II. Référentiel accélérés

Prof. Cécile Hébert

1er septembre 2022

Plan du cours

Table des matières

1. Introduction et notation

Soient un référentiel $\mathcal{R}$ fixe, muni du repère cartésien $\left(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\right)$

un référentiel $\mathcal{R}'$ muni du repère cartésien $\left(A, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\right)$ en mouvement dans $\mathcal{R}$.

On notera $\vec{e}_{x_i}$ respectivement $\vec{e}_{y_i}$ les vecteurs unitaires de ces deux repères.

Dans $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{OP} = \sum_i x_i \vec{e}_{x_i}$ $\quad \vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \sum_i \dot{x}_i \vec{e}_{x_i}$ $\quad \vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \sum_i \ddot{x}_i \vec{e}_{x_i}$

Dans $\mathcal{R}'$: $\overrightarrow{AP} = \sum_i y_i \vec{e}_{y_i}$ $\quad \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) = \sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i}$ $\quad \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = \sum_i \ddot{y}_i \vec{e}_{y_i}$

On peut séparer le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ en deux composantes : une rotation et une translation.

La translation donne le mouvement de A dans $\mathcal{R}$ et la rotation la rotation des axes (y_j) par rapport aux axes (x_i). On appelle $\vec{\omega}$ le vecteur rotation.

Les vecteurs $\vec{e}_{y_i}$ changent dans $\mathcal{R}$. On obtient leur dérivée par :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{y_j} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_{y_j}$$

2. Position, vitesse et accélération

Résumé :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

3. Analyse et cas particuliers

Cas particulier 1 : $\mathcal{R}'$ a un mouvement de translation uniforme dans $\mathcal{R}$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

Cas particulier 1 : $\mathcal{R}'$ a un mouvement de translation uniforme dans $\mathcal{R}$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)$$

Cas particulier 2 :

$\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$ et P fixe dans $\mathcal{R}'$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

Cas particulier 2 :

$\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$ et P fixe dans $\mathcal{R}'$
P a donc un mouvement circulaire uniforme dans $\mathcal{R}$.

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})$$

Cas particulier 3 : $\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

Cas particulier 3 : $\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

Nomenclature dans le cas général

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$