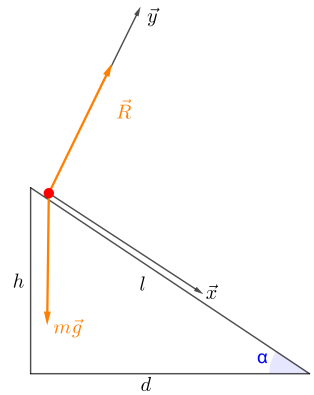
Solutions

Solution 1

a)



$$\overrightarrow{R}\left|\begin{matrix}0\\R\end{matrix}\right.$$

$$m\overrightarrow{g}\left|\begin{matrix}mg\sin\alpha\\-mg\cos\alpha\end{matrix}\right.$$

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} = \vec{R} + m\vec{g}$$

$$\begin{cases} ma_x = mg\sin\alpha \\ ma_y = R - mg\cos\alpha \quad \text{(contrainte de liaison)} \end{cases}$$

$a_x = g\sin\alpha \ \Rightarrow\ v_x(t) = (g\sin\alpha)t + \underset{0}{\cancel{v_0}} \ \Rightarrow\ x(t) = \frac{1}{2}(g\sin\alpha)t^2 + \underset{0}{\cancel{x_0}}$

$v_x(t) = (g\sin\alpha)t$ et $x(t) = \frac{1}{2}(g\sin\alpha)t^2$

$v_y = 0$ et $y(t) = 0$

b) Le bas du plan est atteint pour $x(t_f) = l$

$\frac{1}{2}(g\sin\alpha)t_f = l$ or $\sin\alpha = \frac{h}{l}\ \Rightarrow\ l = \frac{h}{\sin\alpha}$

$t_f = \sqrt{\frac{2l}{g\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\alpha}} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

$v(t_f) = g\sin\alpha t_f = \frac{\cancel{gsin\alpha}}{\cancel{\sin\alpha}}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$

c) Chute libre de hauteur h : $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$
$v_c = \sqrt{2gh}$

Donc la masse arrive en bas avec la même vitesse mais au bout d'un temps beaucoup plus long.

d) Il y a aussi la force de frottements $\vec{F}_F$:

$\overrightarrow{F_f}\left|\begin{matrix}-F_F\\0\end{matrix}\right.$ $\quad \sum\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_F$

$$\begin{cases} ma_x = mg\sin\alpha - F_F \\ ma_y = -mg\cos\alpha + R = 0 \quad \Rightarrow R = mg\cos\alpha \end{cases}$$

Frottements cinétiques donc $F_F = \mu_c R = \mu_c mg\cos\alpha$

$\Rightarrow \cancel{m}a = \cancel{m}g\sin\alpha - \mu_c\cancel{m}g\cos\alpha$

$a_x = g\sin\alpha\left[1 - \frac{\mu_c}{\tan\alpha}\right] \quad v_x = g\sin\alpha\left[1 - \frac{\mu_c}{\tan\alpha}\right] t$ et donc $x(t) = \frac{1}{2} g\sin\alpha\left[1 - \frac{\mu_c}{\tan\alpha}\right] t^2$
Le temps pour arriver en bas t_2 est :

$$t_2 = \sqrt{\frac{2l}{g\sin\alpha\left[1 - \frac{\mu_c}{\tan\alpha}\right]}}$$

$$t_2 = \frac{1}{\sin\alpha\sqrt{1 - \frac{\mu_c}{\tan\alpha}}}\sqrt{\frac{2h}{g}} > t_{\text{chute libre}}$$

$$v(t_2) = \sqrt{1 - \frac{\mu_c}{\tan\alpha}}\sqrt{2gh} < v_{\text{chute libre}}$$

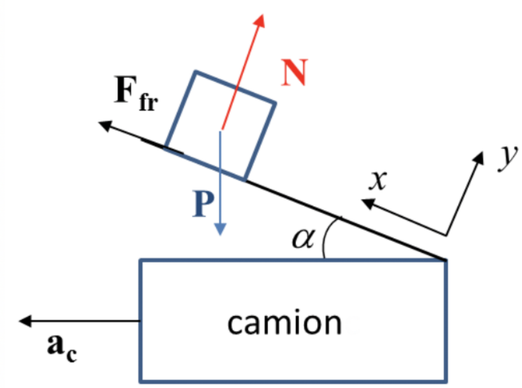
Cette fois le temps est encore plus long et la vitesse est plus faible que pour le plan incliné.

e) Si $\mu_c = 0$: $\quad t_2 = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

$\quad v(t_2) = \sqrt{2gh}$

On retrouve les résultats précédents.

Solution 2



a) Dans un premier temps le camion est au repos. On fait un bilan des forces qui agissent sur le paquet :

- Son poids
  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg(\sin\alpha\vec{e}_x + \cos\alpha\vec{e}_y)$
- La réaction du support : $\vec{N} = N\vec{e}_y$
- Force de frottement sec statique entre la benne et le paquet $\vec{F}_{fr} = F_{fr}\vec{e}_x$
  - On a $\|F_{fr}\| \leq \mu_s\|N\|$

On applique la seconde loi de Newton :

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} = 0 => \begin{cases} 0 = F_{fr} - mg\,sin\alpha \\ 0 = N - mg\,cos\alpha \end{cases} \quad => F_{fr} = mg\sin\alpha < \mu_s N$$

$=> mg\sin\alpha < \mu_s mg\cos\alpha$
$=> tan\alpha < \mu_s$
$=> \alpha_{lim} = \arctan\mu_s$

— On applique la seconde loi de Newton au paquet dans le repère galiléen (x,y) lié au sol :

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_{paquet/sol} => \begin{cases} m\ddot{x} = F_{fr} - mg\, sin\alpha \\ m\ddot{y} = N - mg\, cos\alpha \end{cases}$$

L'accélération du paquet par rapport au sol est la somme de l'accélération du paquet par rapport au camion et de l'accélération du camion par rapport au sol :

$$a_{paquet/sol} = a_{paquet/camoin} + a_{camoin/sol}$$

On a par ailleurs l'accélération du camion par rapport au sol :

$$a_{camoin/sol} = a_c(\cos\alpha e_x - \sin\alpha e_y)$$

L'accélération du paquet par rapport au camion n'a pas de composante selon y car le paquet reste en contact avec la benne. De plus, on étudie le cas statique car on cherche la limite pour laquelle le paquet se met en mouvement. Donc la composante selon x de l'accélération du paquet par rapport au camion est aussi nulle. D'où :

$$a_{paquet/sol} = a_{camoin/sol} => \begin{cases} \ddot{x} = a_c\cos\alpha \\ \ddot{y} = -a_c\sin\alpha \end{cases}$$

En utilisant la projection sur y de la loi de Newton on a :

$$-ma_c\,\sin\alpha = N - mg\,\cos\alpha => N = mg\,\cos\alpha - ma_c\,\sin\alpha$$

Pour déterminer l'accélération minimum du camion, on utilise l'inégalité sur la force de frottement :

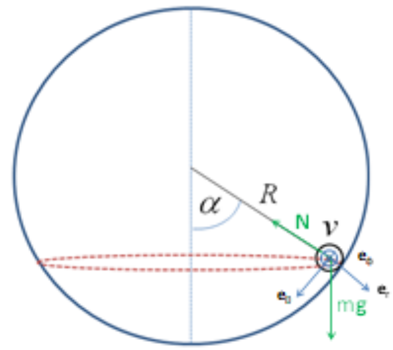
$$\begin{aligned} &\|F_{fr}\| \leq \mu_s\|N\| \\ &=> m\ddot{x} + mg\,\sin\alpha \leq \mu_s(m\ddot{y} + mg\,\cos\alpha) \\ &=> m(a_c\cos\alpha + g\sin\alpha) \leq \mu_s m(-a_c\,\sin\alpha + g\,\cos\alpha) \\ &=> a_c(\cos\alpha + \mu_s\,\sin\alpha) \leq g(\mu_s\,\cos\alpha - \sin\alpha) \\ &=> a_c \leq \frac{g(\mu_s\,\cos\alpha - \sin\alpha)}{(\cos\alpha + \mu_s\,\sin\alpha)} \end{aligned}$$

L'accélération minimale pour que le paquet se mette à glisser est donc :

$$\frac{g(\mu_s\,\cos\alpha - \sin\alpha)}{(\cos\alpha + \mu_s\,\sin\alpha)}$$

Solution 3

a) Schéma à droite.
On utilisera un repère sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, en accord avec la symétrie du problème.
Il y a deux forces en jeu : la pesanteur $m\vec{g}$ ainsi que la force de soutien de la sphère $\vec{N}$. Ainsi, la seconde loi de Newton nous dit : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$ La projection des forces sur le repère sphérique s'écrit :



$$\sum \vec{F} = (mg\ \cos\alpha - N)\vec{e}_r + mg\ \sin\alpha\,\vec{e}_\theta$$

L'accélération en coordonnées sphériques est donnée par :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta)\vec{e}_\theta + (r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta)\vec{e}_\varphi$$

Avec les constraintes $r = cte \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$ (mouvement sur la paroi interne de la sphère, i.e. $r = R$ fixé), $\theta = cte \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ $\dot{\varphi} = cte \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$ (pour la situation à l'équilibre décrite), la seconde loi de Newton devient :

$$(mg\ \cos\alpha - N)\vec{e}_r + mg\ \sin\alpha\,\vec{e}_\theta = m(-R\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\vec{e}_r - R\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta\vec{e}_\theta)$$

On remarque que $\alpha = \pi - \theta$, donc $\cos\theta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ et $\sin\theta = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$:

$$\Rightarrow (mg\ \cos\alpha - N)\vec{e}_r + mg\ \sin\alpha\,\vec{e}_\theta = -mR\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha\vec{e}_r + mR\dot{\varphi}^2\cos\alpha\sin\alpha\vec{e}_\theta)$$

En projetant la seconde loi de Newton sur les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$, on a :

$$\begin{cases} mg\ \cos\alpha - N = -mR\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha \\ mg\ \sin\alpha = mR\dot{\varphi}^2\cos\alpha\sin\alpha \end{cases}$$

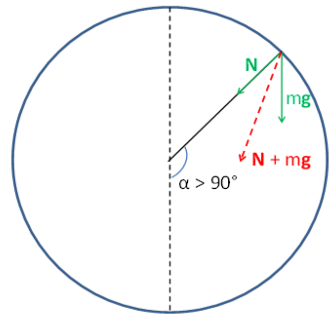
Avec la deuxième équation, on obtient :

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{R\cos\alpha} \Rightarrow \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{g}{R\cos\alpha}}$$

On en déduit la vitesse :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi = R\dot{\varphi}\sin\alpha\vec{e}_\varphi = R\sqrt{\frac{g}{R\cos\alpha}}\sin\alpha\vec{e}_\varphi = \sin\alpha\sqrt{\frac{Rg}{\cos\alpha}}\vec{e}_\varphi$$

b) Pour que le mouvement du motard puisse être circulaire uniforme, il faut que son accélération soit uniquement radiale, c'est-à-dire que la résultante des forces ne doit avoir qu'une composante horizontale, dirigée vers l'axe central de la sphère. Les composantes verticales de la force de pesanteur et de la force de soutien de la sphère doivent pouvoir se contrebalancer. Ce n'est pas possible si l'angle α est supérieur ou égal à 90° car alors la composante verticale de la force de soutien est dirigée vers le bas, donc dans le même sens que la force de pesanteur.



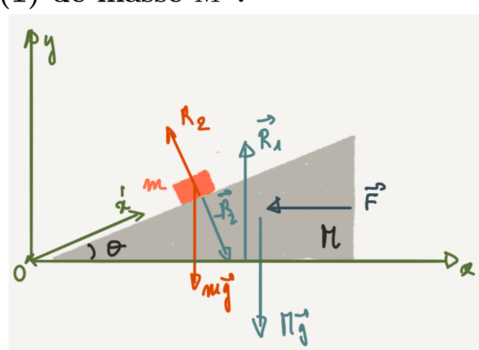
Solution 4

Il faut ici bien réfléchir.. le système est compliqué. Il faut identifier la bonne condition correspondant à l'énoncé. Si le bloc de masse m est immobile par rapport à M, c'est que l'accélération des deux blocs est identique.

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}$$

Nous allons faire le bilan des forces :

Sur (1) de masse M :



$\vec{F}$ force appliquée

$M\vec{g}$ poids

$-\vec{R}_2$ opposé de la réaction de (2) sur (1)

$\vec{R}_1$ réaction du sol

$$\sum \vec{F} = M\vec{a} = \vec{F} + M\vec{g} + \vec{R}_1 - \vec{R}_2 \quad (1)$$

Sur (2) de masse m :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}_2 \quad (2)$$

On cherche $\vec{F}$. On ne connait ni $\vec{R}_1$ ni $\vec{R}_2$, ni $\vec{a}$. Stratégie : obtenir des équations découplées $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ et ensuite projeter sur les normales respectives.

(1)+(2) $\Rightarrow (M+m)\vec{a} = (M+m)\vec{g} + \vec{F} + \vec{R}_1$ (6)

(6) projeté sur (Ox) $\Rightarrow -(M+m)a = -F + 0 + 0$

(2) projeté sur (Ox') : $-ma\cos\theta = -mg\sin\theta \Rightarrow a = g\tan\theta$

$$\Rightarrow \boxed{F = (M+m)g\tan\theta}$$