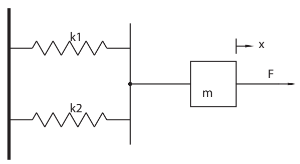
Solutions

Solution 1

1. 

   Si nous notons $\vec{F}_1$ la force exercée par le ressort 1 et $\vec{F}_2$ la force exercée par le ressort 2, alors la force totale exercée sur m par les ressort est :

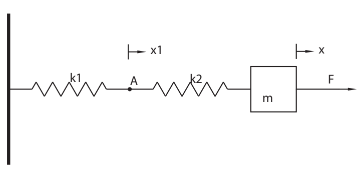
   $$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

   Plaçons l'origine de telle sorte que $x = 0$ lorsque les ressorts ont leur longueur de repos. Alors les forces sont exprimées de la façon suivante :

   $$\vec{F}_1 = -k_1 x \vec{e}_x \qquad \vec{F}_2 = -k_2 x \vec{e}_x \qquad \vec{F} = (k_1 + k_2) x \vec{e}_x$$

   C'est equivalent à la force exercée par un ressort unique de constante :

   $$\boxed{k = k_1 + k_2}$$

2. 

   On maintient m écartée de sa position d'équilibre par $\vec{F}$. Soit x_1 l'allongement du ressort 1 et x_2 celui du ressort 2. L'allongement total est $x = x_1 + x_2$.

   La loi de Newton appliquée au point A donne :

   $$\vec{F}_{k1} + \vec{F}_{k2} = \vec{0} = -k_1 x_1 \vec{e}_x + k_2 x_2 \vec{e}_x$$

   et donc $x_1 = \frac{k_2}{k_1} x_2$
   Sur la masse m nous avons :

   $$\sum \vec{F} = \vec{0} = \vec{F} + \vec{F}_{k2}$$

   Et donc

   $$\vec{F} - k_2 x_2 \vec{e}_x = \vec{0}$$

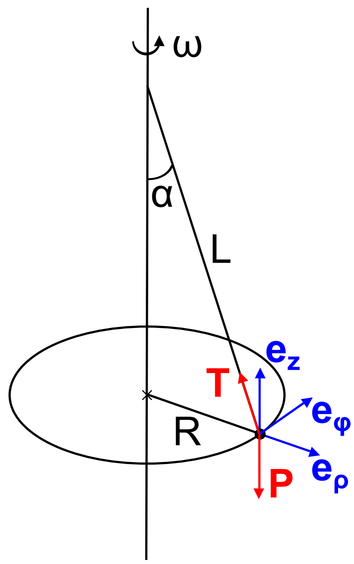
En considérant un ressort équivalent $\vec{F} = -\vec{F}_k x \vec{e}_x$ avec $x = x_1 + x_2$ Ainsi,

$$F = k_2 x_2 \vec{e}_x = k x \vec{e}_x = k(x_1 + x_2)\vec{e}_x = k(\frac{k_2}{k_1} + 1) x_2 \vec{e}_x$$

Soit

$$\boxed{\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

Solution 2



Le plus simple pour résoudre le problème est de considérer un repère lié au pendule en utilisant les coordonnées cylindriques.

L'angle α est donné par $\sin\alpha = \frac{R}{L}$.

Les forces en jeu sont : le poids $\vec{P}$ et la force de tension $\vec{T}$ de la ficelle.

La deuxième loi de Newton nous donne :

$$\sum \vec{F} = \vec{T} + \vec{P} = m\vec{a} = m[(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z]$$

Puisque le mouvement est <u>circulaire uniforme</u>, $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$ et $\ddot{\varphi} = 0$
Comme il est dans un plan $\ddot{z} = 0$:

$$\vec{a} = -\rho\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho = -R\omega^2\vec{e}_\rho$$

$$\vec{T} + m\vec{g} = -T\sin\alpha\vec{e}_\rho + T\cos\alpha\vec{e}_z - mg\vec{e}_z = -mR\omega^2\vec{e}_\rho$$

On doit alors résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} T\sin\alpha = mR\omega^2 & (1) \\ T\cos\alpha - mg = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) implique $T = \frac{mR\omega^2}{\sin\alpha}$ que l'on injecte dans (2) : $\tan\alpha = \frac{R\omega^2}{g}$.
Or, $v = \omega R$, donc $\frac{v^2}{R} = R\omega^2$. Nous avons donc les équations suivantes :

$$\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{R\omega^2}{g} & (3) \\ \sin\alpha = \dfrac{R}{L} & (4) \end{cases}$$

avec L, m, et ω donnés, et l'on cherche R et/ou α. Il faut transformer $\tan\alpha$ et $\sin\alpha$. Sachant que

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

on peut écrire

$$\tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha}$$

et en utilisant les équations (3) et (4),

$$\tan^2\alpha = \frac{R^2\omega^4}{g^2} \qquad \sin^2\alpha = \frac{R^2}{L^2}$$

nous pouvons écrire :

$$\frac{R^2\omega^4}{g^2} = \frac{\frac{R^2}{L^2}}{1 - \frac{R^2}{L^2}}$$

En simplifiant cette équation, nous obtenons finalement :

$$R = L\sqrt{1 - \frac{g^2}{L^2\omega^4}}$$

qui n'est valable que si $\frac{g^2}{L^2\omega^4} \leq 1$, soit $\omega^4 \geq \frac{g^2}{L^2}$, ou encore $\omega \geq \sqrt{\frac{g}{L}}$

Solution 3

1. Si l'ensemble est immobile, on peut appliquer $\sum \vec{F} = \vec{0}$ sur chaque masse. De plus on est à la limite avant le décrochement donc la force de frottement est $\mu_s \cdot R$.

   Sur 1 : $F_F = T$; de plus$F_F = \mu_s \cdot R = \mu_s m_1 g$. Donc $T = \mu_s m_1 g$

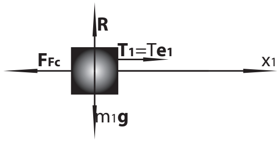
   Sur 2 : $T = m_2 g$

   On trouve donc $m_2 g = \mu_s m_1 g$, soit

   $$\boxed{m_2 = \mu_s m_1}$$

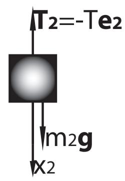
2. Le système est mis en mouvement le coefficient de frottement est alors μ_c et la force de frottement $F_{F,c} = \mu_c \cdot R$

Sur m_1 :



$$m_1 a_1 = -F_{F,c} + T$$
$$= -\mu_c R + T = -\mu_c m_1 g + T$$

Sur m_2 :



$$m_2 a_2 = m_2 g - T$$

De plus, la corde reste tendue, donc $a_1 = a_2$.
En utilisant les 2 premières équations pour éliminer T, puis en utilisant $a_1 = a_2$:

$$m_2 g - \mu_c m_1 g = m_1 a_1 + m_2 a_2 = (m_1 + m_2) a_1$$

qui donne :

$$a_1 = \frac{m_2 g - \mu_c m_1 g}{m_1 + m_2}$$

Avec $m_2 = \mu_s m_1$,

$$a_1 = g \frac{\mu_s - \mu_c}{1 + \mu_s}$$

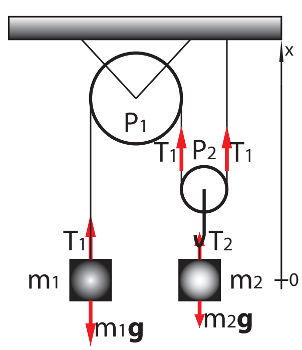
soit :

$$T = m_1 a_1 + \mu_c m_1 g = \mu_s m_1 g \frac{1 + \mu_c}{1 + \mu_s}$$

3. Si on suppose le système sans frottements, on trouve effectivement $T = 0$! Ce n'est pourtant pas forcément le cas ! Cela vient de la question (1) en l'absence de frottements, la moindre masse m_2 mettra le système en marche. La valeur limite est donc $m_2 = 0$, et dans ce cas la tension est nulle.

Solution 4

Les poulies sont sans masses ; on néglige les frottements



Comme la petite poulie est sans masse, la somme des forces sur la poulie doit être $\vec{0}$:

$$2\vec{T}_1 - \vec{T}_2 = \vec{0}$$

et donc :

$$2T_1 = T_2 \tag{5}$$

On applique la relation fondamentale de la dynamique :

Sur m_1 :

$$m_1 a_1 = T_1 - m_1 g \tag{6}$$

Sur m_2 :

$$m_2 a_2 = T_2 - m_2 g \tag{7}$$

La corde n'est pas extensible, donc :

$$x_1 = -2x_2$$

car lorsque m_1 bouge à la position $\vec{x}_1$, m_2 bouge à la position $-\vec{x}_1/2 = \vec{x}_2$. Et en dérivant deux fois on obtient :

$$a_1 = -2a_2 \tag{8}$$

Nous avons donc un système de quatre équations (5)–(8) à quatre inconnues, à savoir a_1, a_2, T_1, et T_2, que l'on résout comme suit :
(5) et (8) dans (7) donne :

$$-m_2\frac{a_1}{2} = 2T_1 - m_2 g \Rightarrow -m_2 a_1 = 4T_1 - 2m_2 g \tag{9}$$

En effectuant 4·(6)-(9), nous obtenons

$$\begin{aligned} 4m_1 a_1 + m_2 a_1 &= \cancel{4T_1} - 4m_1 g - \cancel{4T_1} + 2m_2 g \\ a_1(4m_1 + m_2) &= g(2m_2 - 4m_1) \end{aligned}$$

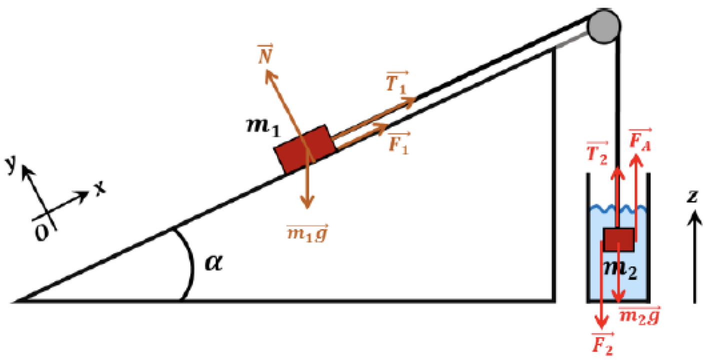
d'où l'on tire finalement :

$$a_1 = 2g\frac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2} \qquad\qquad a_2 = -\frac{1}{2}a_1 = -g\frac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2}$$

Des équations (6) et (5), on tire respectivement :

$$\begin{aligned} T_1 &= m_1 g + m_1 a_1 = m_1 g\left[1 + \frac{2m_2 - 4m_1}{4m_1 + m_2}\right] = m_1 g\left[\frac{3m_2}{4m_1 + m_2}\right] \\ T_2 &= 2T_1 = g\frac{6m_1 m_2}{4m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Solution 5

1. 

2. Comme on demande la valeur minimale de la masse m_1 pour qu'elle descende le long du plan, cela implique que la force de frottement sec est dirigée vers le haut du plan incliné, comme indiqué sur le schéma. Par ailleurs, dans le cas limite où les masses se mettent en mouvement, la force de frottement visqueux s'exerçant sur m_2 est nulle (car sa vitesse est nulle). Comme pour l'exercice précédent, on sépare le système en deux sous-systèmes, considérés immobile (cas limite) et auxquels on applique la 2nde loi de Newton :
   - Considérons d'abord m_2, et projetons sur l'axe (Oz) :
     $m_2\vec{a_2} = \vec{0} = m_2\vec{g} + \vec{T_2} + \vec{F_A} => m_2 g = T_2 + F_A = 0$
   - Considérons maintenant m_1, et projetons sur les axes (Ox) et (Oy) :
     $m_1\vec{a_1} = \vec{0} = m_1\vec{g} + \vec{T_1} + \vec{F_1} + \vec{N}$, donc :

   $$\begin{cases} -m_1 g \sin\alpha + T_1 + F_1 = 0 \\ N - m_1 g \cos\alpha = 0 => N = m_1 g \cos\alpha \end{cases}$$

   On sait que T_1=T_2 (fil inextensible, et sans masse).
   De plus, on a : $F_1 \leq \mu_s N$
   On obtient donc la condition sur m_1 pour qu'elle descende avec $F_1 > \mu_s N$. Donc :

   $$m_1 > \frac{m_2 g - F_A}{g(\sin\alpha - \mu_s \cos\alpha)}$$

3. a) Les forces s'appliquant sur les masses sont les mêmes, à l'exception de la force $\vec{F_1}$ qui est désormais une force de frottement sec dynamique. et de l'apparition de la force de frottement visqueux $\vec{F_v}$ sur m_2. On applique de nouveau Newton aux deux sous-systèmes :

   $$m_2\vec{a_2} = m_2\vec{g} + \vec{T_2} + \vec{F_A} + \vec{F_v} => m_2 a_2 = -m_2 g + T_2 + F_A - F_v,$$

donc

$$m_2\ddot{z} = -m_2 g + T_2 + F_A - \beta\dot{z}$$

$$m_1\vec{a_1} = m_1\vec{g} + \vec{T_1} + \vec{F_1} + \vec{N} \Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x} = -m_1 g\, \sin\alpha + T_1 + F_1 \\ N - m_1 g\, \cos\alpha = 0 \Rightarrow N = m_1 g\, \cos\alpha \end{cases}$$

Maintenant, on peut écrire $\vec{F_1} = \mu_d\vec{N}$.
On sait de plus que $T_1 = T_2$ et $\ddot{x} = -\ddot{z}$ et $\dot{x} = -\dot{z}$ (fil inextensible, et sans masse).
Ce qui permet d'obtenir : $T_1 = -m_2\ddot{x} - F_A + m_2 g - \beta\dot{x}$. En injectant dans l'équation de la masse m_1 :
$m_1\ddot{x} = -m_2\ddot{x} - F_A + m_2 g - \beta\dot{x} - m_1 g\sin\alpha + \mu_d m_1 g\cos\alpha$. Pour simplifier l'expression, notons les termes constants C_1 : $C_1 = -F_A + m_2 g - m_1 g\sin\alpha + \mu_d m_1 g\cos\alpha$

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} = -\beta\dot{x} + C_1$$

b) Comme vous n'avez pas encore vu les équations différentielles, vous utilisez l'indication donnée. L'inconnue (fonction recherchée) est la fonction $v(t)$. L'équation différentielle peut se réécrire :

$$\dot{v}(t) + \frac{\beta}{m_1 + m_2}v(t) = \frac{C_1}{m_1 + m_2}$$

La solution sera donc

$$v(t) = A + Be^{-\frac{\beta}{m_1+m_2}t}$$

A et B constantes d'intégration. Avec $v(0) = 0$, on trouve $B = -A$.
Quand t tend vers l'infini, la vitesse tend vers la vitesse limite, elle est alors constante, et donc $\dot{v}(t \to \infty) = 0$. Mis dans l'équation différentielle, cela donne $v_{\text{lim}} = \frac{C_1}{\beta}$.
Comme on a aussi $v(t \to \infty) = A$, on obtient $A = \frac{C_1}{\beta}$.
Au final,

$$v(t) = \frac{C_1}{\beta}(1 - exp(\frac{-\beta t}{m_1 + m_2}))$$

Pour celles et ceux qui sont intéressé.e.s résolution complète (hors programme), se fait de la manière suivante :
Pour intégrer cette équation, il faut séparer les variables : $\frac{d\dot{x}}{-\beta\dot{x}+C_1} = \frac{dt}{(m_1+m_2)}$, puis intégrer :
$\dot{x}(t) = -\frac{C_2}{\beta}exp(\frac{-\beta t}{m_1+m_2}) + \frac{C_1}{\beta}$, et il ne reste plus qu'à trouver C_2 qui est obtenue en écrivant que la vitesse initiale est nulle : $\dot{x}(t = 0) = 0 = -\frac{C_2}{\beta} + \frac{C_1}{\beta}$, donc $C_2 = C_1$.
Finalement,

$$\dot{x}(t) = \frac{C_1}{\beta}(1 - exp(\frac{-\beta t}{m_1 + m_2}))$$

Pour la vitesse limite, on calcule $\lim_{t\to\infty} \dot{x}(t)$:

$$\lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = \frac{C_1}{\beta}$$