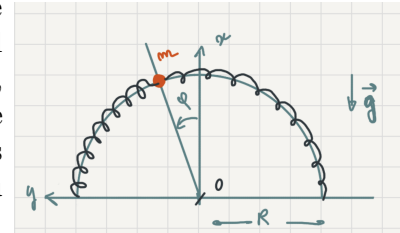


Exercices

Exercice 1 *Métronome vertical (ancien examen)*

On veut étudier un dispositif qui doit servir de métronome (instrument utilisé en musique pour battre la mesure). Il est constitué d'une tige rigide en demi cercle de rayon R , fixée verticalement, d'une masse m qui coulisse sur la tige et de deux ressorts. On néglige tous les frottements. Les ressorts ont une constante de raideur k et une longueur au repos $l_0 = R\pi/2$.



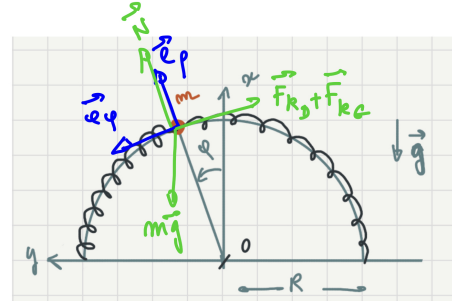
- Faire le bilan des forces sur m et les représenter sur le schéma
- Exprimer l'accélération de la masse m dans les coordonnées polaires du dessin en tenant compte des caractéristiques du dispositif..
- Etablir les équations du mouvement en coordonnées polaires.
- Montrer que la position $\varphi = 0$ est une position d'équilibre.
- Etablir l'équation différentielle du mouvement sur la coordonnée φ dans le cas où φ reste faible.
- Toujours dans le cas où φ reste petit, quelle condition liant k , m , g et R assure que le système se comporte comme un oscillateur harmonique ?
- Exprimer l'énergie potentielle de la masse lorsqu'elle se déplace sur la tige, en fonction de la coordonnée φ , d'abord dans le cas général, puis dans le cas des petits angles. On rappelle que pour φ petit $\cos(\varphi) \simeq 1 - \varphi^2/2$
- Dans l'approximation où φ reste faible, (re)trouver à l'aide de l'énergie potentielle, la condition sur k pour que le système se comporte comme un oscillateur harmonique.
- Calculer l'expression de l'énergie mécanique dans le cas général (pas de supposition sur φ), puis l'utiliser pour retrouver l'équation différentielle du mouvement de la masse.

Solutions

Solution 1

a) Les forces en présence sont :

- poids = $m\vec{g}$
- réaction du rail = $\vec{N}$
- les forces du ressort $\vec{F}_G$ et $\vec{F}_D$ (ressort à gauche et à droite)



b) Soit l'équation de l'accélération en coordonnées polaires :

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

Avec $\rho = R = \text{cst}$

$$\vec{a} = -R\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho + R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

c) Expression des forces en polaires :

- $\vec{N} = N\vec{e}_\rho$
- $\vec{F}_{kD} = \vec{F}_{kG} = -kR\varphi\vec{e}_\varphi$
- $m\vec{g} = -mg\cos\varphi\vec{e}_\rho + mg\sin\varphi\vec{e}_\varphi$

Les forces de rappel des ressorts sont proportionnelles à l'allongement. Les longueurs au repos sont égales au $1/4$ d'arc de cercle. Lorsque φ est positif les deux ressorts exercent une force selon $-\vec{e}_\varphi$, et l'allongement est $R\varphi$.

En appliquant $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ et en projetant sur $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$:

Equation sur $\vec{e}_\rho$:

$$-mR\dot{\varphi}^2 = N - mg\cos\varphi$$

Equation sur $\vec{e}_\varphi$:

$$mR\ddot{\varphi} = -2kR\varphi + mg\sin\varphi$$

d) On place m en $\varphi = 0$ avec $v = 0$, donc les ressorts sont au repos :

$$\vec{F}_{kD} = \vec{F}_{kG} = \vec{0}$$

Donc

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cst = 0$$

donc m reste en $\varphi = 0$.

$\varphi = 0$ est donc une position d'équilibre stable.

e) On utilise l'équation sur $\vec{e}_\rho$:

$$mR\ddot{\varphi} = mg \sin \varphi - 2kR\varphi$$

Avec $\varphi \ll 1$, $\sin \varphi \approx \varphi$

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{R}\varphi - \frac{2k}{m}\varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{2k}{m} - \frac{g}{R}\right)\varphi = 0$$

f) On doit avoir :

$$\frac{2k}{m} - \frac{g}{R} > 0$$

Par suite

$$k > \frac{mg}{2R}$$

g)

$$\begin{aligned} E_p &= E_{p,\text{grav}} + E_{p,\text{ressorts}} \\ &= mgh + \frac{1}{2}2k(\text{allongement})^2 \\ &= mgR \cos \varphi + kR^2\varphi^2 \\ E_p &= mgR \cos \varphi + kR^2\varphi^2 \end{aligned}$$

Et dans le cas des petits angles :

$$\begin{aligned} &mgR\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) + kR^2\varphi^2 \\ &= mgR + \varphi^2\left(kR^2 - \frac{mgR}{2}\right) \end{aligned}$$

h) On pose :

$$E_p = A\varphi^2 + E_{p0}$$

avec $A > 0$ Soit :

$$kR^2 - \frac{mgR}{2} > 0$$

Donc :

$$k > \frac{mg}{2R} \text{ :)}$$

i) On reprend l'expression de l'énergie mécanique et on la développe :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p$$

$$E_m = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + mgR \cos \varphi + kR^2\varphi^2$$

On dérive l'énergie mécanique en utilisant le fait que la dérivée est nulle :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}mR^2 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} - mgR\dot{\varphi} \sin \varphi + 2kR\varphi\dot{\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow mR\ddot{\varphi} - mg \sin \varphi + 2kR\varphi = 0$$

On retrouve donc l'équation différentielle est :

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{R} \sin \varphi - \frac{2k}{m}\varphi$$