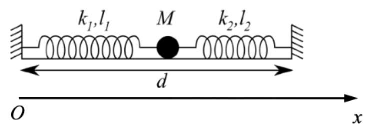
Solutions

Solution 1

a) On applique la seconde loi de Newton. On prend l'origine au point d'attache du ressort gauche (voir schéma).



$$M\vec{a} = \Sigma\vec{F} \Longrightarrow M\ddot{x} = -k(x - l_1)$$

b) On place l'origine de notre repère Ox au point d'attache du ressort gauche. En utilisant cet axe pour repérer la position de la masse m, l'allongement du ressort 1 est donné par $x - l_1$, celui du ressort 2 par $d - x - l_2$. Le bilan des forces sur la masse s'écrit ainsi :

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = -k_1(x - l_1)\vec{e_x} + k_2(d - x - l_2)\vec{e_x}$$

A l'équilibre, la seconde loi de Newton devient :

$$M\vec{a} = \vec{0} = -k_1(x_{eq} - l_1)\vec{e_x} + k_2(d - x_{eq} - l_2)\vec{e_x}$$

et en projection sur $\vec{e_x}$

$$-k_1(x_{eq} - l_1) + k_2(d - x_{eq} - l_2) = 0$$

$$\Longrightarrow x_{eq} = \frac{k_1 l_1 + k_2(d - l_2)}{k_1 + k_2}$$

c) En gardant l'origine du repère au point d'attache du ressort gauche comme en b), la seconde loi de Newton est :

$$M\vec{a} = \vec{0} = -k_1(x - l_1)\vec{e_x} + k_2(d - x - l_2)\vec{e_x}$$

et en projection sur $\vec{e_x}$

$$M\ddot{x} = -k_1(x - l_1) + k_2(d - x - l_2)$$

$$M\ddot{x} = -(k_1 + k_2)x + k_1 l_1 + k_2(d - l_2)$$

En prenant comme origine la position d'équilibre calculée en b) ,

$$x' = x - x_{eq}$$

l'équation différentielle du mouvement devient :

$$M\ddot{x}' = -(k_1+k_2)(x'+x_{eq}) + k_1 l_1 + k_2(d-l_2)$$

$$= -(k_1+k_2)x' - \underbrace{(k_1+k_2)\frac{k_1 l_1 + k_2(d-l_2)}{(k_1+k_2)} + k_1 l_1 + k_2(d-l_2)}_{=0}$$

$$M\ddot{x}' = -(k_1+k_2)x'$$

Les termes constants s'annulent lorsque l'on prend la position d'équilibre comme origine du repère ; l'équation du mouvement s'exprime plus simplement.

d) - Dans le cas a), l'équation du mouvement $M\ddot{x} = -k(x-l_1)$se formule avec la position d'équilibre comme origine $\ddot{x}' = -\frac{k}{M}x'$.On reconnait l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique, de pulsation $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$

La fréquence des oscillations est $f = \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}$

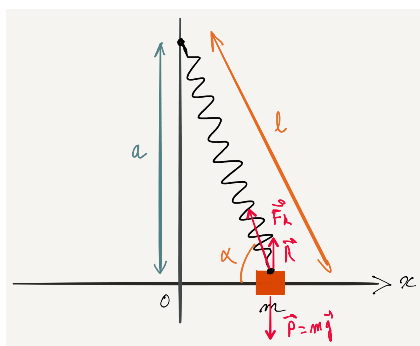
- Dans le cas c), la pulsation est $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{M}}$ et la fréquence des oscillations $f = \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{M}}$

Solution 2

1. La masse m est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction du rail $\vec{R}$ à la force du ressort $\vec{F_k}$
la seconde loi de Newton nous donne :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F_k}$$

Le mouvement est uniquement sur l'axe x. On peut donc projeter l'équation sur cet axe.
On choisit comme origine l'intersection entre la barre et la verticale pour obtenir :



$$0 + 0 - F_k \cos\alpha = m\ddot{x}$$

La tension du ressort est : $F_k = kd$ avec d l'allongement, soit $d = l - l_0$. Donc $F_k = k(l-l_0)$.

$$m\ddot{x} + F_k\cos\alpha = 0$$
$$m\ddot{x} + k(l-l_0)\cos\alpha = 0$$

On cherche à exprimer l et $\cos\alpha$ en fonction de x et a.

$$l = \sqrt{a^2 + x^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{x}{l}$$

On obtient donc :

$$m\ddot{x} + k(l - l_0)\frac{x}{l} = 0$$
$$m\ddot{x} + k\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)x = 0$$
$$m\ddot{x} + k\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right)x = 0$$
$$m\ddot{x} + k\left(1 - \frac{l_0}{a\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}}\right)x = 0$$

et, puisque $x \ll a$, on peut faire l'approximation

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}} = \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}$$

pour obtenir

$$m\ddot{x} + k\left[1 - \frac{l_0}{a}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right)\right]x = 0$$

qui s'exprime aussi comme

$$m\ddot{x} + k\left[1 - \frac{l_0}{a} + \frac{l_0}{2a}\frac{x^2}{a^2}\right]x = 0 \tag{1}$$

Cette équation est valable dans tous les cas (pour $x \ll a$).
Si $\frac{l_0}{a}$ est différent de 1, ($\frac{l_0}{a} \neq 1$), $1 - \frac{l_0}{a}$ est non nul , et le dernier terme de cette équation devient négligeable et l'équation (1) devient alors :

$$m\ddot{x} + k\left[1 - \frac{l_0}{a}\right]x = 0$$
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\left[1 - \frac{l_0}{a}\right]x = 0$$

C'est une équation différentielle de type $\ddot{x} + \Omega^2 x = 0$ avec

$$\boxed{\Omega_0^2 = \frac{k}{m}\left[1 - \frac{l_0}{a}\right]}$$

Le mouvement est sinusoïdal de pulsation Ω_0. C'est un oscillateur harmonique.

2. Dans le cas $a = l_0$, si on garde l'équation trouvée précédemment, on se rend compte que le facteur devant x tombe car $\frac{l_0}{a} = 1$ et on n'a plus d'équation différentielle de mouvement, on trouve un mouvement à vitesse constante, car il reste $m\ddot{x} = 0$ ce qui n'a pas de sens.

   L'explication de ce non sens est assez naturelle. Pour arriver au résultat, des simplifications ont été faites. Si on revient à l'équation (1), sans négliger le terme en x^2, on retrouve bien une équation différentielle

$$m\ddot{x} + k\left[\frac{l_0}{2a}\frac{x^2}{a^2}\right]x = 0$$

   c'est-à-dire

$$\boxed{\ddot{x} + \left[\frac{k}{m}\frac{1}{2a^2}\right]x^3 = 0}$$

   Il n'existe pas de résolution algébrique pour ce type d'équation.

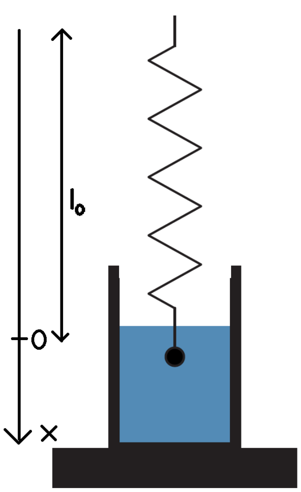
   Pour encore plus de précision, il faudrait aussi prendre un ordre supérieur lors du développement limité. Cela rendrait l'équation encore un peu plus compliquée mais toujours plus réaliste.

Solution 3

On a le cas classique d'un oscillateur amorti avec le coefficient de frottement b_l.

$$b_l = 6\pi\eta r(\text{ donc } K = 6\pi r \text{ dans ce cas})$$

L'énoncé ne précise pas s'il faut prendre en compte la poussée d'Archimède. Nous allons la prendre en compte (et constater que cela ne change que la position d'équilibre).



$$\begin{aligned}\sum \vec{F} =& m\vec{a} = m\ddot{x}\vec{e}_x\\ &= \vec{F}_F + \vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{F}_k\\ &= -6\pi\eta\dot{x} - \rho V g\vec{e}_x + mg\vec{e}_x - kx\vec{e}_x\\ \Rightarrow&\ m\ddot{x} + 6\pi\eta r\dot{x} + kx = mg - \rho V g\end{aligned}$$

avec ρ la masse volumique du fluide et V le volume de la sphère.

La position d'équilibre est donnée par $\dot{x} = \ddot{x} = 0$, soit :

$$\frac{k}{\cancel{m}}x_{eq} = \frac{mg - \rho V g}{\cancel{m}} \Rightarrow x_{eq} = \frac{mg - \rho V g}{k}$$

1. L'équation différentielle est :
$$\ddot{x} + \frac{6\pi\eta r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{mg - \rho V g}{m}$$
et a la forme :
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = \frac{mg - \rho V g}{m} = \Omega_0^2 x_{eq}$$
soit
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2(x - x_{eq}) = 0$$
avec
$$2\gamma = \frac{b_l}{m} = \frac{6\pi\eta r}{m} \text{ et } \Omega_0^2 = \frac{k}{m}$$
et
$$x_{eq} = \frac{mg - \rho V g}{k} \text{ la position d'équilibre}$$
La force d'Archimède ne change donc ni γ ni Ω_0^2.
On suppose qu'on est dans le cas d'un amortissement faible $\gamma < \Omega_0$, sinon il n'y a pas d'oscillations.
La solution est du type
$$x(t) = e^{-\gamma t}[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]$$
avec $\omega^2 = \Omega_0^2 - \gamma^2$. En prenant comme conditions de départ qu'on lâche la masse sans vitesse initiale avec une élongation x_0 à $t = 0$, on trouve
$$\boxed{x(t) = x_0 e^{-\gamma t}[\cos(\omega t) + \frac{\gamma}{\omega}\sin(\omega t)]}$$
La pseudopériode est obtenue par
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}}$$
soit
$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_0^2 - \left[\frac{3\pi\eta r}{m}\right]^2}}}$$

2. Dans l'air, la période est $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$. Le régime amorti donne :
$$\omega^2 = \Omega_0^2 - \gamma^2$$
et on isole η :
$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \left[\frac{3\pi\eta r}{m}\right]^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\eta = \frac{2m}{3r}\sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}}}$$

Solution 4

Rappelons tout d'abord, le volume d'un cylindre : $V_{cylindre} = h\pi r^2$

a) Position d'équilibre :

A l'équilibre, le cylindre est soumis à la poussée d'Archimède et au Poids.
D'après la 2° loi de Newton : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$
A l'équilibre $\vec{a} = 0$, donc : $\vec{P_A} + \vec{P} = 0$

On pose h', la hauteur immergée du cylindre et on projette sur l'axe z (dirigé vers le haut) :

$$\rho_{eau} V_{immergé} g - \frac{2}{3}\rho_{eau} V_{cylindre} g = 0 \Rightarrow \pi r^2 \rho_{eau}(h' - \frac{2}{3}h) = 0$$
$$\Rightarrow h' = \frac{2}{3}h$$

A l'équilibre, les 2/3 de la hauteur du cylindre est immergée.

b) Equation différentielle du mouvement :

On définit l'origine du repère par rapport au centre de gravité du flotteur lorsque celui-ci est à la position d'équilibre. L'origine se trouve donc à $-\frac{h}{6}$ par rapport à la surface de l'eau.

En notant $\vec{F_f}$ la force de frottement :

$$\vec{P_A} + \vec{P} + \vec{F_f} = m\vec{a}$$

On projette sur l'axe z :

$$\rho_{eau} V_{immergé} g - \frac{2}{3}\rho_{eau} V_{cylindre} g - k\eta\dot{z} = \frac{2}{3}\rho_{eau} V_{cylindre}\ddot{z}$$
$$\Rightarrow \rho_{eau}\pi r^2(\frac{2}{3}h - z)g - \frac{2}{3}\rho_{eau}\pi r^2 hg - k\eta\dot{z} = \frac{2}{3}\rho_{eau}\pi r^2 h\ddot{z}$$
$$\Rightarrow \frac{2}{3}\rho_{eau}\pi r^2 h\ddot{z} + k\eta\dot{z} + \rho_{eau}\pi r^2 gz = 0 \Rightarrow \ddot{z} + \frac{3k\eta}{2\rho_{eau}\pi r^2 h}\dot{z} + \frac{3g}{2h}z = 0$$

On reconnait la forme de l'équation différentielle du mouvement pour un oscillateur amorti :

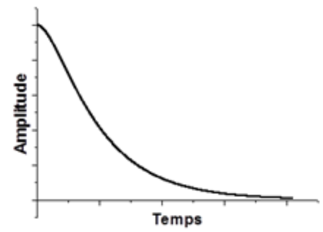
$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \Omega_0^2 z = 0, \text{ avec } \gamma = \frac{3k\eta}{4\rho_{eau}\pi r^2 h} \text{ et } \Omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2h}}$$

c) Voici l'allure qu'on les solutions pour les différents régimes possibles :

Si $\gamma > \mathbf{\Omega_0}$: régime d'amortissement fort, le type de mouvement est apériodique. On a :

$$z(t) = e^{-\gamma t}(Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}) \text{ avec } \omega = \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}$$

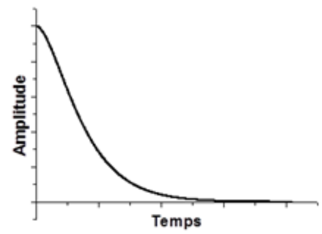
Pour ce type de mouvement on a z qui part de sa position initiale et qui atteint 0 au bout d'un temps long, sans oscillations.



Si $\gamma = \mathbf{\Omega_0}$: Il s'agit du régime d'amortissement critique. On a :

$$z(t) = e^{-\gamma t}(At + B)$$

Le cas critique est un mouvement qui ne présente pas d'oscillations et qui tend le plus rapidement vers $z = 0$.



Si $\gamma < \mathbf{\Omega_0}$: Il s'agit du régime d'amortissement faible. Le mouvement est périodique avec une amplitude décroissante.

$$z(t) = e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi) \text{ avec } \omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}$$

La fonction est le produit entre une exponentielle décroissante et d'une sinusoïde. L'allure de la courbe sera donc une sinusoïde dont l'amplitude varie comme une exponentielle décroissante.
La sinusoïde à une pulsation ω, soit une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Remarque : la fonction $z(t)$ n'étant pas parfaitement périodique du fait de l'exponentielle décroissante, on appelle T pseudo-période.
Dans l'énoncé, il est précisé que le flotteur oscille avant de retrouver sa position d'équilibre : on est donc dans le régime d'amortissement faible. L'amplitude de l'oscillation du flotteur en fonction du temps est celle représentée ci-dessus.