I - Cinématique

Prof. Cécile Hébert

28 septembre 2021

Plan du cours

I - Cinématique
II - Référentiel accélérés
III - Lois de Newton
IV - Balistique – effet d'une force constante et uniforme
V - Bilan des forces ; application des lois de Newton
VI - Travail, Energie, principes de conservation
VII - Chocs, systèmes de masse variable
VIII - Oscillateur harmonique
IX - Moment cinétique ; Gravitation
X - Solide indéformable
XI - Application du solide indéformable

Table des matières

1 - Référentiel ; Repère
2 - Trajectoire, vitesse, accélération
3 - Coordonnées cartésiennes
4 - Coordonnées polaires
5 - Coordonnées curviligne
6 - Coordonnées cylindriques
7 - Coordonnées sphériques
8 - Mouvement circulaire en coordonnées cylindriques

Cinématique = *description des mouvements*. Nous aurons besoins de références pour décrire mathématiquement les mouvements.

Référentiel : système de référence par rapport auquel on mesure le mouvement

Origine du référentiel : un point particulier *fixe* dans le référentiel par rapport auquel on définira la position d'un objet.

Repère : systèmes de vecteurs unitaires formant un trièdre orthonormé direct, par exemple $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ qui sert à décomposer mathématiquement le mouvement. *Attention !!* le repère n'est pas forcément fixe dans le référentiel, et dans un même référentiel, on peut utiliser plusieurs repères.

Coordonnées : Ensemble des grandeurs qui permettent de repérer la position d'un point. Exemple : coordonnées cartésiennes ; coordonnées GPS...

I - 2 Trajectoire, vitesse, accélération

Pour l'instant, l'objet étudié est considéré comme un *point matériel P*.

But : Décrire le mouvement de cet objet. Plus tard, prédire sa position.

Nous utiliserons pour ce faire sa position, sa vitesse et son accélération, mais aussi sa trajectoire.

La trajectoire est l'ensemble des points de l'espace par les quels passe cet objet (point) au cours du temps.

La position se mesure par rapport à l'origine fixe du référentiel (généralement O. On repère ce point par un *vecteur position* $\vec{r}(t) = \vec{OP}$.

Vitesse instantanée

Accélération instantanée

Résumé :

$$\text{position : } \vec{r}(t) = \vec{OP}$$

$$\text{vitesse : } \vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}$$

$$\text{accélération : } \vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

La vitesse *scalaire* est la norme du vecteur vitesse, $v = |\vec{v}|$

L'accélération *scalaire* est la norme du vecteur accélération $a = |\vec{a}|$

Pour pouvoir continuer, il faut maintenant faire le choix du système de coordonnées. Pour chaque système de coordonnées, un repère permet d’obtenir les composantes des vecteurs. Nous utiliserons uniquement des systèmes de coordonnées qui sont liés à un repère orthonormé direct.

Dans le cours (et dans la suite des études) :

– coordonnées cartésiennes

– coordonnées polaires

– coordonnées curvilignes (repère de Frenet)

– coordonnées cylindriques

– coordonnées sphériques

3 - Coordonnées cartésiennes

Résumé

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

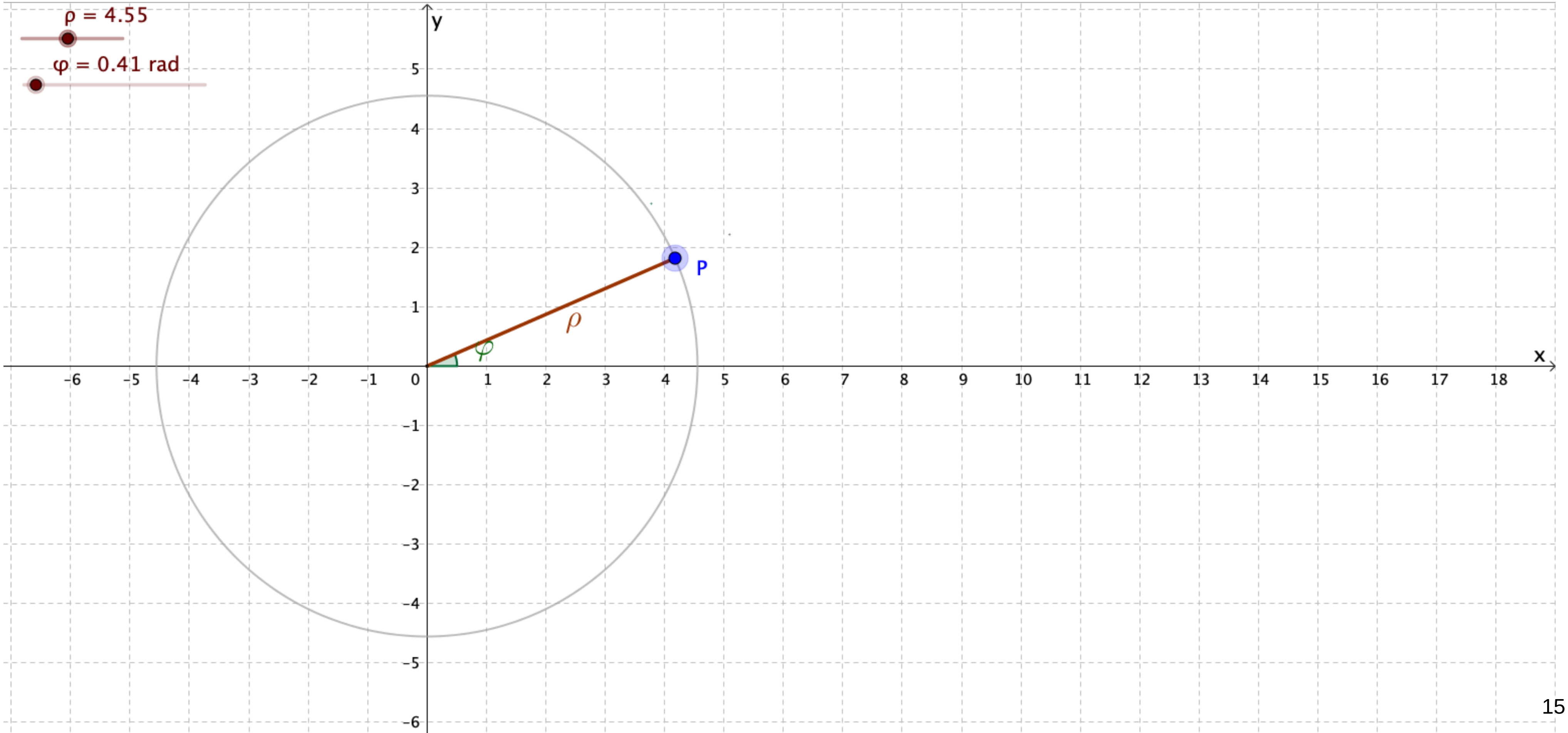
$$\vec{r} \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right. \qquad \vec{v} \left| \begin{array}{l} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{array} \right. \qquad \vec{a} \left| \begin{array}{l} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{array} \right.$$

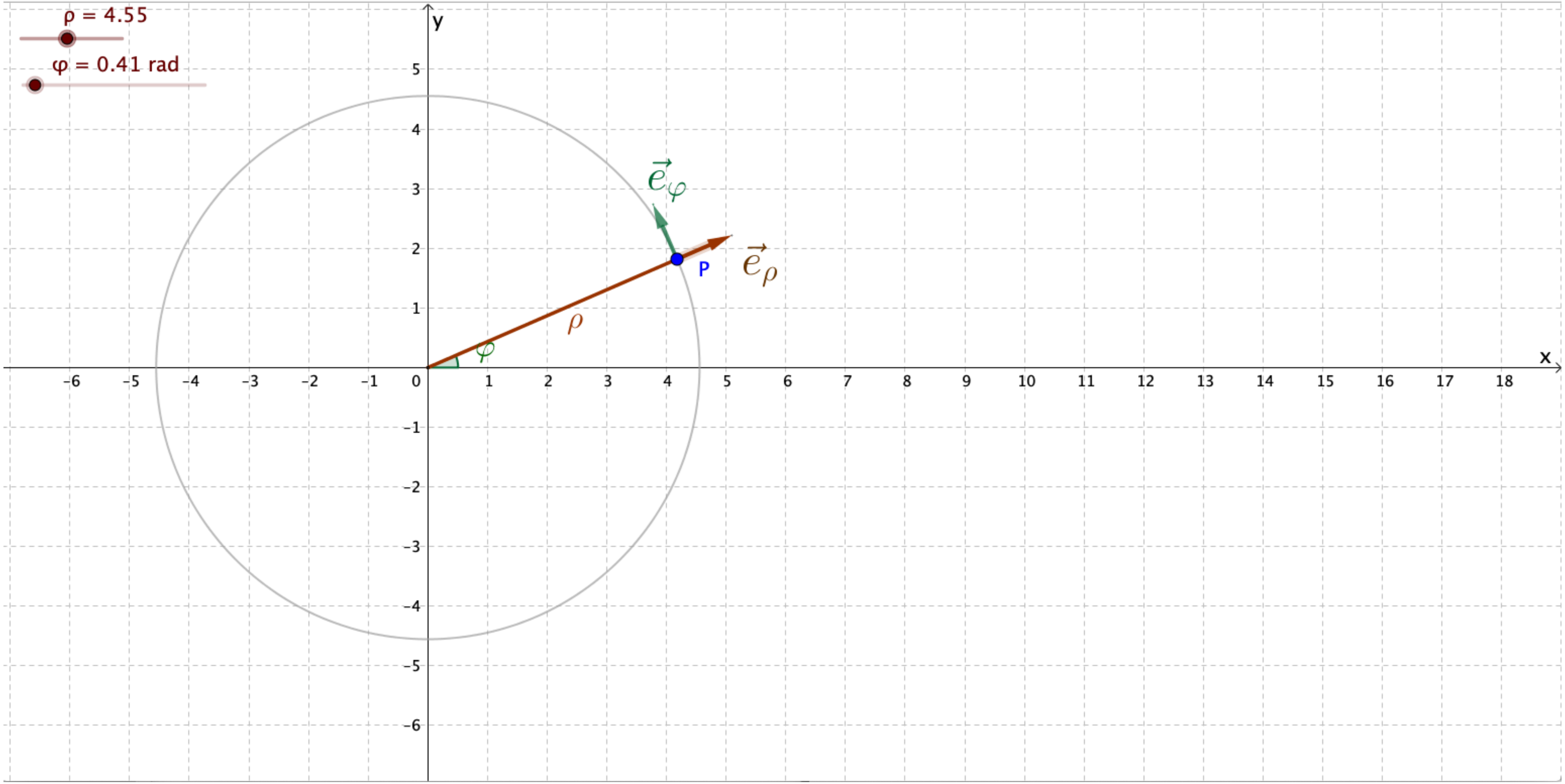
$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

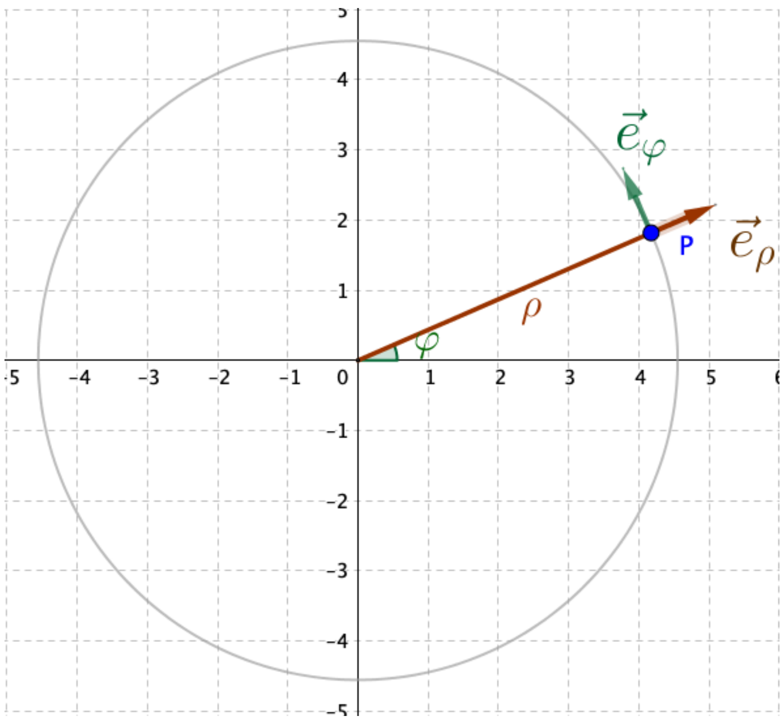
$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

4 - Coordonnées polaires




ρ = 4.55
φ = 0.41 rad
y
x
$\vec{e}_\varphi$
$\vec{e}_\rho$
P
ρ
φ
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18



$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y$$

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho$$

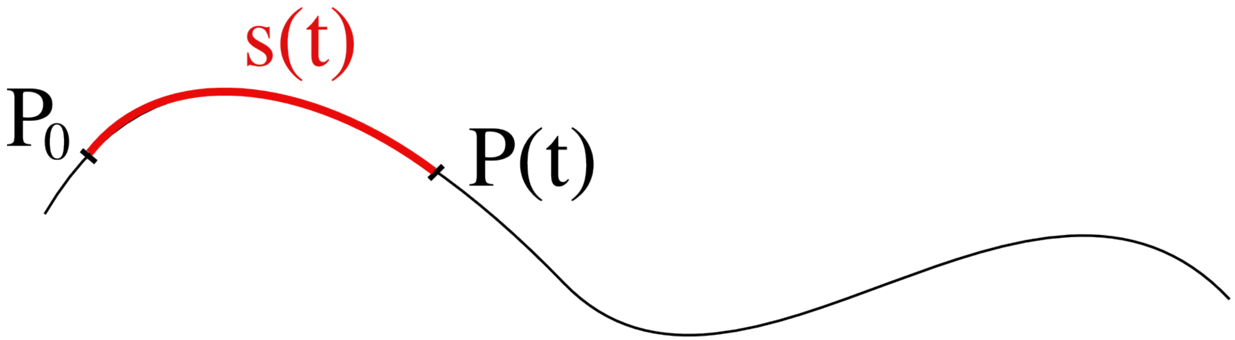
$$\begin{aligned} \vec{r} &= \rho\vec{e}_\rho \\ \vec{v} &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\ \vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Exemple : mouvement circulaire uniforme

5 - Coordonnées curviligne (repère de Frenet)

Cas général

Point de vue de l’automobiliste (point matériel) sur une route de plaine (trajectoire).


s(t)
P_0
P(t)

$s(t)$ mesure la *longueur* parcourue le long de la trajectoire

la vitesse *scalaire* est

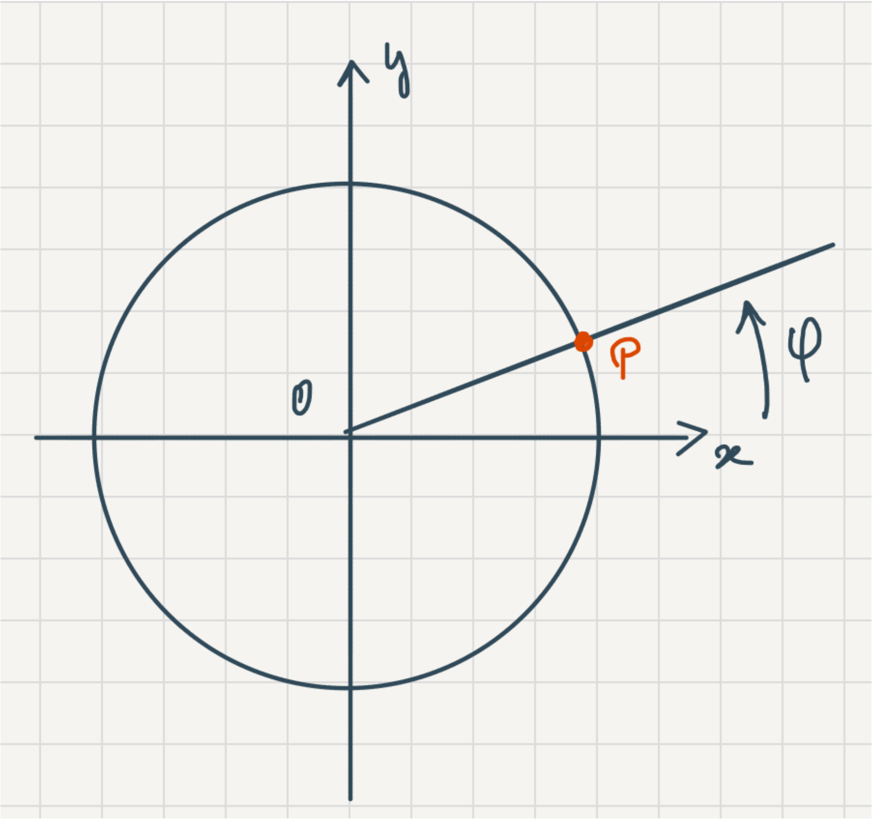
$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

la vitesse *vectorielle* est

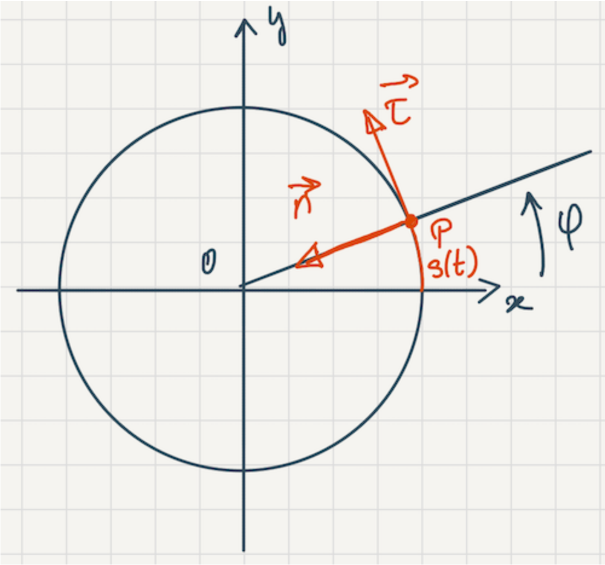
$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau}$$

avec $\vec{\tau}$ vecteur *unitaire tangent à la trajectoire pointant dans la direction du mouvement* au point considéré.

Cas d’un mouvement circulaire quelconque, trajectoire de rayon R



$\vec{\tau}$ tangent à la trajectoire dans le sens du mouvement et $\vec{n}$ pointant vers le centre du cercle, tous deux unitaires.



$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

$$v(t) = R\dot{\varphi}(t) = R\omega$$

$\dot{\varphi} = \omega(t)$ *vitesse angulaire* en rad·s^{-1} $\dot{\omega} = \alpha(t)$ *accélération angulaire* en rad·s^{-2}.

Mouvement circulaire uniforme

Vitesse scalaire constante ; vitesse angulaire constante

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau} \qquad \vec{a}(t) = \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{v}{R} = \mathrm{cte}$$

Mouvement circulaire uniforme

Vitesse scalaire constante ; vitesse angulaire constante

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau} \qquad \vec{a}(t) = \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{v}{R} = \mathrm{cte}$$

ω *pulsation*. $\omega = 2\pi f$ avec f *fréquence* (en tours/s)

Cas général

Soit le cercle osculateur à la trajectoire au point considéré. Il a un rayon ρ.
Soient $\vec{\tau}$ tangent à la trajectoire dans le sens du mouvement et $\vec{n}$ pointant vers le centre du cercle osculateur, tous deux unitaires.

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

La composante selon $\vec{\tau}$ est l'accélération tangentielle $\vec{a}_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$.

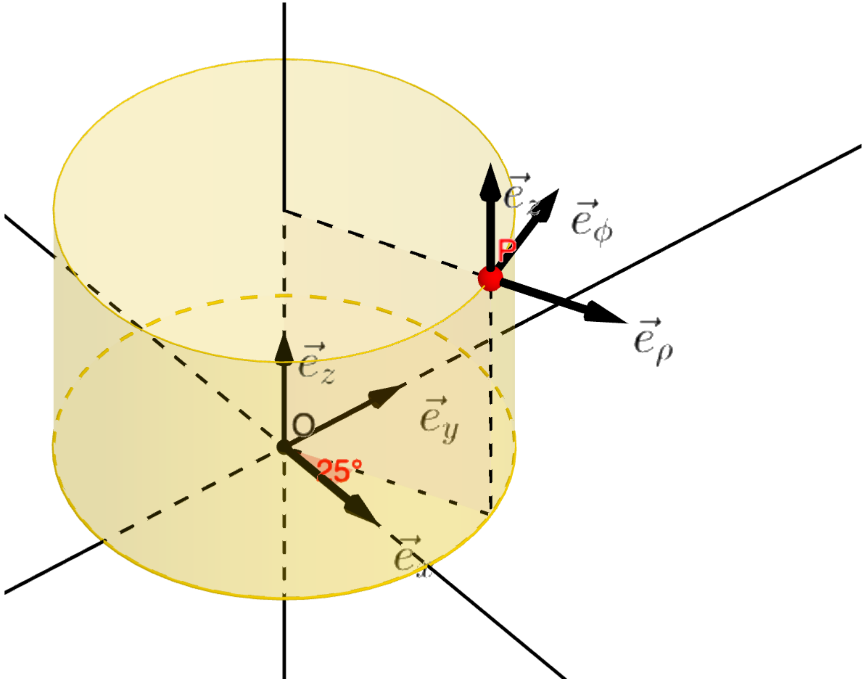
La composante selon $\vec{n}$ est l'accélération normale ou centripète $\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$.

L'accélération tangentielle provoque une variation de la vitesse scalaire ; l'accélération normale provoque une variation de la *direction* de la vitesse.

6 - Coordonnées cylindriques

Adaptées pour certains mouvements ou certaines symétries.

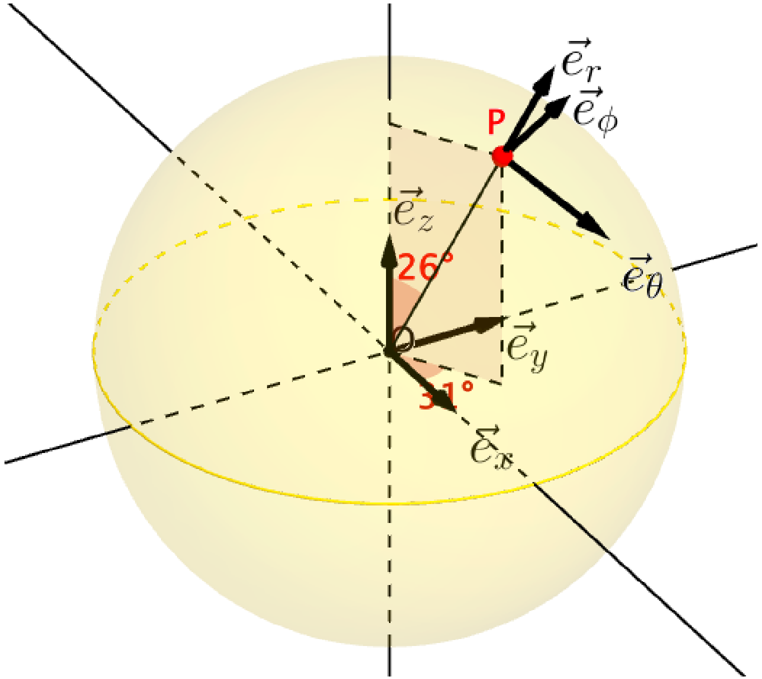
Coordonnées polaires pour (x, y) + axe z.

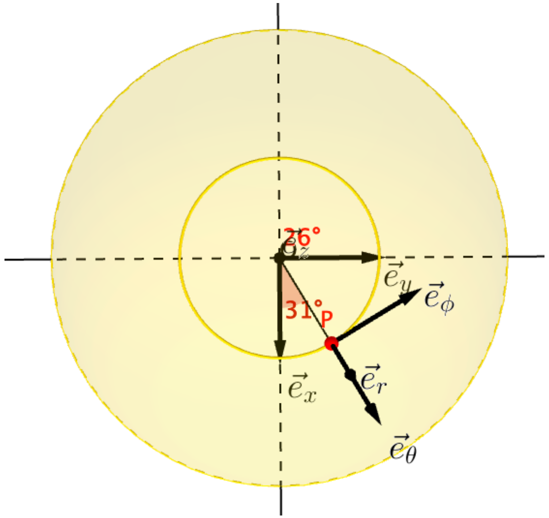


$\vec{e}_z$
$\vec{e}_\phi$
P
$\vec{e}_\rho$
$\vec{e}_z$
O
$\vec{e}_y$
25°
$\vec{e}_x$

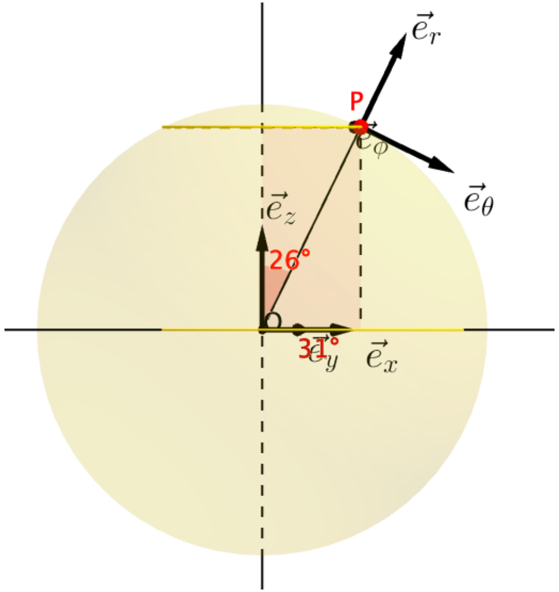
$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= \rho\vec{e_\rho} + z\vec{e_z} \\
\vec{v} &= \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} + \dot{z}\vec{e_z} \\
\vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e_\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e_\varphi} + \ddot{z}\vec{e_z}
\end{aligned}
$$

7 Coordonnées sphériques

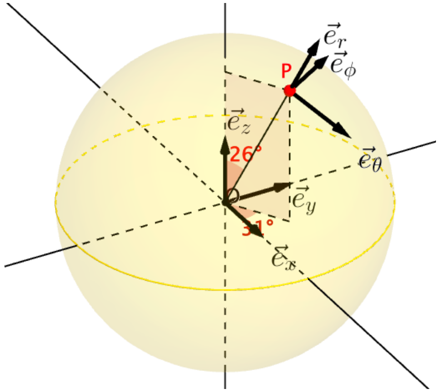




26°
$\vec{e}_z$
$\vec{e}_y$
$\vec{e}_\phi$
31°
P
$\vec{e}_x$
$\vec{e}_r$
$\vec{e}_\theta$



$\vec{e}_r$
P
$\vec{e}_\phi$
$\vec{e}_\theta$
$\vec{e}_z$
26°
O
31°
$\vec{e}_y$
$\vec{e}_x$



Cartesien $\rightarrow$ sphérique :

$$\vec{e}_r \left| \begin{array}{l} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{array} \right. \qquad \vec{e}_\theta \left| \begin{array}{l} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{array} \right. \qquad \vec{e}_\varphi \left| \begin{array}{l} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi \qquad \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\vec{e}_\varphi \qquad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\vec{e}_\theta$$

Position, vitesse, accélération :

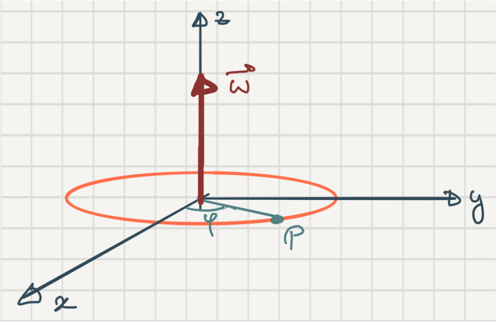
$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

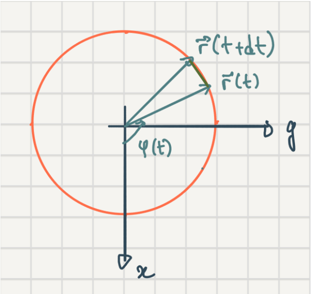
$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned}
a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \\
a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta \\
a_\varphi &= r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta
\end{aligned}$$

8 Mouvement circulaire en coordonnées cylindriques – vecteur rotation

On considère un point P ayant un mouvement circulaire dans le plan (O,x,y) à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\varphi}$.





Soit $\vec{\omega}$ le vecteur de norme ω, perpendiculaire au plan contenant le cercle décrit par P et de sens donné par la règle du tire-bouchon.

$\vec{\omega}$ est appelé vecteur rotation

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$\vec{u}$ de *norme constante* subissant une rotation donnée par $\vec{\omega}$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$$