Exercices

Exercice 1
Le vecteur position d'une particule varie dans le temps suivant l'équation

$$\vec{r} = 3\vec{e_x} + 6t^2\vec{e_y}$$

Où t est en secondes et les distances données en mètres.

a) Trouver la vitesse de la particule en fonction du temps

b) Déterminer les accélérations vectorielle et scalaire de la particule

c) Calculer la position et la vitesse de la particule à $t = 1$ s

Exercice 2
Calculer :

1. la vitesse d'un point à l'équateur liée à la vitesse de rotation de la Terre ;
2. l'accélération centripète en ce même point ;
3. la durée du jour que devrait avoir la Terre pour que l'accélération centripète à l'équateur soit égale à g ;
4. la vitesse de la Terre dans sa rotation autour du Soleil.

Indication : la lumière du Soleil met 8 minutes pour atteindre la Terre.
Rayon de la Terre, 6380 km.

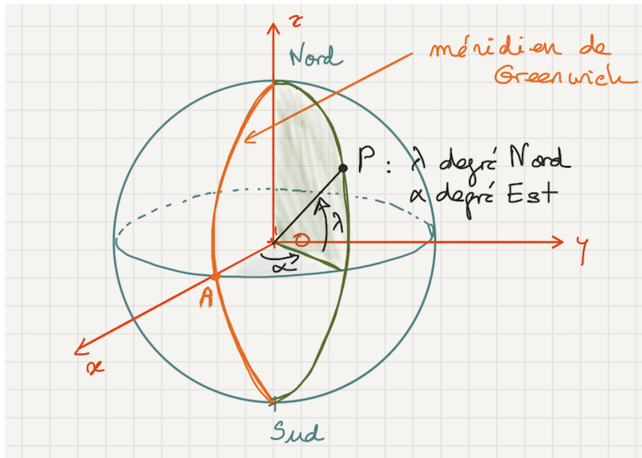
Exercice 3
Un point P a comme coordonnées cartésiennes $P(r\cos\omega t; r\sin\omega t; 0)$ où $\omega =$ cste et $r =$ cste. Dans un référentiel d'origine O muni des axes (O, x, y, z) avec $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$:

1. Calculer la vitesse de P
2. Caluler $(\vec{r} \wedge \vec{v})$, $(\vec{r} \cdot \vec{v})$, et représenter $\vec{r} \wedge \vec{v}$
3. Exprimer $\vec{r}$ et $\vec{v}$ en coordonnées cylindriques. Calculer $\vec{r} \wedge \vec{v}$ et $\vec{r} \cdot \vec{v}$ dans ce système de coordonnées
4. Soit $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$. Calculer $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$. Vérifier que $|\vec{r}| = cste$ et que $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

Exercice 4
Le TGV roule à une vitesse de 300 km/h. Quel est le rayon minimal de la voie permettant que les passagers ne soient pas soumis à une accélération centripète de plus de 0.05g ? (avec g= 9.81 m·s^{-2})

Exercice 5
Les coordonnées terrestres utilisent la latitude et la longitude. La latitude est un angle λ entre 0 et 90° mesuré depuis l'équateur soit vers le Nord soit vers le Sud (ce qui est précisé).

La longitude est un angle entre 0 et 180° mesuré depuis un méridien origine choisi pour traverser la ville de Greenwich au Royaume Uni, soit vers l'Est, soit vers l'Ouest.



Prenons 3 repères d'origine O, centre de la Terre :
– un repère cartésien tel que l'Equateur est dans le plan (O, x, y). L'axe (Oz) positif pointe vers le Nord et l'axe (Ox) traverse le méridien de Greenwich (côté x positifs).
– un repère de coordonnées cylindriques (lié au repère cartésien comme dans le cours)
– un repère de coordonnées sphériques (lié au repère cartésien comme dans le cours)
Donner les coordonnées des points suivants dans chacun de ces 3 systèmes (on appelle R_T le rayon de la Terre :

- Le pôle Nord
- Le pôle Sud
- A situé à l'Equateur, sur le méridien de Greenwich
- B situé à l'Equateur à 30° Est
- C situé sur le méridien de Greenwich à 60° Nord
- D situé sur le méridien de Greenwich à 45°S
- Quito situé sur l'équateur à 78° O
- Lausanne (46°N, 6.6°E)
- Montréal (45°N 75° O)

Réponses

Solution 1

a) $\vec{v} = 12t\vec{e}_y$ m·s^{-1} $\Leftrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12t \end{pmatrix}$ m·s^{-1}

b) $\vec{a} = 12\vec{e}_y$ m·s^{-2}

c) $\vec{r}(t = 1\text{s}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{v}(t = 1\text{s}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$

Solution 2

1. La vitesse peut être calculée en sachant que la Terre fait un tour sur elle-même en 24h :
$$v = R\omega = 2\pi R f = \frac{R \cdot 2\pi}{\mathrm{T}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6380000}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 463.97 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. Nous connaissons l'accélération centripète , donnée par :
$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2 = R\frac{4\pi^2}{\mathrm{T}^2}$$
Or dans notre cas :
$$R = 6380000 \text{ m}$$
Et :
$$v = 463.97 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$
Donc :
$$a_c = 6380000\frac{4\pi^2}{(24 \cdot 60 \cdot 60)^2} = 0.034 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

3. On cherche à avoir $a_n = g$:
$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2 = g \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$
quelques identités : $\quad T = \frac{1}{f} \quad \omega = 2\pi f \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$

et donc :
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{6380 \cdot 10^3}{9.81}} = 2\pi\sqrt{\frac{6.38}{9.81}} \cdot 10^3$$
Donc, $T \approx 5 \cdot 10^3$ s, soit 84 minutes.

4. Pour la vitesse de la Terre autour du Soleil, on procède de la manière similaire qu'au point 2, sachant que la vitesse de la lumière est $c = 300000$ km·s^{-1} :

$$8 \text{ minutes-lumières} = 8 \cdot 60 \cdot 3 \cdot 10^8 = 1.44 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Donc :

$$v = \frac{2\pi R}{\mathrm{T}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1.44 \cdot 10^{11}}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = 28690 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Solution 3

1. La vitesse de P se trouve en dérivant le vecteur vitesse $\vec{r}$ par rapport au temps, et donc chacune de ses composantes :

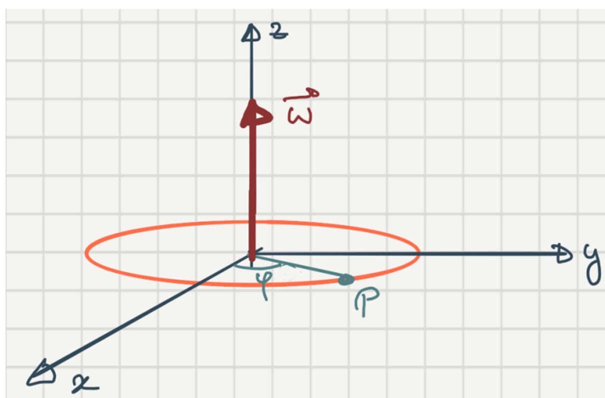
$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = r\omega(-\sin \omega t; \cos \omega t; 0) \tag{1}$$

2.

$$\vec{r} \wedge \vec{v} = r^2\omega(\cos{(\omega t)}^2 + \sin{(\omega t)}^2)\vec{e}_3 = r^2\omega\vec{e}_3 \tag{2}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = -r^2\omega \cos \omega t \sin \omega t + r^2\omega \sin \omega t \cos \omega t = 0 \tag{3}$$

On peut alors représenter $\vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{\omega}$ comme suit :



3. Le point P décrit un mouvement circulaire uniforme de rayon r à la vitesse angulaire ω. En passant aux coordonnées cylindriques on peut réécrire : $\vec{r} = r\vec{e}_\rho + 0\vec{e}_\varphi + 0\vec{e}_z = r\vec{e}_\rho$ et $\vec{v} = r\omega\vec{e}_\varphi$

On peut alors calculer :

$$\vec{r} \wedge \vec{v} = r^2\omega\vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\varphi = r^2\omega\vec{e}_z \tag{4}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = r^2\omega\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\varphi = 0 \tag{5}$$

Comme en coordonnées cartésiennes.

4. La norme de $\vec{r}$ est : $|\vec{r}| = \sqrt{r^2 + 0^2 + 0^2} = r = \text{cste}$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \omega \vec{e}_z \wedge r\vec{e}_\rho = r\omega \vec{e}_\varphi = \vec{v} = \dot{\vec{r}} \tag{6}$$

Solution 4

Nous connaissons l'accélération centripète (également appelée accélération normale), donnée par :

$$a_c = \frac{v^2}{R} \leq 0.05\text{g} \Rightarrow \frac{v^2}{0.05\text{g}} \leq R$$

Puisque $v = 300$ km/h $= 83.33$ m·s^{-1}, nous obtenons $R \geq 14200$ m.
Le rayon minimal de la voie du TGV doit être plus de 14km pour que ses passagers ne soient pas soumis à une accélération centripète supérieure à 0.05g !

Solution 5

	Cartésien	Cylindrique	Sphériques
pôle Nord	$x=0$; $y=0$; $z=R_T$	$\rho=0$ $z=R_T$	$r=R_T$; $\theta=0$
pôle Sud	$x=0$; $y=0$; $z=-R_T$	$\rho=0$ $z=-R_T$	$r=R_T$; $\theta=180°$
A	$x=R_T$; $y=0$; $z=0$	$\rho=R_T$; $\varphi=0$; $z=0$	$r=R_T$; $\theta=90°$; $\varphi=0$
B	$x=R_T\frac{\sqrt{3}}{2}$; $y=\frac{R_T}{2}$; $z=0$	$\rho=R_T$; $\varphi=30°$; $z=0$	$r=R_T$; $\theta=90°$; $\varphi=30°$
C	$x=\frac{R_T}{2}$ $y=0$; $z=R_T\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\rho=\frac{R_T}{2}$ $\varphi=0$; $z=R_T\frac{\sqrt{3}}{2}$	$r=R_T$; $\theta=30°$; $\varphi=0$
D	$x=\frac{\sqrt{2}}{2}R_T$ $y=0$; $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}R_T$	$\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}R_T$ $\varphi=0$; $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}R_T$	$r=R_T$; $\theta=135°$; $\varphi=0$
Quito	$x=0{,}2\,R_T$; $y=-0{,}98\,R_T$; $z=0$	$\rho=R_T$; $\varphi=282°$; $z=0$	$r=R_T$; $\theta=90°$; $\varphi=282°$
Lausanne	$x=0{,}7\,R_T$; $y=0{,}08\,R_T$; $z=\frac{\sqrt{2}}{2}R_T$	$\rho\simeq\frac{\sqrt{2}}{2}R_T$ $\varphi=6{,}6$; $z\simeq\frac{\sqrt{2}}{2}R_T$	$r=R_T$; $\theta=44°$; $\varphi=6{,}6°$
Montréal	$x=0{,}18\,R_T$; $y=-0{,}68\,R_T$; $z=\frac{\sqrt{2}}{2}R_T$	$\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}R_T$ $\varphi=285°$; $z=\frac{\sqrt{2}}{2}R_T$	$r=R_T$; $\theta=45°$; $\varphi=285°$