

Fiche méthode pour la résolution de problèmes de mécanique

October 1, 2024

Damien Ribière

Ce petit texte a pour vocation à résumer la méthode générale pour résoudre un problème de mécanique. Il est possible qu'il y ait des exceptions mais extrêmement souvent, il s'agit de la même démarche. Le processus de la mécanique classique consiste à exprimer la relation de cause à effet entre les forces externes qui s'appliquent sur un système physique et le mouvement que cela entraîne pour le système, ou dit autrement la 2ème loi de Newton. Toutes les résolutions de problèmes tournent autour du fait d'exprimer la 2ème loi de Newton dans un système de coordonnées qui simplifie l'écriture des équations, pour en déduire l'accélération du système puis intégrer en fonction du temps pour obtenir la trajectoire du système étudié. Ayant cet objectif en tête, on peut structurer la méthode en les points suivants:

1. Déterminer le système physique étudié

Souvent, l'énoncé de l'exercice est assez clair sur le système physique étudié: projectile, chariot, voiture, cylindre... Au fil du semestre, les systèmes seront modélisés comme des points matériels, puis des ensembles de points matériels, puis des solides. Pour quelques problèmes qui font intervenir plusieurs objets, il est utile de se poser la question de quel système on choisit pour y appliquer la 2ème loi de Newton. Pour obtenir assez d'équations pour résoudre le problème, il est possible qu'il faille appliquer la 2ème loi de Newton sur chacun des objets séparément mais également sur le système 'objet 1 + objet 2'.

2. Choix du référentiel et du système de coordonnées

La deuxième étape consiste à choisir le référentiel à partir duquel on va décrire le mouvement du système: référentiel du laboratoire, héliocentrique, géocentrique, référentiel accéléré... La plupart du temps, choisir un référentiel inertiel (non-acceléré) est plus simple car il n'y a pas les termes des forces d'inertie à rajouter dans la seconde loi de Newton. Il peut être nécessaire de passer par les référentiels accélérés si la consigne indique spécifiquement qu'il faut calculer des forces d'inertie comme la force centrifuge ou la force de Coriolis.

Une fois le référentiel fixé, il faut choisir le système de coordonnées dans lequel on a écrit les équations du mouvement: coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques, sphériques. Pour faire le choix adéquat et simplifier au maximum l'écriture des équations, il faut se poser la question de quelles sont les symétries du problème. Si la trajectoire est décrite comme se déplaçant sur la surface d'une sphère, il est évident que les coordonnées sphériques sont les plus appropriées. De même les coordonnées polaires pour les mouvements circulaires, les coordonnées cartésiennes pour des mouvements rectilignes, etc.

3. Écriture de l'accélération dans le système de coordonnées

Pour rappel, tout le but va être d'exprimer la seconde loi de Newton $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$. Il faut donc être capable d'exprimer les composantes de $\vec{a}$ dans le système de coordonnées choisi. Pour les coordonnées cartésiennes la formule est triviale: $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$. Pour les autres systèmes de coordonnées, il faut reprendre les formules un peu plus complexes démontrées en cours. Dans tous les cas, il est important d'appliquer les contraintes du problème pour simplifier les équations. Par exemple en coordonnées polaires, si le mouvement est circulaire on aura $\dot{\rho} = 0$, si il est en plus uniforme alors on aura $\ddot{\phi} = 0$; en coordonnées cartésiennes, si le mouvement est purement horizontal alors $\ddot{z} = 0$; etc.

4. Faire le bilan des forces externes agissant sur le système et les exprimer dans le système de coordonnées, à l'aide d'un schéma

Toujours dans l'optique d'écrire $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ pour résoudre le problème, l'étape suivante consiste à faire le bilan des forces extérieures agissant sur le système étudié: poids, réaction normale du support, forces de frottement, tension d'un fil, force d'un ressort... Il est important de souligner que dans l'expression de la 2ème loi de Newton, il s'agit des forces *extérieures* au système: les forces internes n'apparaissent pas, et savoir quelles forces sont externes ou internes dépend de quel système a été choisi au préalable. Pour écrire les différentes forces selon le système de coordonnées, réaliser un schéma est très utile afin d'effectuer les projections avec les angles. Par exemple pour le poids en coordonnées polaires, on peut avoir $\vec{P} = mg \cos(\phi)\vec{e}_\rho - mg \sin(\phi)\vec{e}_\phi$. Pour réaliser la projection, il faut imaginer que le vecteur représentant le poids est une somme de deux vecteurs orthogonaux, un purement dans la direction de $\vec{e}_\rho$ et l'autre purement dans la direction de $\vec{e}_\phi$, ce qui permet de dessiner clairement un triangle rectangle et calculer les projections avec les cosinus/sinus.

5. Écrire la deuxième loi de Newton et projeter sur les axes du système de coordonnées

Avec les deux étapes précédentes on a pu écrire les termes de gauche et de droite de la deuxième loi de Newton $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$. Comme on a les composantes selon le système de coordonnées choisi, on peut maintenant projeter l'équation vectorielle sur les axes et ainsi obtenir un système d'équations à résoudre! 'Projeter' signifie seulement écrire que les deux vecteurs $\sum \vec{F}_{ext}$ et $m\vec{a}$ sont égaux si et seulement si chacune de leur composante dans le système de coordonnées sont égales. Par exemple, dans les coordonnées sphériques, on aura une équation selon $\vec{e}_r$, une selon $\vec{e}_\theta$ et une selon $\vec{e}_\phi$.

5 bis. Pour la fin du semestre: écrire le théorème du moment cinétique dans le cas des solides

Dans le cas des solides, la 2ème loi de Newton ou 'théorème du centre d'inertie' $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$ permet de décrire le mouvement du centre de gravité G du solide, à savoir les translations du solide. Pour pouvoir étudier complètement le mouvement d'un solide, on exprime également les mouvements de rotation autour du centre de gravité. Cela est donné par le théorème du moment cinétique:

$$\sum \vec{M}_{O,ext} = \frac{d\vec{L}_O}{dt},$$

où $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ est l'expression pour le moment d'une force, intuitivement la capacité d'une force à faire tourner un objet; $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ est le moment cinétique, qui correspond à la 'quantité de rotation'. Comme pour la deuxième loi de Newton, la méthode consiste à exprimer $\sum \vec{M}_{O,ext}$ et $\vec{L}_O$ selon le système de coordonnées choisi, puis de projeter sur les axes. En général, pour calculer un produit vectoriel, le plus simple est d'utiliser la décomposition selon le système de coordonnées, ce qui fait qu'il ne faudra calculer directement que le produit vectoriel entre deux vecteurs de base, en utilisant la règle de la main droite. Par exemple pour le moment de force du poids en coordonnées polaires, on peut calculer:

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= \vec{r} \times \vec{P} = \rho \vec{e}_\rho \times (mg \cos(\phi)\vec{e}_\rho - mg \sin(\phi)\vec{e}_\phi) \\ &= \rho mg \cos(\phi) (\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\rho) - \rho mg \sin(\phi) (\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\phi) \\ &= -\rho mg \sin(\phi) \vec{e}_z\end{aligned}\tag{1}$$

6. Résoudre le système d'équations/intégrer en fonction du temps pour obtenir la trajectoire de l'objet

Maintenant que le système d'équations a été écrit, il reste à regarder dans la consigne de l'énoncé ce que l'on cherche et résoudre! Si il faut trouver l'expression d'une force par exemple, il faut regarder si on a autant d'équations que d'inconnues. S'il y a plus d'inconnues que d'équations, on peut chercher à exprimer une équation supplémentaire étant donné les informations du problème. Souvent, il peut

s'agir de la conservation d'une quantité comme l'énergie mécanique totale (pour un système isolé) ou du moment cinétique (mouvement à force centrale); cela peut également être la condition de roulement sans glissement dans le cas des solides; ou encore le lien entre les accélérations des corps attachés de part et d'autre d'une poulie. Le but est en tout cas toujours de trouver autant d'équations que d'inconnues afin de pouvoir résoudre le problème.

Si l'énoncé demande de trouver l'équation horaire de la trajectoire, il faudra partir de l'expression de l'accélération trouvée à partir de la 2ème loi de Newton puis intégrer les composantes en fonction du temps pour trouver la vitesse, puis intégrer encore une fois pour avoir les équations de la trajectoire. C'est exactement ce que l'on fait dans les problèmes les plus simples de balistique où $\vec{a} = \vec{g}$, et on déduit que $v_x(t) = v_0 \cos(\alpha)$ et $v_y(t) = -gt + v_0 \sin(\alpha)$, puis que $x(t) = v_0 \cos(\alpha)t + x_0$ et $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t + y_0$.

Une petite indication supplémentaire

Ceci est donc la méthode générale pour résoudre un problème de mécanique. Il est à noter que dans le cas de problèmes où on compare en particulier l'état du système entre un point A et un point B sans s'intéresser à toute la trajectoire entre ces deux points, il est souvent indiqué d'utiliser directement les théorèmes de l'énergie cinétique $W_{tot} = \Delta E_c$ ou de l'énergie mécanique $W_{tot,NC} = \Delta E_m$. Ces théorèmes découlent directement de la 2ème loi de Newton donc il n'y a rien de mystérieux, mais il s'agit d'un cas où on ne résout pas tout le détail de la dynamique et où on s'intéresse uniquement à l'évolution du système entre un point A et un point B . La méthode de résolution sera donc différente de celle exposée précédemment et on exprimera plutôt les travaux des forces, les énergies cinétique et potentielles, et non pas l'accélération dans $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$.

Exemple illustratif: pendule

Pour illustrer la méthode, considérons le cas d'un pendule simple: une masse m est attachée à un fil inextensible de longueur l . Le but est d'écrire l'équation horaire du mouvement pour des petits angles ϕ . Un schéma est illustré sur la figure **Fig. 1**:

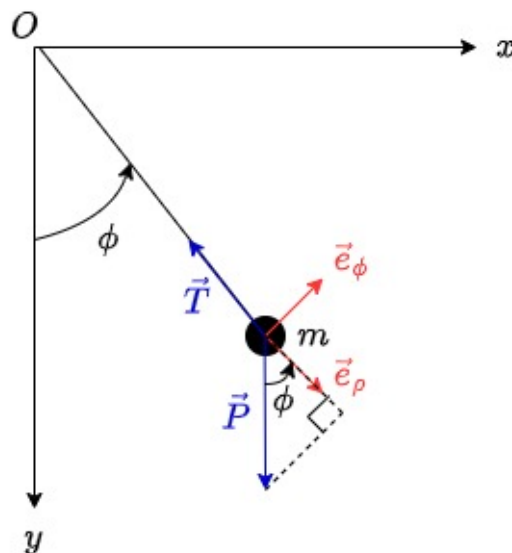


Figure 1: Schéma d'un pendule

Reprenons les étapes de la méthode dans l'ordre:

1. Le système physique ici étudié est la masse m , modélisée comme un point matériel.
2. Le référentiel choisi est celui du laboratoire. Pour le système de coordonnées, on peut remarquer que la masse va effectuer sa trajectoire le long d'un cercle de rayon $l = \text{constante}$, ce qui donne l'indice que les coordonnées polaires (ρ, ϕ) avec O comme origine sont celles qui vont simplifier le plus l'écriture des équations.
3. En coordonnées polaires (ρ, ϕ) , le vecteur position de la masse m est $\vec{r} = l\vec{e}_\rho$. En utilisant la contrainte $l = \text{constante} = \rho$, on a $\dot{\rho} = 0$ et $\ddot{\rho} = 0$. Donc le vecteur vitesse est $\vec{v} = l\dot{\phi}\vec{e}_\phi$ et le vecteur accélération est $\vec{a} = -l\dot{\phi}^2\vec{e}_\rho + l\ddot{\phi}\vec{e}_\phi$.
4. Les forces extérieures qui s'exercent sur le pendule sont la tension du fil $\vec{T}$ et le poids $\vec{P}$ (si on néglige les frottements de l'air). Projetées dans le système de coordonnées, elles s'expriment par $\vec{T} = -T\vec{e}_\rho$ et $\vec{P} = mg \cos(\phi)\vec{e}_\rho - mg \sin(\phi)\vec{e}_\phi$.
5. La seconde loi de Newton donne $\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$. Projetée sur les axes en égalisant les composantes une à une, cela donne:

$$\begin{aligned} \text{Selon } \vec{e}_\rho: \quad & -T + mg \cos(\phi) = -ml\dot{\phi}^2 \\ \text{Selon } \vec{e}_\phi: \quad & -mg \sin(\phi) = ml\ddot{\phi} \end{aligned} \tag{2}$$

6. Étant les équations obtenues, la résolution va dépendre de ce qui est demandé dans l'énoncé. Si on est intéressé dans l'équation horaire du mouvement, on cherche l'expression de l'angle ϕ en fonction du temps. On peut utiliser l'équation différentielle selon $\vec{e}_\phi$ qui ne dépend pas de T que l'on ne connaît pas a priori. On a alors:

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin(\phi) = 0 ,$$

qui est une équation différentielle non-linéaire à cause du terme en $\sin(\phi)$ et ne possède pas de solution analytique générale. Néanmoins on peut linéariser l'équation dans le cas des petits angles ϕ , en utilisant le développement limité $\sin(\phi) \approx \phi$ pour $\phi \ll 1$, ce qui donne $\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0$. Cette équation différentielle a exactement la même forme que celle des oscillations libres d'un ressort. La solution peut s'écrire:

$$\phi(t) = A \sin(w_0 t + B) ,$$

où A et B sont des constantes qui dépendent des amplitudes et phase initiales et $w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ est appelé la pulsation propre du pendule. Dans l'approximation des petits angles, le pendule suit donc des oscillations de période $T = \frac{2\pi}{w_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.