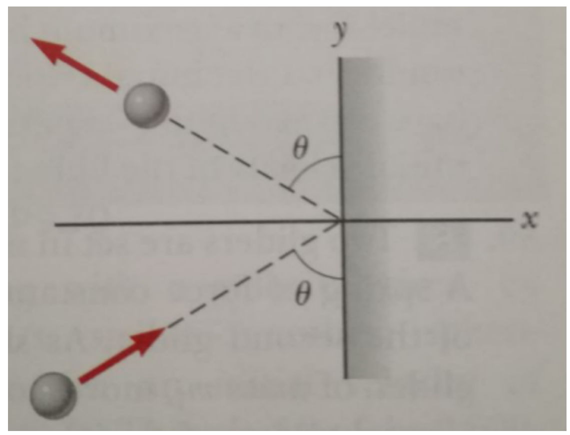
Exercices

Exercice 1 *révision chocs*
En finale du tournoi de Roland Garros, Roger Federer reçoit une balle (de masse $m = 0,06$ kg) de Rafael Nadal arrivant horizontalement avec une vitesse $v = 50$ m·s^{-1}. Il renvoie la balle dans le sens opposé mais toujours horizontalement avec une vitesse de 40 m·s^{-1}.

1. Quelle est la quantité de mouvement transmise à la balle par la raquette de Roger ?
2. Quel travail la raquette effectue-t-elle sur la balle ?

Exercice 2 *révision chocs*

Une boule de pétanque en acier de masse $m = 3$ kg frappe un mur avec une vitesse $v = 10$ m·s^{-1} et un angle $\theta = 60°$ tel que le montre la figure de droite. La boule rebondit sur le mur et repart avec la même vitesse v et le même angle θ.
Si la balle est en contact avec le mur pendant un temps $t_{contact} = 0,2$ s, quelle est la force moyenne exercée par le mur sur la balle ?

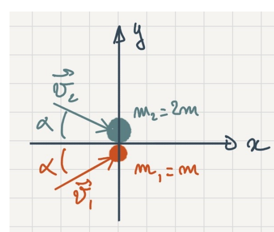


Exercice 3 *révision chocs*
On regarde les collisions entre une boule en acier de 1kg et une balle de 10g. Calculer les vitesses après un choc élastique quand :

1. La boule arrive à $v_1 = 1$m/s dans la balle immobile
2. La balle arrive à $v_1 = 1$m/s dans la boule immobile

Exercice 4 *révision chocs*

2 palets de masse $m_1 = m = 1$kg et $m_2 = 2m = 2$kg ont une collision élastique (choc frontal) avec $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. L'angle α fait 30° et $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = 1$ m/s.
Donner les composantes de $\vec{v}_1'$ et $\vec{v}_2'$ dans le repère (O, x, y).



Exercice 5
Une masse $m = 10,6$ kg oscille au bout d'un ressort vertical de constante $k = 20500$ N·m^{-1}. Les frottements fluides sont pris en compte et on donne le coefficient $b_l = 3$ Ns·m^{-1}. Donner la pseudo-fréquence des oscillations.

Version du 30 octobre 2023

Exercice 6
On considère un oscillateur amorti constitué d'un ressort vertical au bout duquel est accrochée une masse m, le tout plongé dans un liquide (le coefficient de frottement est b).

1. Faire une analyse de forces et trouver une expression de $m\ddot{x}$
2. Montrer que la perte d'énergie mécanique de l'oscillateur amorti en fonction du temps est donnée par $\frac{dE_m}{dt} = -bv^2$.

Exercice 7
On dispose d'une masse $m = 100\text{g}$ et de deux ressorts de constante 10Nm^{-1}. Quelle est la période propre de l'oscillateur obtenu si on met un seul ressort ? Les deux ressorts en série ? Les deux ressorts en parallèle ?

Exercice 8
Un explorateur arrive sur une planète inconnue. Il utilise un pendule simple pour mesurer la gravité. Le fil fait 1 mètre et la période des petites oscillations 2,8s. Que vaut g sur cette planète ?

Exercice 9
Un oscillateur amorti est constitué d'une masse m et d'un ressort de raideur k. L'amplitude des oscillations diminue de 10% à chaque pseudopériode.

1. Montrer que $\gamma\frac{2\pi}{\omega} = -\ln(0,9) \cong 0,1$
2. En déduire $\frac{\gamma}{\Omega_0}$

Reponses

1. (a) On trouve $p_{raq} = 5,4$ kg·m·s^{-1}
   (b) On a $W = \Delta E_c = -27$ J
2. On trouve une force $F = 260$ N orientée selon $-\vec{e}_x$
3. $v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \qquad v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2} v_1$
   (a) $v_1' = \frac{1-0,01}{1,01} \cdot 1\text{m/s}{=}0,98\text{m/s}$
   $v_2' = \frac{2 \cdot 1}{1,01} \cdot 1 = 1,98\text{m/s}$
   (b) $v_1' = \frac{-0.99}{1,01} \cdot 1\text{m/s}{=}-0,98\text{m/s}$
   $v_2' = \frac{2 \cdot 0,01}{1,01} \cdot 1 = 0,0198\text{m/s}$
4. $\overrightarrow{v_1} \left| \begin{matrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{matrix} \right. \quad \overrightarrow{v_2} \left| \begin{matrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{matrix} \right.$

$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \qquad\qquad m_1 = m \quad m_2 = 2m$$
$$= \frac{-\cancel{m}\vec{v}_1 + 4\cancel{m}v_2}{3\cancel{m}} \qquad = -\frac{1}{3}\vec{v}_1 + \frac{4}{3}\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2' = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2} = \frac{\cancel{m}\vec{v}_2 + 2\cancel{m}\vec{v}_1}{3\cancel{m}}$$
$$= \frac{1}{3}\vec{v}_2 + \frac{2}{3}\vec{v}_1$$

$$\overrightarrow{v_1'} \left| \begin{matrix} -\frac{1}{3}\cos\alpha + \frac{4}{3}\cos\alpha = \cos\alpha \\ -\frac{1}{3}\sin\alpha - \frac{4}{3}\sin\alpha = -\frac{5}{3}\sin\alpha \end{matrix} \right. \qquad \overrightarrow{v_2'} \left| \begin{matrix} \cos\alpha \\ \frac{1}{3}\sin\alpha \end{matrix} \right.$$

5. On trouve $f = 7$ Hz
6. (a) En projetant les forces, on trouve $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$
   (b) L'énergie mécanique est donnée par $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$. Alors on a :
   $$\frac{dE_m}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x}$$
   En isolant kx dans la question 1 et en l'injectant dans la dérivée de l'énergie
   $$\frac{dE_m}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}(-m\ddot{x} - b\dot{x}) = \boxed{-b\dot{x}^2}$$
7. $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0.1}} = 10\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$
   Un seul :$T_1 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 0,62\text{s}$
   En série : $k' = \frac{k}{2} \;\Rightarrow\; T_2 = \sqrt{2}T_1 = 0,89\text{s}$
   En parallèle : $k'' = 2k \;\Rightarrow\; T_3 = \frac{T_1}{\sqrt{2}} = 0,44\text{s}$

8. Il obtient g =5 m·s^{-2}
9. 1. $0.9e^{-\gamma \cdot 0} = e^{-\gamma \frac{2\pi}{\omega}} \Rightarrow \gamma \frac{2\pi}{\omega} = -\ln(0,9)$
   2. $\frac{\gamma}{\Omega_0} = 0,016$

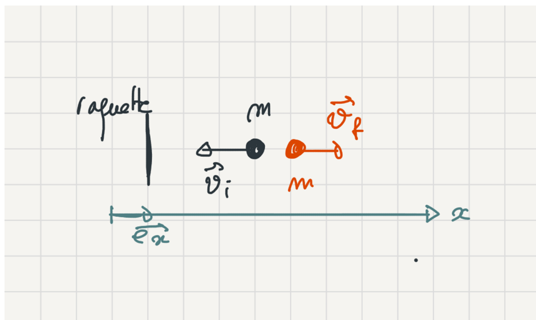
Solutions

Solution 1

1. La balle partant dans l'autre direction, la quantité de mouvement transmise peut s'écrire :

$$\vec{p}_{\text{balle}} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = m(v_f\vec{e}_x - (-v_i\vec{e}_x)) = m(v_f + v_i)\vec{e}_x = 5.4\vec{e}_x \tag{1}$$

Donc $p_{\text{balle}} = |\vec{p}_{\text{balle}}| = 5.4$ kg ·m·s^{-1}



2.

$$W = \Delta E_c = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = -27J \tag{2}$$

Solution 2

En reprenant l'expression de la seconde Loi de Newton, on sait que $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, donc en prenant une force moyenne, on peut approximer la formule de forme discrète comme suit : $\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$

Alors on peut l'écrire grâce aux composantes horizontales des quantités de mouvement avant et après l'impact :

$$\vec{v}_i = v(\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)\vec{e}_x + \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)\vec{e}_y) \tag{3}$$

$$\vec{v}_f = v(-\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)\vec{e}_x + \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)\vec{e}_y) \tag{4}$$

$$\Delta\vec{p} = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i) = 2mv\sin(\theta)\vec{e}_x \tag{5}$$

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv\sin(\theta)}{t_{contact}} = 259.81N \tag{6}$$

Solution 3

Par clarté nous noterons la boule avec l'indice B et la balle b. Les vitesses respectives de la balle et la boule après choc sont régies par les équations (du cours) de choc frontal :

$$\vec{v}_b^{\,\prime} = \frac{(m_b - m_B)\vec{v}_b + 2m_B\vec{v}_B}{m_b + m_B} \tag{7}$$

$$\vec{v}_B^{\,\prime} = \frac{(m_B - m_b)\vec{v}_B + 2m_b\vec{v}_b}{m_b + m_B} \tag{8}$$

1. La balle est immobile, donc $v_b = 0$. Le système devient alors :

$$v_b^{'} = \frac{2m_B}{m_b + m_B} v_B = 1.98 m \cdot s^{-1} \tag{9}$$

$$v_B^{'} = \frac{m_B - m_b}{m_b + m_B} v_B = 0.98 m \cdot s^{-1} \tag{10}$$

2. La boule est immobile, donc $v_B = 0$. Le système devient alors :

$$v_b^{'} = \frac{m_b - m_B}{m_b + m_B} v_b = -0.98 m \cdot s^{-1} \tag{11}$$

$$v_B^{'} = \frac{2m_b}{m_b + m_B} v_b = 0.02 m \cdot s^{-1} \tag{12}$$

Solution 4

On utilise à nouveau la formule de vitesse après un choc frontal :

$$\vec{v}_1^{\,\prime} = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{13}$$

$$\vec{v}_2^{\,\prime} = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \tag{14}$$

Cependant, ici les vecteurs vitesse 1 et 2 doivent être projetés :

$$\vec{v}_1 = v(\cos(\alpha)\vec{e}_x + \sin(\alpha)\vec{e}_y) = v(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y) \tag{15}$$

$$\vec{v}_2 = v(\cos(\alpha)\vec{e}_x - \sin(\alpha)\vec{e}_y) = v(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x - \frac{1}{2}\vec{e}_y) \tag{16}$$

En injectant les masses respectives et les vitesses projetées, on obtient :

$$\vec{v}_1^{\,\prime} = -\frac{1}{3}\vec{v}_1 + \frac{4}{3}\vec{v}_2 = v(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x - \frac{5}{6}\vec{e}_y) \tag{17}$$

$$\vec{v}_2^{\,\prime} = \frac{2}{3}\vec{v}_1 + \frac{1}{3}\vec{v}_2 = v(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{6}\vec{e}_y) \tag{18}$$

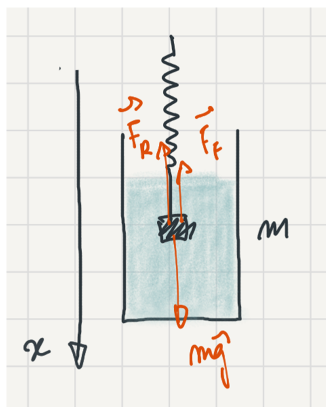
Solution 5
La pseude-fréquence s'écrit :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{b_e}{2m})^2}}{2\pi} = 7Hz \tag{19}$$

Solution 6

1. La seconde loi de Newton le long de la direction verticale (notée x) nous donne :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_f + m\vec{g} + \vec{F}_k = m\ddot{x}\vec{e}_x = mg\vec{e}_x - b_l\dot{x}\vec{e}_x - kx\vec{e}_x \tag{20}$$
$$m\ddot{x} + b_l\dot{x} + kx = mg \tag{21}$$



2. L'énergie mécanique est donnée par $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx$. Alors on a :

$$\frac{dE_m}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} - mg\dot{x}$$

En isolant kx dans la question 1 et en l'injectant dans la dérivée de l'énergie

$$\frac{dE_m}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}(mg - m\ddot{x} - b\dot{x}) - mg\dot{x} = \boxed{-b\dot{x}^2}$$

Solution 7
L'expression de la période propre est $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eq}}}$ avec $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$. Donc pour les différents systèmes étudiés on a :

- Pour un seul ressort, $k_{eq} = k = 10Nm^{-1}$, donc $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0.62$s

- Pour 2 ressorts en série, $k_{eq} = (\frac{1}{k} + \frac{1}{k})^{-1} = \frac{k}{2} = 5Nm^{-1}$, donc $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}} = 0.89$s
- Pour 2 ressorts en parallèle, $k_{eq} = k + k = 20Nm^{-1}$, donc $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} = 0.44$s

Solution 8

Nous savons que la période s'écrit $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$. Pour un pendule simple soumis à la gravité, en appliquant la Seconde Loi de Newton et projetant nos équations du mouvement dans des coordonnées polaires, l'équation sur $\vec{e}_\varphi$ donne (détail dans le cours) :

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin(\varphi) \tag{22}$$

Pour des petites oscillations, on peut faire l'approximation $\sin(\varphi) \simeq \varphi$. En regroupant les termes à gauche et divisant par la masse et la longueur, on obtient l'équation d'oscillateur harmonique suivante :

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = \ddot{\varphi} + \Omega_0^2\varphi = 0 \tag{23}$$

Ou on a la pulsation propre $\Omega_0^2 = \frac{g}{l}$. Donc en injectant ce résultat dans la définition de la période on peut la relier à la constante g, et isoler cette dernière :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{24}$$

$$g = \frac{4l\pi^2}{T^2} = 5.035m \cdot s^{-2} \tag{25}$$

Solution 9

1. L'équation d'un oscillateur amorti est :

$$m\ddot{x} + b_l\dot{x} + kx = \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0 \tag{26}$$

   Et sa solution générale est de la forme $x(t) = C'e^{-\gamma t} * \cos(\omega t + \varphi)$. Ainsi, l'amplitude de x(t) correspond aux termes non-harmoniques : $A = C'e^{-\gamma t}$. Si l'amplitude diminue de 10% à chaque pseudopériode, on peut écrire pour la première :

$$A(t = T) = 0.9 * A(t = 0) \tag{27}$$

$$e^{-\gamma T} = e^{-\gamma\frac{2\pi}{\omega}} = 0.9e^{-\gamma 0} = 0.9 \tag{28}$$

$$\gamma\frac{2\pi}{\omega} = -ln(0.9) \tag{29}$$

2. On sait que $\omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2} \iff \Omega_0^2 = \omega^2 + \gamma^2$, donc :

$$\frac{\gamma^2}{\Omega_0^2} = \frac{\gamma^2}{\omega^2 + \gamma^2} = \frac{(\frac{\gamma}{\omega})^2}{1 + (\frac{\gamma}{\omega})^2} \tag{30}$$

$$\frac{\gamma}{\Omega_0} = \sqrt{\frac{(\frac{\gamma}{\omega})^2}{1 + (\frac{\gamma}{\omega})^2}} \tag{31}$$

En injectant le résultat de la question précédente $\frac{\gamma}{\Omega_0} = \frac{-ln(0.9)}{2\pi}$, on en déduit $\frac{\gamma}{\Omega_0} = 0.016$.