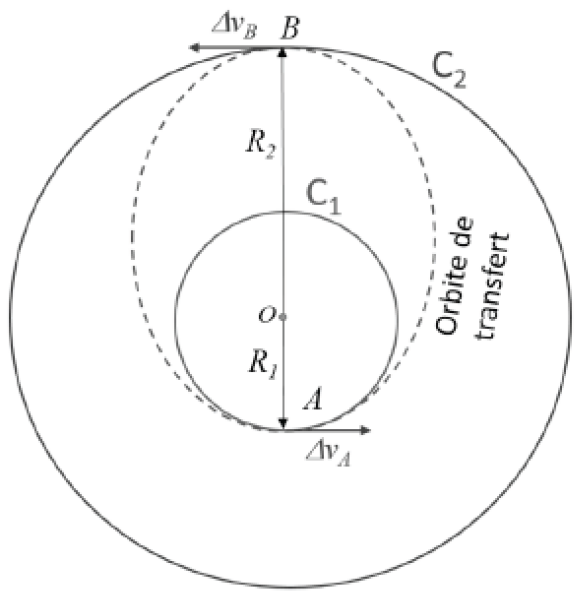
Exercices

Exercice 1 *Examen 2018*
La station spatiale internationale est un satellite tournant autour de la Terre. Les spationautes sont ravitaillés périodiquement par une navette lancée par une fusée. On appellera G la constante de gravitation universelle et M la masse de la Terre. Après la libération par la fusée, la navette de masse m est placée sur une orbite circulaire C_1 de rayon R_1, qui est plus petite que l'orbite circulaire C_2 de rayon R_2 de la station spatiale.

1. Démontrez que la vitesse d'un satellite sur une orbite circulaire est constante.
2. Exprimez la vitesse v_1 de la navette sur l'orbite circulaire C_1 en fonction des données du problème.
3. Donnez l'expression de l'énergie mécanique E_1 sur l'orbite C_1 en fonction de G, m, M, et R_1. La navette rejoint ensuite l'orbite C_2 grâce à l'allumage d'un moteur.
4. Calculer le travail W_{12} de la force de gravitation $\vec{F}$ qui s'exerce sur la navette quand celle-ci passe de l'orbite C_1 à l'orbite C_2. En pratique, pour atteindre l'orbite circulaire C_2, il faut d'abord passer par une orbite de transfert qui est elliptique, comme indiqué en pointillé sur le schéma ci-dessous.



5. La navette est sur l'orbite de transfert. Exprimez la vitesse v_B de la navette au point B en fonction de sa vitesse v_A au point A.
6. Déterminez l'expression de l'énergie mécanique E_T sur l'orbite de transfert en fonction de G, m, M, R_1 et R_2.
7. Exprimez la vitesse $v_A = v_1 + \Delta v_1$ qu'il faut communiquer à la navette pour passer de l'orbite circulaire C_1 à l'orbite de transfert. Le résultat sera exprimé en fonction de E_T, E_1, et m.
8. La variation de vitesse Δv_B de la navette en B est-elle positive ou négative ? Justifiez votre réponse sans calcul.

Solutions

Solution 1

1. La conservation du moment cinétique $\vec{L_O} = \vec{r} \times \vec{v}$ (force centrale) impose $v = cte$ si $r = cte$
2. On a un mouvement circulaire uniforme : l'acceleration est l'acceleration centripete :

$$m\frac{v_1^2}{R_1} = F_G = \frac{mMG}{R_1^2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{MG}{R_1}}$$

3. $$E_1 = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{mMG}{R_1} = \frac{1}{2}\frac{mMG}{R_1} - \frac{mMG}{R_1} = -\frac{1}{2}\frac{mMG}{R_1}$$

4. la gravitation est conservative, donc le travail :

$$W_{12} = -\Delta E_p = (\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})mMG$$

5. On utilise la conservation du moment cinetique $\vec{L_O}$:

$$\vec{L}_O = \text{cte} \Rightarrow R_1 v_A = R_2 v_B \Rightarrow v_B = \frac{R_1}{R_2}v_a$$

6. L'énergie mécanique sur l'orbite de transfert calculée en A est :

$$E_T = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{mMG}{R_1}$$

L'énergie mécanique sur l'orbite de transfert calculée en B est :

$$E_T = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{mMG}{R_2} = \frac{R_1^2}{2R_2^2}mv_A^2 - \frac{mMG}{R_2}$$

Comme E_T est constante sur l'orbite, on en tire :

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{mMG}{R_1} = \frac{R_1}{2R_2^2}mv_A^2 - \frac{mMG}{R_2} \Leftrightarrow (\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2})\frac{1}{2}mv_A^2 = mMG(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = mMG(\frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2})(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}) = mMG\frac{R_2}{(R_2 + R_1)R_1}$$

Et en reportant cette valeur de $\frac{1}{2}mv_A^2$ dans l'expression de E_T en A :

$$E_T = mMG\frac{R_2}{(R_2 + R_1)R_1} - \frac{mMG}{R_1} = mMG\frac{R_2 - R_2 - R_1}{(R_2 + R_1)R_1} = -\frac{mMG}{(R_2 + R_1)}$$

Note : on peut aussi proceder par elimination

7. On a vu en f) que $E_T = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{mMG}{R_1}$ et en c) que $E_1 = -\frac{1}{2}\frac{mMG}{R_1}$ donc :

$$E_T = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{mMG}{R_1} = \frac{1}{2}mv_A^2 + 2E_1 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = E_T - 2E_1 \Rightarrow v_A^2 = \frac{2E_T - 4E_1}{m}$$

8. Positive. On le voit car le rayon de courbure sur l'orbite elliptique est plus faible.