montrer que pour un calcul d'ordre de grandeur, on peut négliger $\|\overrightarrow{M_{O,2}^{tot}}\|$ devant $\|\overrightarrow{M_{O,1}^{tot}}\|$.

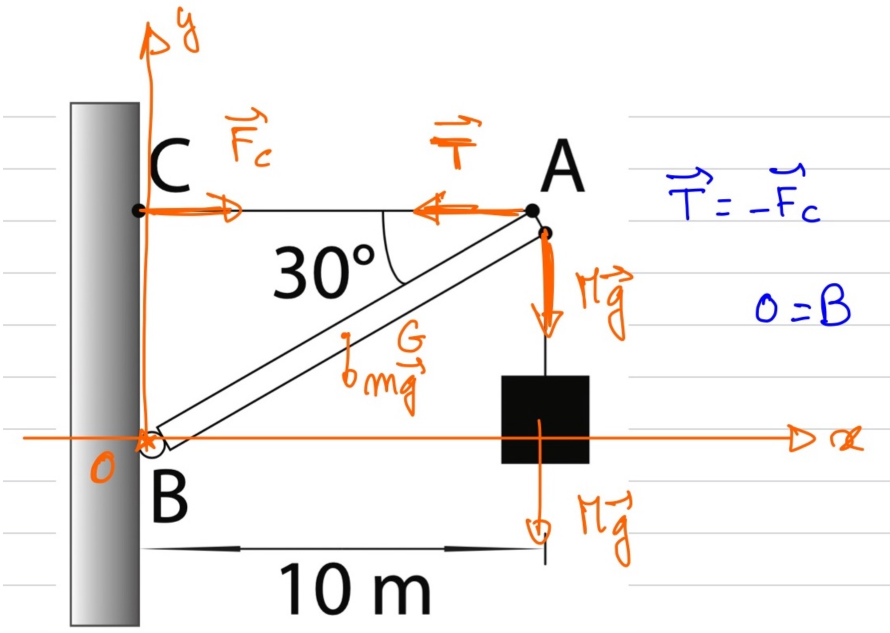
d) Exprimer l'angle θ_1 à l'équilibre en fonction de G, M, m, d et κ.

e) Déduire l'expression de G en fontion de M, m, d, T et θ_1, grandeurs qui sont connues ou facilement mesurables.

f) Question subsidiaire (ne faisait pas partie de l'examen) : Utiliser les données de l'expérience pour évaluer l'ordre de grandeur de G. La période T fait 8 minutes, M = 1.5 kg, m = 15g, d = 5cm, et on mesure θ_1 grâce à la déviation du faisceau laser, soit 20 cm sur les 13,5 m de l'amphi

Solutions

Solution 1



Écrivons les deux critères de stabilité statique, en appelant $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$ et $\vec{F}_C$ les forces qui s'appliquent aux points respectifs A, B et C, et $m\vec{g}$ le poids de la poutre qui s'applique en son centre de gravité, G situé à mi-chemin de B et A. On prend comme système la poutre. Le câble applique en A une tension $\vec{T}$ égale à $-\vec{F}_C$. On place l'origine O au point B, et on définit un axe (Ox) horizontal et un axe (Oy) vertical.

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{T} + \vec{F}_D = \vec{0} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{OO} \wedge \vec{F}_B + \overrightarrow{OA} \wedge (M\vec{g}) + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{OG} \wedge (m\vec{g}) = \vec{0} \tag{2}$$

Soit $M = 300$ kg la masse de l'enseigne, $m = 15$ kg la masse de la poutre, la longueur $CA = 10$ m et l'angle $\alpha = 30°$. La condition (1) donne :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_B^x \\ F_B^y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

La condition (2) avec

$$\overrightarrow{OA} = l(\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_y)$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{l}{2}(\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_y)$$

$$\vec{T} = -T\vec{e}_x \qquad M\vec{g} = -Mg\vec{e}_y \qquad m\vec{g} = -mg\vec{e}_y = \vec{0}$$

donne

$$-Mgl\cos\alpha\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y - Tl\sin\alpha\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x - mg\frac{l}{2}\cos\alpha\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{0}$$

soit

$$-Mgl\cos\alpha\vec{e}_z + Tl\sin\alpha\vec{e}_z - mg\frac{l}{2}\cos\alpha\vec{e}_z = \vec{0} \tag{4}$$

La condition (3) nous donne immédiatement

$$F_B^x = T$$
$$F_B^y = (M+m)g$$

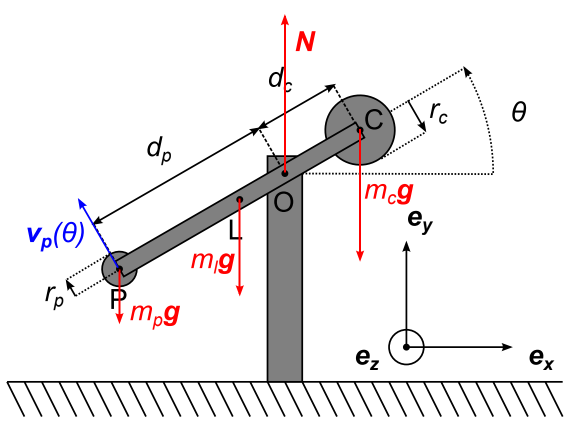
et la condition (4) fournit :

$$T = F_C = g\left(M + \frac{1}{2}m\right)\cot\alpha$$

A.N. : $F_C = 5224.9$ N et $F_B = 6070.3$ N.

Solution 2

1. Schéma avec forces :



2. **Moment d'inertie du projectile :** $I_p = \underbrace{\frac{2}{5}m_p r_p^2}_{\text{centre de masse}} + \underbrace{m_p d_p^2}_{\text{Steiner}}$

   Moment d'inertie du contre-poids : $I_c = \underbrace{\frac{2}{5}m_c r_c^2}_{\text{centre de masse}} + \underbrace{m_c d_c^2}_{\text{Steiner}}$

Moment d'inertie du levier : La longueur totale du levier est d_p+d_c et la distance du centre de masse L du levier par rapport à l'axe de rotation est donnée par

$$d_l = \frac{d_p + d_c}{2} - d_c = \frac{d_p - d_c}{2}$$

et l'on a

$$I_l = \underbrace{\frac{1}{12} m_l \left(d_c + d_p\right)^2}_{\text{centre de masse}} + \underbrace{m_l \left(\frac{d_c - d_p}{2}\right)^2}_{\text{Steiner}}$$

Moment d'inertie du système : $I_O = I_p + I_c + I_l$

3. Pour faire fonctionner la catapulte il faut que le centre de masse du système se trouve du côté du contre-poids par rapport à l'axe de rotation, c'est-à-dire

$$m_c d_c > m_p d_p + m_l \frac{d_p - d_c}{2}$$

4. La somme des moments de forces extérieures par rapport à l'axe de rotation vaut :

$$\begin{aligned}\sum \vec{\mathcal{M}}_O^{ext} &= \vec{OP} \wedge (m_p \vec{g}) + \vec{OC} \wedge (m_c \vec{g}) + \vec{OL} \wedge (m_l \vec{g}) + \underbrace{\cancel{\vec{OO} \wedge \vec{N}}}_{\vec{0}} \\ &= m_p d_p g \cos\theta \vec{e}_z - m_c L_c g \cos\theta \vec{e}_z + m_l \tfrac{d_p - d_c}{2} g \cos\theta \vec{e}_z \\ &= \left(m_p d_p - m_c d_c + m_l \tfrac{d_p - d_c}{2}\right) g \cos\theta \vec{e}_z\end{aligned}$$

Le moment cinétique du système vaut :

$$\vec{L}_O = I_O \dot{\theta} \vec{e}_z$$

et sa dérivée par rapport au temps

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_O \ddot{\theta} \vec{e}_z$$

On posant $\sum \vec{\mathcal{M}}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$ on trouve

$$I_O \ddot{\theta} = \left(m_p d_p - m_c d_c + m_l \frac{d_p - d_c}{2}\right) g \cos\theta$$

soit

$$\ddot{\theta} + \frac{\left(m_c d_c - m_p d_p - m_l \frac{d_p - d_c}{2}\right)}{I_O} g \cos\theta = 0$$

5. **Résolution par la conservation de l'énergie :** En définissant l'énergie potentielle par rapport au levier en position horizontale, soit $\theta = 0$, l'énergie mécanique du système pour un angle θ quelconque est donnée par

$$E_{\text{mécanique}} = \underbrace{-m_p d_p g \sin\theta + m_c d_c g \sin\theta - m_l \frac{d_p - d_c}{2} g \sin\theta}_{\text{Energie potentielle}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2}_{\text{Energie cinétique}}$$

Initialement l'énergie mécanique vaut

$$E_{\text{mécanique, } t=0} = (-m_p d_p + m_c d_c - m_l \frac{d_p - d_c}{2}) g \sin\theta_0$$

La conservation de l'énergie mécanique nous permet alors de trouver la vitesse angulaire

$$\dot{\theta} = \sqrt{2 \frac{\left(m_c d_c - m_p d_p - m_l \frac{d_p - d_c}{2}\right)}{I_O} g (\sin\theta_0 - \sin\theta)}$$

Résolution alternative :
On multiplie d'abord l'équation différentielle décrivant le mouvement de la catapulte par $\dot{\theta}$

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} + \frac{\left(m_c d_c - m_p d_p - m_l \frac{d_p - d_c}{2}\right)}{I_O} g \dot{\theta} \cos\theta = 0$$

puis on intègre

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{\left(m_c d_c - m_p d_p - m_l \frac{d_p - d_c}{2}\right)}{I_O} g \sin\theta + K = 0$$

avec K une constante d'intégration que l'on détermine avec les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$

$$K = -\frac{\left(m_c d_c - m_p d_p - m_l \frac{d_p - d_c}{2}\right)}{I_O} g \sin\theta_0$$

On trouve alors la vitesse angulaire :

$$\dot{\theta} = \sqrt{2 \frac{\left(m_c d_c - m_p d_p - m_l \frac{d_p - d_c}{2}\right)}{I_O} g (\sin\theta_0 - \sin\theta)}$$

Dans les deux cas, la vitesse d'éjection du projectile est obtenue en multipliant la multipliant la vitesse angulaire par d_p et en posant $\theta = \theta_e$: $v_p(\theta_e) = d_p \dot{\theta}$ soit

$$v_p(\theta_e) = d_p \sqrt{2 \frac{\left(m_c d_c - m_p d_p - m_l \frac{d_p - d_c}{2}\right)}{I_O} g (\sin\theta_0 - \sin\theta_e)}$$

Remarque : En notant M la masse totale du système projectile+levier+contre-poids et d_G la distance du centre de gravité de l'ensemble par rapport à l'axe de rotation, l'expression de la vitesse angulaire peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\dot{\theta} = \sqrt{2\frac{Mgd_G}{I_O}(\sin\theta_0 - \sin\theta_e)}$$

Solution 3
Partie 1 : Etude du pendule de torsion

a) $I_O = m\overrightarrow{OP_1}^2 + m\overrightarrow{OP_2}^2 = 2md^2$

b) O est un point fixe (et le centre de masse), on applique le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{M_O^{el}} + \overrightarrow{M_O^{f}} \Rightarrow I_O\ddot{\theta}\vec{e}_z = -\kappa\theta\vec{e}_z - b\dot{\theta}\vec{e}_z \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{b}{2md^2}\dot{\theta} + \frac{\kappa}{2md^2}\theta = 0$$

c) On reconnaît l'équation d'un oscillateur amorti, $\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \Omega_0^2\theta = 0$ où Ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur. Par identification :

$$\Omega_0^2 = \frac{\kappa}{2md^2}$$

d) D'après le graphe représentant les oscillations du pendule, il est dans un régime d'amortissement faible. Dans ce cas, la forme générale de la solution de $\ddot{\theta}+2\gamma\dot{\theta}+\Omega_0^2 = 0$ est :

$$\theta(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)$$

avec γ le coefficient d'amortissement et $\omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}$ la pseudo-période. γ est obtenu par identification : $\gamma = \frac{b}{4md^2}$.
Ainsi, $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{2md^2} - \frac{b^2}{(4md^2)^2}}$

e) Pour $b \approx 0$, $\omega \approx= \frac{1}{d}\sqrt{\frac{\kappa}{2m}}$
On écrit la relation entre la période et la pulsation :

$$\frac{2\pi}{T} = \omega = \frac{1}{d}\sqrt{\frac{\kappa}{2m}} \Rightarrow \frac{\kappa}{2m} = \frac{4\pi^2 d^2}{T^2} \Rightarrow \kappa = 8m\left(\frac{\pi d}{T}\right)^2$$

Partie 2 : Influence de la force de gravitation des 2 grosses sphères sur les deux masses ponctuelles

a) Comme $\theta_1 \ll 1$, on fait le calcul des moments avec $\theta_1 = 0$

$$\overrightarrow{M_{O,1}^{tot}} = \left(d\vec{e}_x \times \frac{GMm}{d^2}\vec{e}_y\right) + \left(-d\vec{e}_x \times \frac{-GMm}{d^2}\vec{e}_y\right) = 2\frac{GMm}{d}\vec{e}_z$$

b) Avec l'aide de Pythagore, on voit que $\overrightarrow{P_2S_A} = -\overrightarrow{P_1S_B} = d\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_y\right)$, d'où :

$$\overrightarrow{M_{O,2}^{tot}} = \left(-d\vec{e}_x \times \frac{GMm}{5d^2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_y\right)\right) + \left(d\vec{e}_x \times -\frac{GMm}{5d^2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_y\right)\right)$$

$= -\frac{2}{5\sqrt{5}}\frac{GMm}{d}\vec{e}_z$

c) $\frac{\|\overrightarrow{M_{O,2}^{tot}}\|}{\|\overrightarrow{M_{O,1}^{tot}}\|} = \frac{1}{5\sqrt{5}} \approx \frac{1}{5\cdot 2} = \frac{1}{10}$. Environ 10 fois plus petit, c'est bien négligeable pour calculer un ordre de grandeur.

d) Comme c) l'indique, on ne tient pas compte de $\overrightarrow{M_{O,2}^{tot}}$. A l'équilibre, le moment total est nul en O :

$$\overrightarrow{M_O^{el}} + \underbrace{\overrightarrow{M_O^{f}}}_{=0} + \overrightarrow{M_{O,1}^{tot}} = 0 \;\Rightarrow\; 2\frac{GMm}{d} = \kappa\theta_1 \;\Rightarrow\; \theta_1 = 2\frac{GMm}{d\kappa}$$

e) On injecte 1e) dans 2d)

$$G = \frac{\theta_1 d\kappa}{2Mm} = \frac{\theta_1 d}{2Mm}\frac{8m\pi^2 d^2}{T^2} = 4\frac{\pi^2\theta_1 d^3}{MT^2}$$

f) On trouve $6{,}7\cdot 10^{-11}$