VIII - Oscillateur harmonique

Prof. Cécile Hébert

12 novembre 2021

Plan du cours

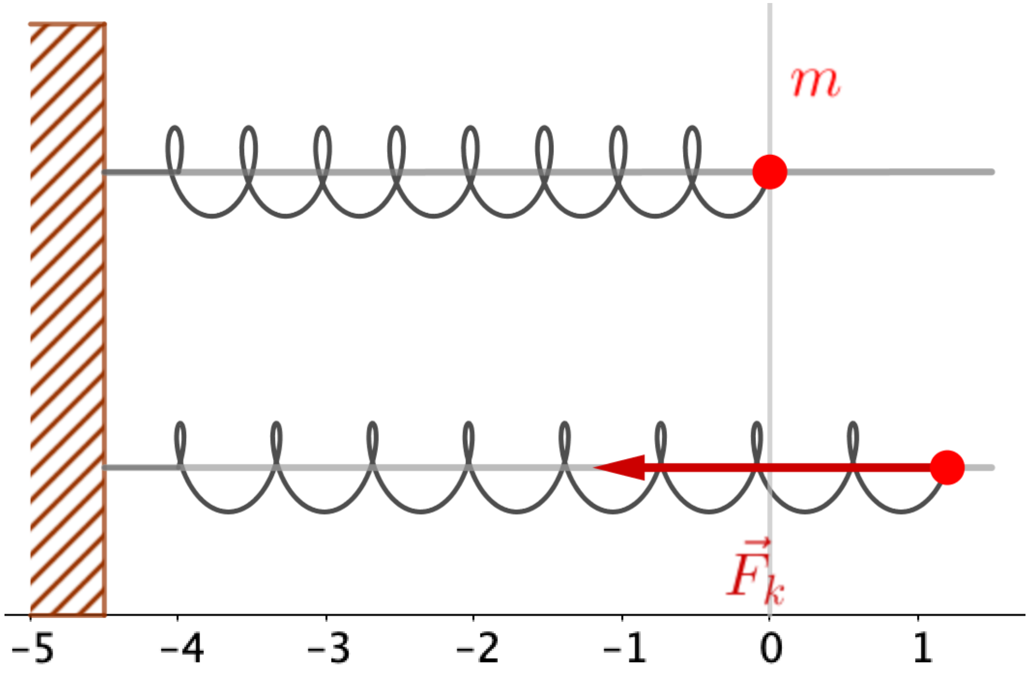
I - Cinématique
II - Référentiel accélérés
III - Lois de Newton
IV - Balistique – effet d'une force constante et uniforme
V - Forces ; application des lois de Newton
VI - Travail, Energie, principes de conservation
VII - Chocs, systèmes de masse variable
VIII - Oscillateur harmonique
IX - Moment cinétique ; Gravitation
X - Solide indéformable
XI - Application du solide indéformable

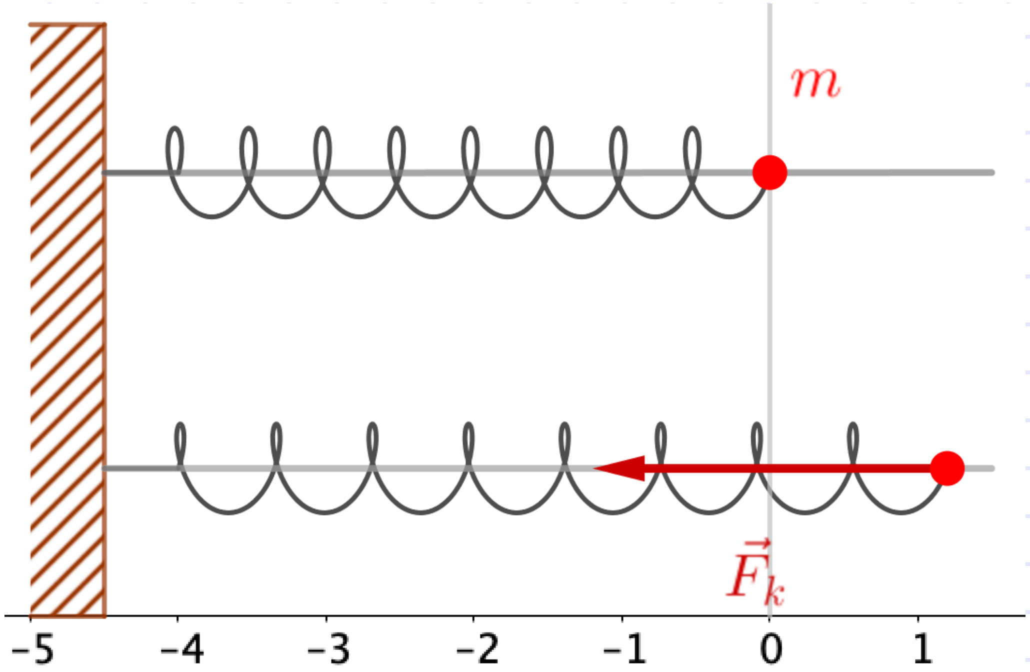
Table des matières

1. Oscillations libres non amorties
2. Oscillateurs non amortis et énergie
3. Oscillations amorties
4. Oscillations forcées

1. Oscillations libres non amorties

Une masse m glisse sans frottements sur un axe horizontal. Elle est retenue par un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0 fixé à son autre extrémité.
On tire la masse vers la droite et à $t = 0$ on la lâche sans vitesse initiale.



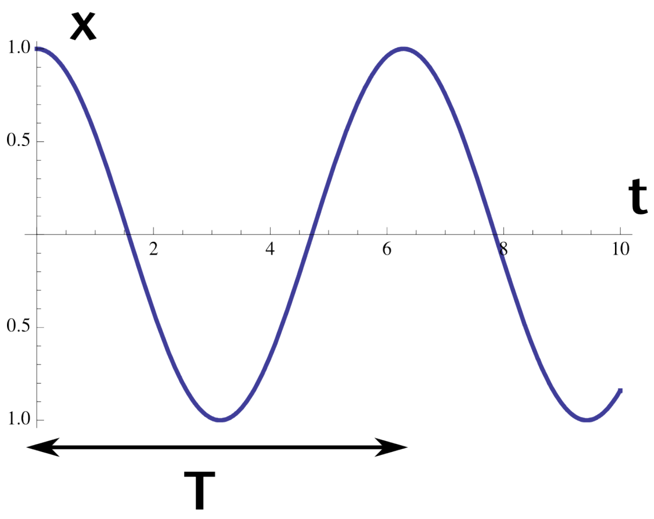

m
$\vec{F}_k$
−5
−4
−3
−2
−1
0
1

Equation différentielles de type $\ddot{x}(t) + \Omega_0^2\, x(t) = 0$

Avec les conditions initiales

$$x(t=0) = x_0 \qquad \dot{x}(t=0) = 0$$

Position en fonction du temps



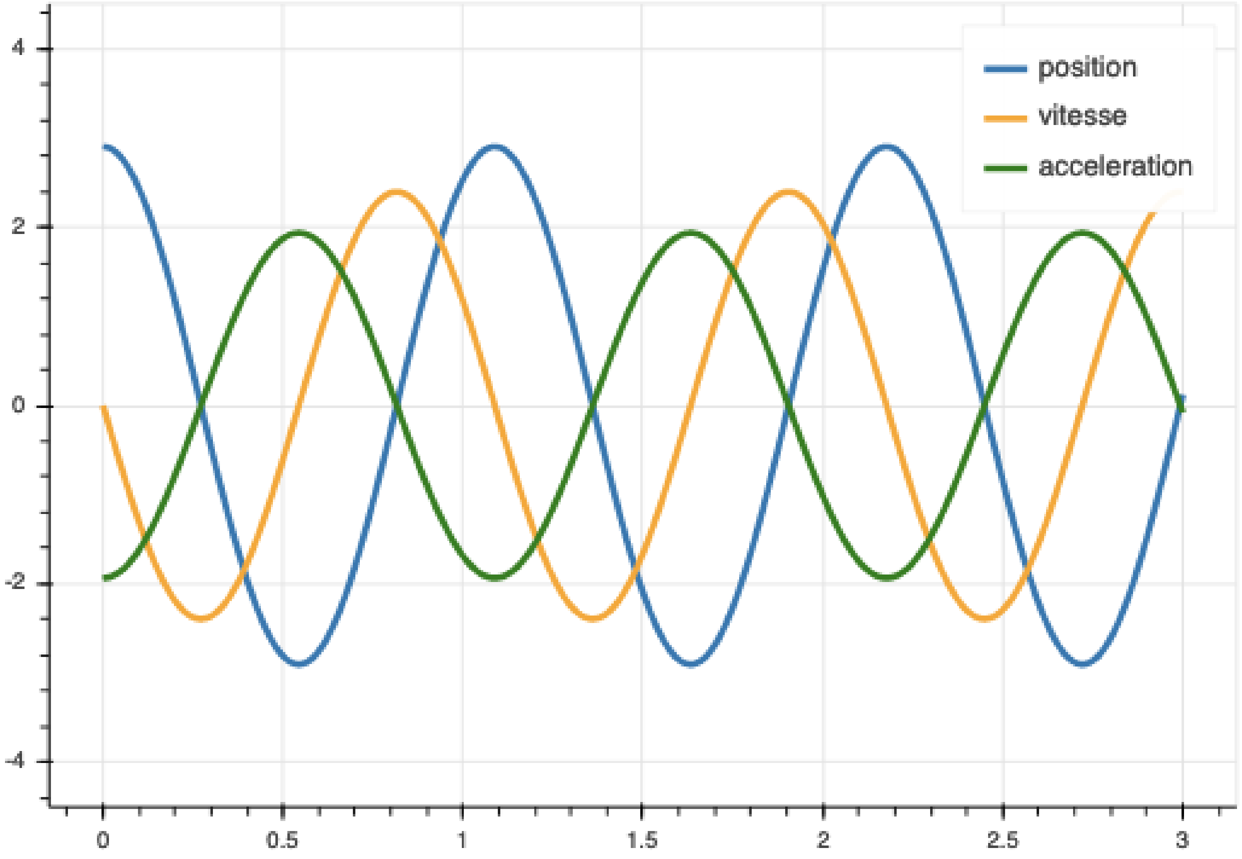
T période des oscillations

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

T indépendant de x_0. Oscillateur harmonique.

Allure des courbes $x(t)$, $v(t)$, et $a(t)$.

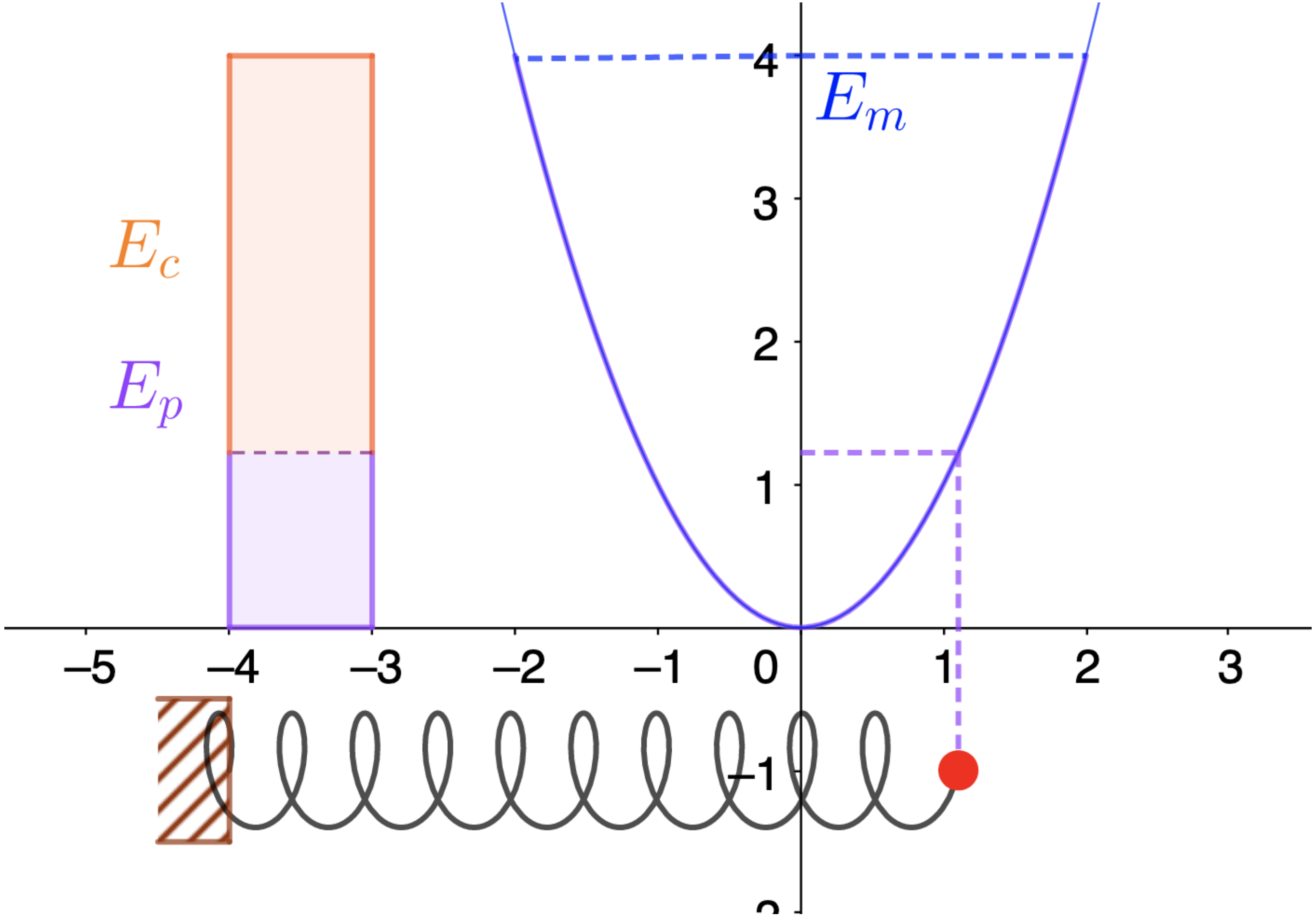
Allure des courbes $x(t)$, $v(t)$, et $a(t)$.



Autre exemple d’oscillateur : le pendule simple

2. Oscillateurs non amortis et énergie

Cas de l’oscillateur harmonique avec un ressort



E_m
E_c
E_p
4
3
2
1
−1
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3

Oscillateur quelconque

Cas à 1 dimension, pour une force qui dérive d'un potentiel :

$$F = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$$

$$m\ddot{x} = -\frac{dE_p}{dx}$$

C'est une autre moyen d'obtenir l'équation différentielle.

Pour avoir des oscillations, il faut être autour d'un *minimum* de E_p

Oscillateurs harmoniques

Pour que l'oscillateur soit harmonique, il faut et il suffit que

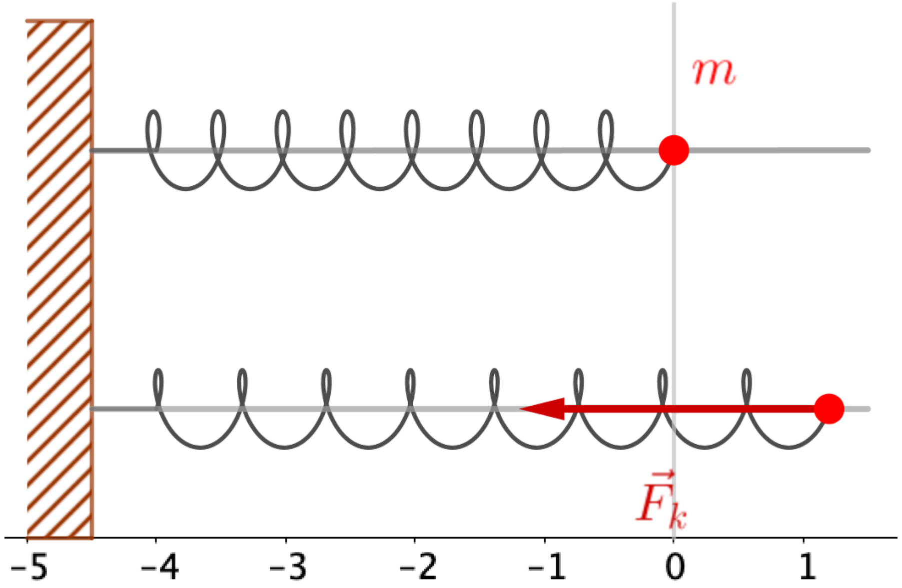
$$E_p = A(x - x_0)^2 + E_{p,0}$$

avec A constante positive.

Exemple : pendule simple

3. Oscillations amorties

On considère l'oscillateur du VIII - 1 mais cette fois il subit un frottement visqueux en régime laminaire.



Force de frottement visqueux

$$\vec{F}_f = -b_l \vec{v}$$

avec $\vec{v}$ vitesse.

On cherche $x(t)$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_f + \vec{F}_k$$

$$\ddot{x} + \frac{b_l}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad 2\gamma = \frac{b_l}{m} = \frac{K\eta}{m}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0$$

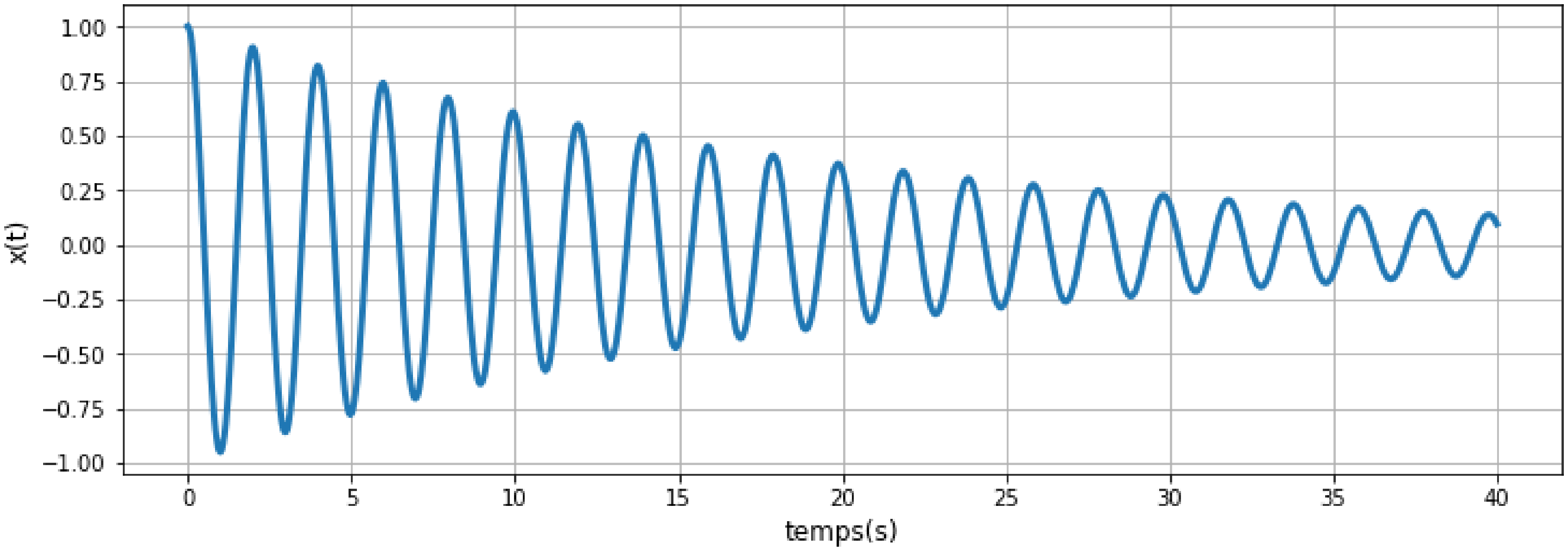
Méthode générale de résolution d'une telle équation :

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0$$

Si $\gamma < \Omega_0$ les solutions sont du type

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)$$

Avec A et φ les constantes d'intégration et $\omega^2 = \Omega_0^2 - \gamma^2$

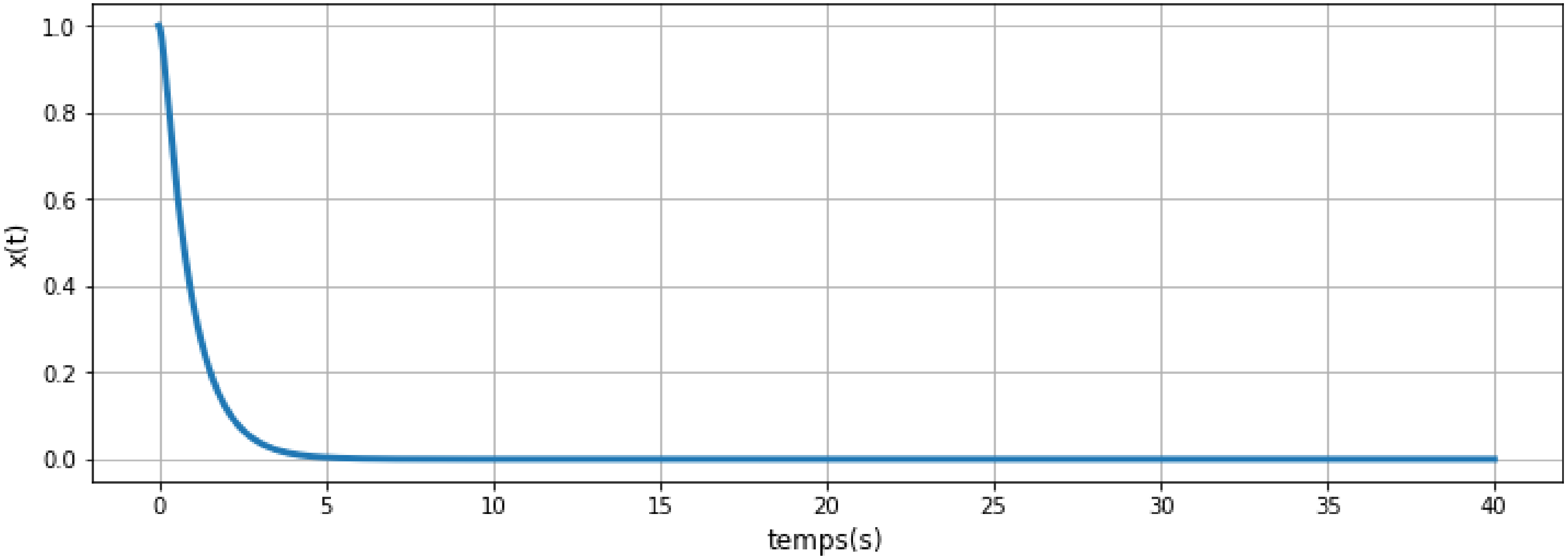


Si $\gamma > \Omega_0$ les solutions sont du type

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

avec λ_1 et λ_2 racines de l'équation du second degré en λ

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega_0^2 = 0$$

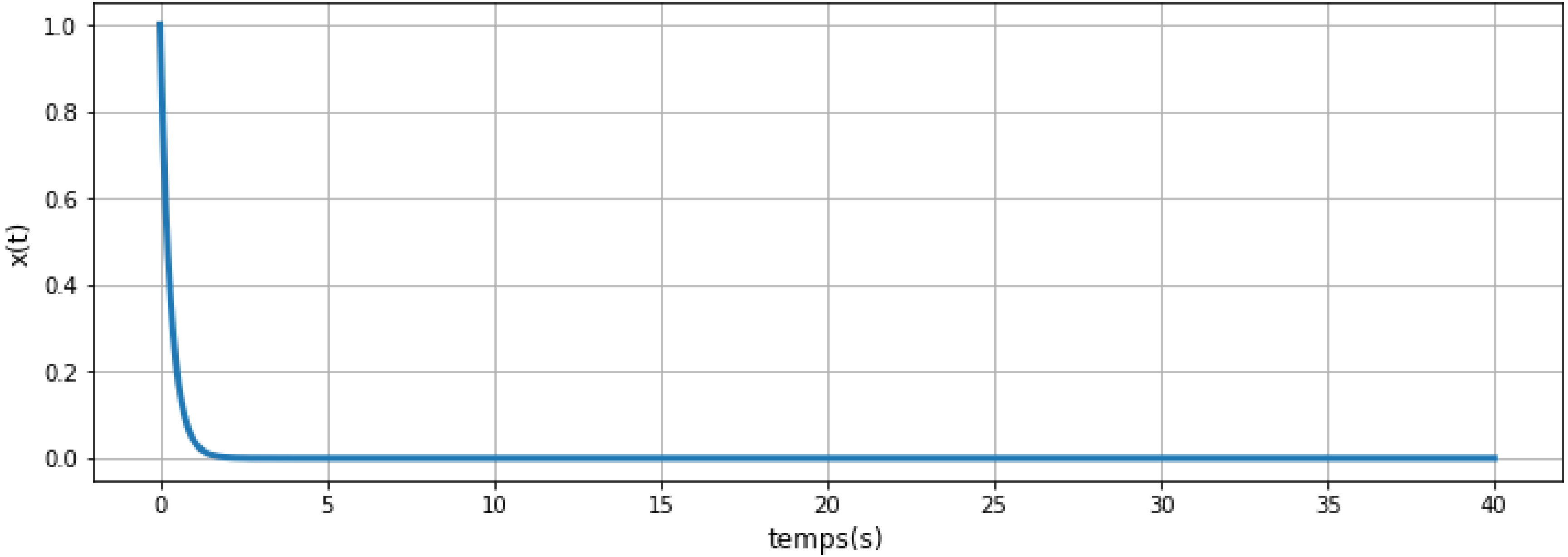


Si $\gamma = \Omega_0$ les solutions sont du type

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}$$

On remarque que $-\gamma$ est racine double de l'équation du second degré en λ

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \gamma^2 = 0$$

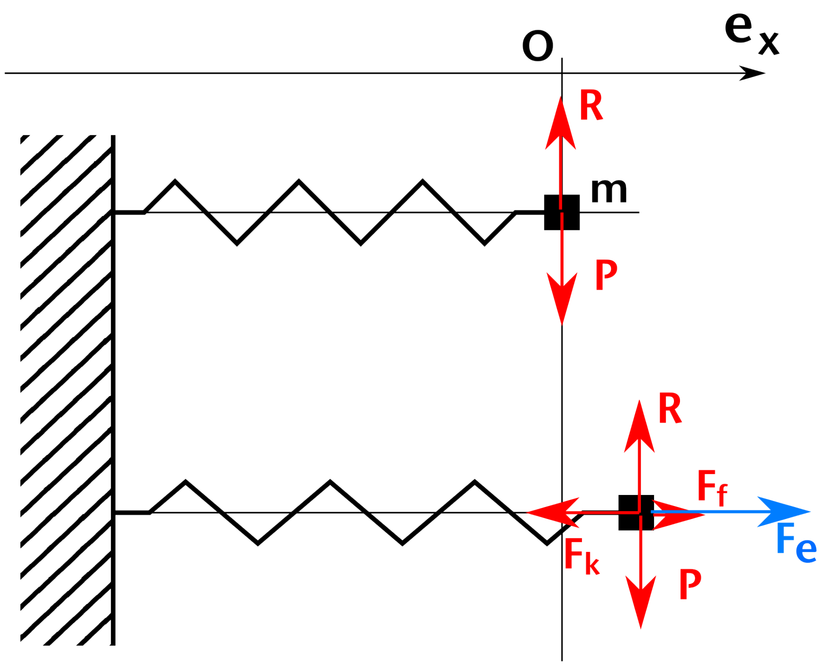


.

4. Oscillations forcées

On applique au système une force qui a une forme sinusoïdale :

$$F_e = F_0 \cos(\omega_e t)$$



C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 **avec second membre**. Ce second membre est une fonction du temps.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f(t)$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 **avec second membre**. Ce second membre est une fonction du temps.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f(t)$$

La méthode est de chercher :

1 – La solution **générale** de l'équation sans 2d membre (donc avec les constantes d'intégration. $x_2(t)$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 **avec second membre**. Ce second membre est une fonction du temps.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f(t)$$

La méthode est de chercher :

1 – La solution **générale** de l'équation sans 2d membre (donc avec les constantes d'intégration. $x_2(t)$

2 – **Une** solution particulière de l'équation avec 2d membre (donc une fonction qui "marche"). $x_1(t)$

C’est une équation différentielle linéaire d’ordre 2 **avec second membre**. Ce second membre est une fonction du temps.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f(t)$$

La méthode est de chercher :

1 – La solution **générale** de l’équation sans 2d membre (donc avec les constantes d’intégration. $x_2(t)$

2 – **Une** solution particulière de l’équation avec 2d membre (donc une fonction qui "marche"). $x_1(t)$

La solution **générale** de l’équation **avec** second membre est :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Nous allons donc supposer que cette solution particulière $x_1(t)$ est :

$$x_1(t) = A(\omega_e) \cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$$

Solution de $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega_e t)$ avec $f_0 = F_0/m$

Nous allons donc supposer que cette solution particulière $x_1(t)$ est :

$$x_1(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$$

Solution de $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega_e t)$ avec $f_0 = F_0/m$

Passons en notation complexe

$$ae^{i\theta} = a\cos\theta + ia\sin\theta$$

Nous allons donc supposer que cette solution particulière $x_1(t)$ est :

$$x_1(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$$

Solution de $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega_e t)$ avec $f_0 = F_0/m$

Passons en notation complexe

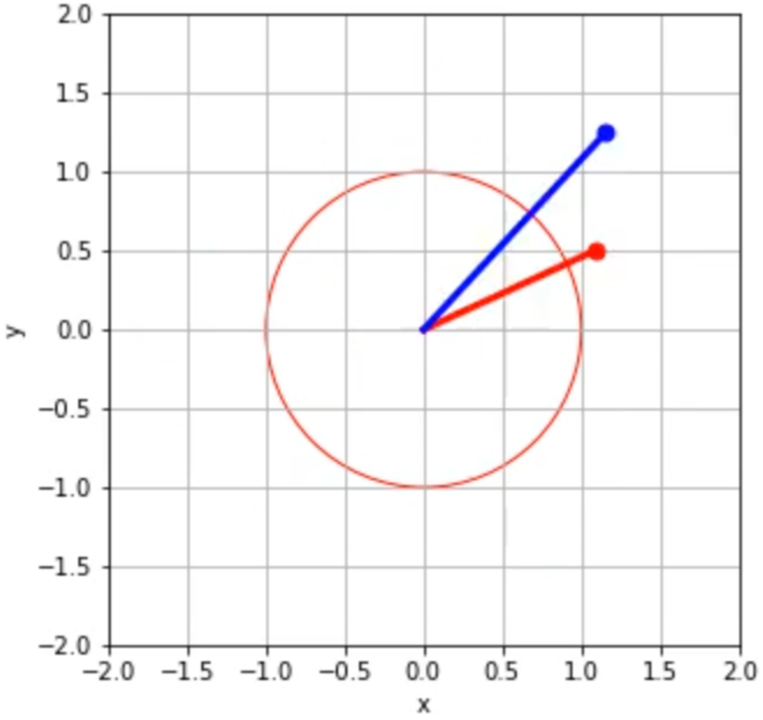
$$ae^{i\theta} = a\cos\theta + ia\sin\theta$$

L'équation différentielle en complexes devient :

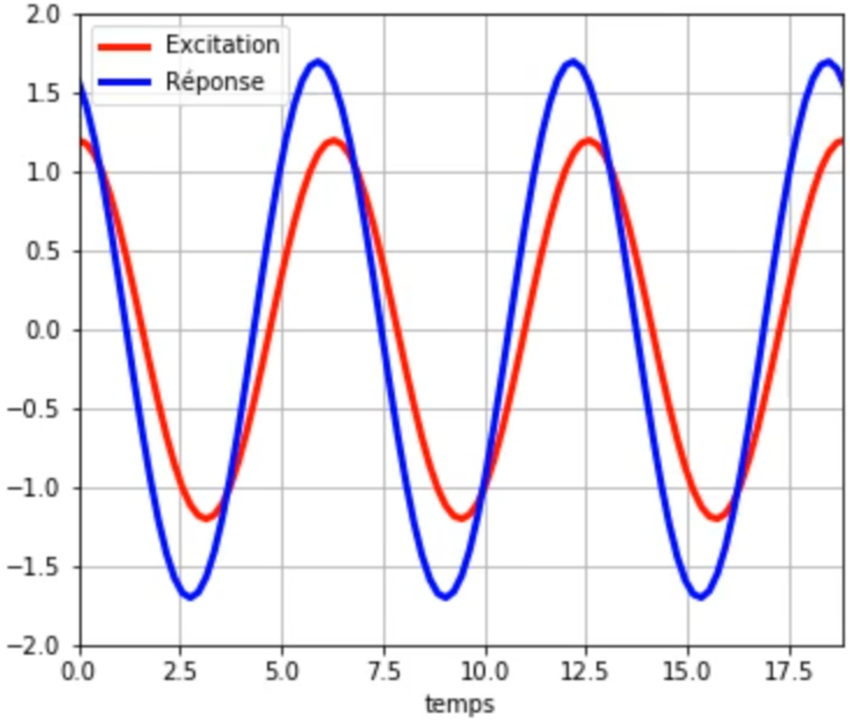
$$\underline{\ddot{x}} + 2\gamma\underline{\dot{x}} + \Omega_0^2\underline{x} = f_0\, e^{i\omega_e t}$$

En complexes :

$$\underline{x}_1(t) = A(\omega_e)e^{i(\omega_e t + \varphi)}$$



y
x
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0



Excitation
Réponse
temps
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5

$\underline{x}_1(t) = A(\omega_e)e^{i(\omega_e t+\varphi)}$ solution de : $\ddot{\underline{x}} + 2\gamma\dot{\underline{x}} + \Omega_0^2\underline{x} = f_0\, e^{i\omega_e t}$? ?

4. Oscillations forcées

4. Oscillations forcées

Au final, de retour dans le monde réel :

$x_1(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$ est bien une solution particulière, avec

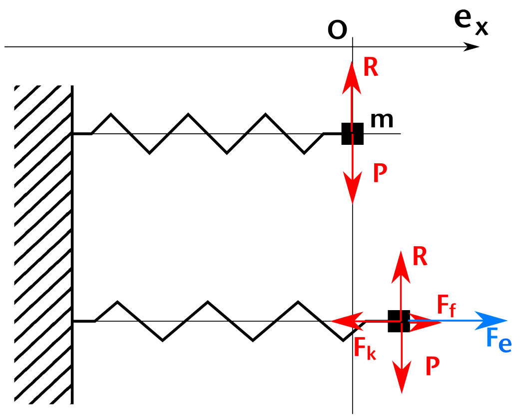
$$A(\omega_e) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{(\Omega_0^2 - \omega_e^2)}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} \quad \sin\varphi = \frac{-2\gamma\omega_e}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}}$$

$$\tan\phi = \frac{2\gamma\omega_2}{\omega_e^2 - \Omega_0^2} \quad \text{avec,} \quad \varphi \in [-\pi, 0]$$

Résumé :

On applique au système de masse *m* une force qui a une forme sinusoïdale :



$$F_e = F_0 \cos(\omega_e t)$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = (F_0/m)\cos(\omega_e t)$$

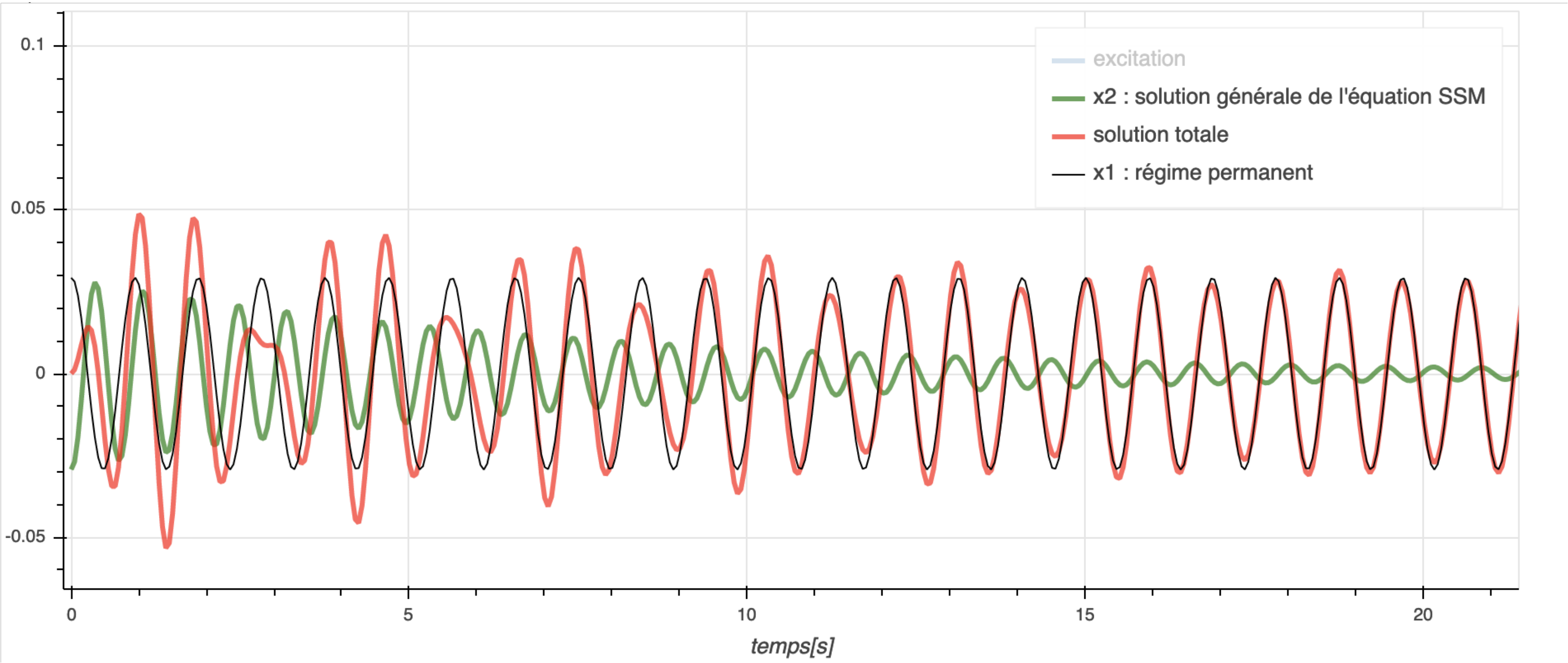
La solution générale est la somme de x_1 et x_2

x_2 solution de $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0$ tend vers 0

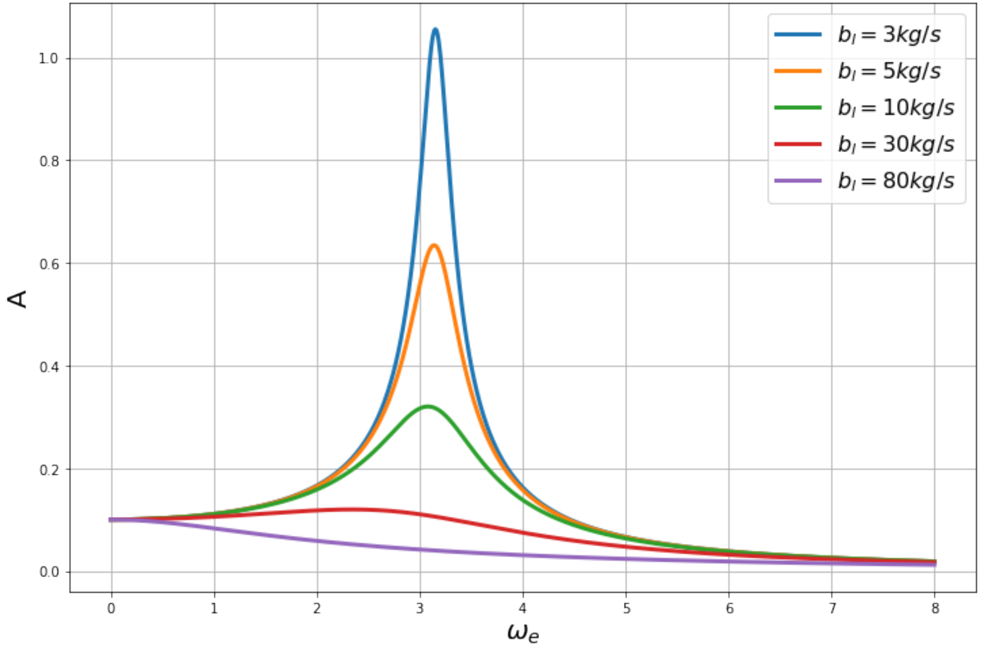
en régime permanent il reste $x_1(t) = A\cos(\omega_e t + \varphi)$

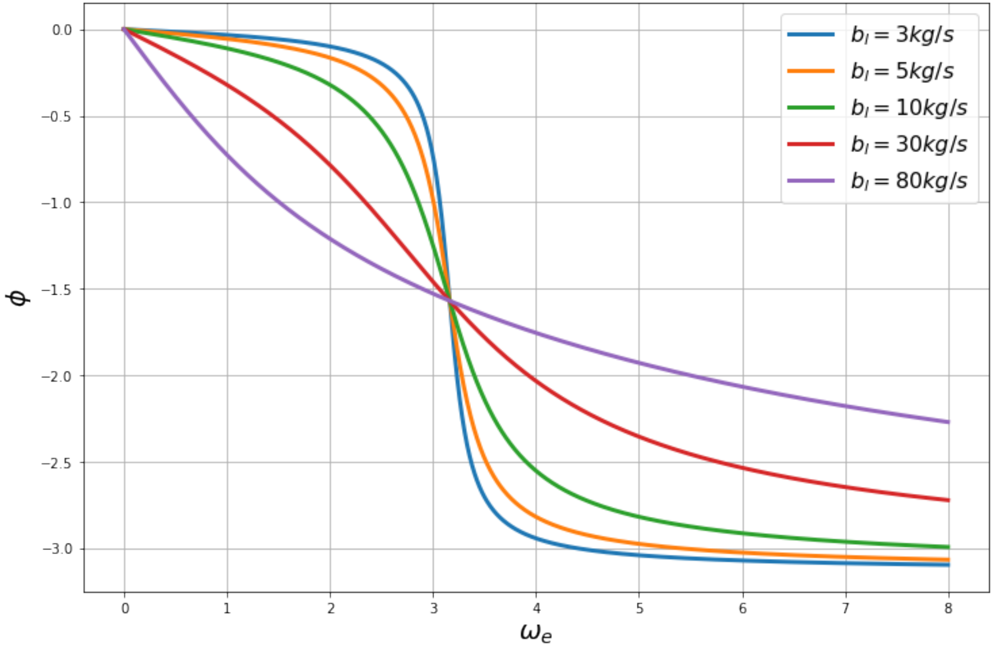
$$A(\omega_e) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} \qquad \tan(\varphi) = \frac{2\gamma\omega_e}{\omega_e^2 - \Omega_0^2} \qquad \varphi \in [-\pi, 0]$$

Etablissement du régime permanent



Analyse du régime permanent $x_1(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$





Amplitude et déphasage en fontion de ω_e pour différents frottements.

Analyse de la fonction $A(\omega_e)$

$$A(\omega_e) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}}$$

$$A(\omega_e) = A_{\max} \quad \text{pour} \quad \omega_{\text{res}} = \sqrt{\Omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

Si $\gamma^2 > \Omega_0^2/2$ il n'y a pas de résonance.

Résumé sur les pulsations :

Ω_0 est la pulsation propre du système, soit la pulsation des oscillation si il n'y a ni amortissement ni forçage.

$\omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}$ est la pseudo-pulsation du système avec amortissement, mais non forcé, quand l'amortissement est sous-critique.

ω_e est la pulsation d'excitation : une pulsation *imposée* par l'utilisateur dans le cas d'un osclliateur forcé.

$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\Omega_0^2 - 2\gamma^2}$ est la pulsation de résonnance : une valeur particulière de ω_e pour laquelle la réponse du système a une amplitude maximale en régime permanent.

Période = $2\pi/$pulsation et fréquence = 1/période

Facteur de qualité

On définit le *facteur de qualité*

$$Q = \frac{\Omega_0}{2\gamma}$$

Une analyse dimensionnelle montre que Q est sans dimension.

$$A(\omega_e) = \frac{A(0)Q}{\sqrt{Q^2\left(\frac{\omega_e^2}{\Omega_0^2} - 1\right)^2 + \frac{\omega_e^2}{\Omega_0^2}}}$$

Amplitude maximale A_{max}

$$A_{\text{max}} = A(\omega_{\text{res}}) = \frac{A(0)Q^2}{\sqrt{Q^2 - 1/4}}$$

Si $Q \gg 1$, $A_{\text{max}} \simeq A(0)Q$

Plus Q est grand plus A_{max} est grand.

Q donne directement une mesure de la "qualité" de la résonance.