XI - Application du solide indéformable

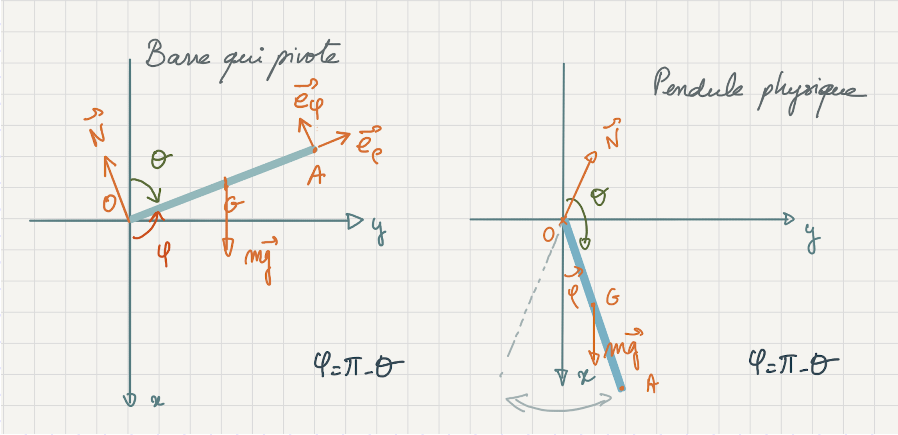
Prof. Cécile Hébert

10 juin 2022

Plan du cours

Table des matières

Barre homogène de masse m et de longueur l pivotant autour de 0, point fixe.



θ : entre 0 et 2π

φ : entre $-\pi$ et π

$\varphi = \pi - \theta$

φ : angle des coord. cylindriques

$\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$ coord cylindriques

Mouvement : avec θ — avec φ

Forces : réaction du pivot $\vec{N}$ et poids $m\vec{g}$

Pivot : O un point fixe du référentiel ; (Oz) axe principal d'inertie

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \cancel{\vec{OO} \wedge \vec{N}} + \vec{OG} \wedge m\vec{g} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OG} \wedge m\vec{g} \qquad \vec{L}_O = I_{Oz}\vec{\omega}$$

with $\vec{OO} = \vec{0}$.

$$\vec{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{\ell m g}{2} \sin(\pi - \theta)(-\vec{e}_z) = -\frac{\ell m g}{2} \sin\theta\, \vec{e}_z$$

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_z$$

$$I_{Oz} = I_{Gz} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m\ell^2 + \frac{1}{4} m\ell^2$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{1}{3} m\ell^2(-\ddot{\theta})\vec{e}_z = -\frac{m\ell g}{2}\sin\theta\, \vec{e}_z$$

$$\ddot{\theta} - \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

$$\vec{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{\ell}{2} m g \sin\varphi (-\vec{e}_z) = -\frac{\ell m g}{2} \sin\varphi\, \vec{e}_z$$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \ ; \ \varphi = \pi - \theta \Rightarrow \dot{\varphi} = -\dot{\theta}$$

$$= I_{Oz} = \frac{1}{3} m\ell^2$$

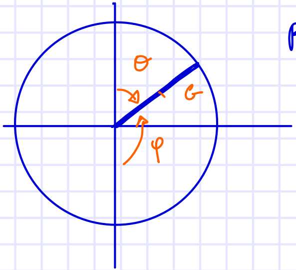
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{1}{3} m\ell^2 \ddot{\varphi}\,\vec{e}_z = -\frac{m\ell g}{2}\sin\varphi\, \vec{e}_z$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0$$

$$\ddot{\theta} - \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \qquad\qquad \ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0$$

Ici : petites oscillations autour de $\theta = \pi$

$\sin\theta$ au voisinage de π



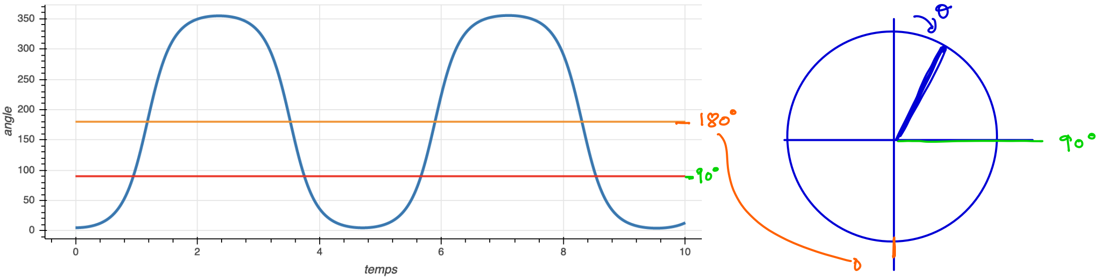
pendule pesant : si $\varphi \ll 1$

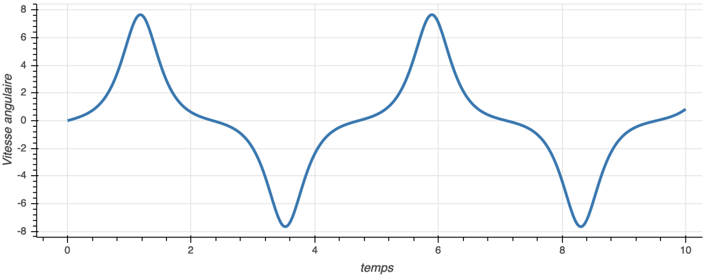
$\sin\varphi \simeq \varphi$

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}}_{\Omega_0^2}\varphi = 0 \qquad \ddot{\varphi} + \Omega_0^2\varphi = 0$$

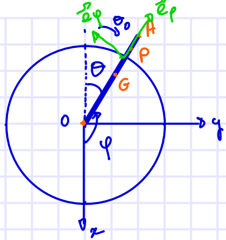
oscillateur harmonique
pulsation propre est Ω_0

Résolution numérique


350
300
250
200
150
100
50
0
angle
0
2
4
6
8
10
temps
180°
90°
θ
90°
0


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
Vitesse angulaire
0
2
4
6
8
10
temps

Analyse du vecteur accélération



Lâche la barre à $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot\theta(0) = 0$

P un point de la barre décrit un mouvement circulaire non uniforme.

But = analyser l'accélération de P

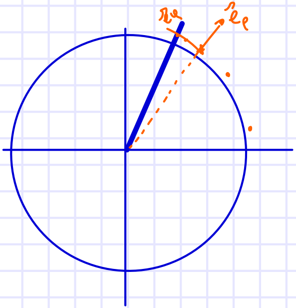
$\ddot\theta - \frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\theta = 0$ $\varphi = \pi - \theta$ $\dot\varphi = -\dot\theta$ $\ddot\varphi = -\ddot\theta$

P à la distance d de O

$\vec{a}_P = -\rho\dot\varphi^2\vec{e}_\rho + \rho\ddot\varphi\,\vec{e}_\varphi$ $\rho = d$

$\vec{a}_P = -d\,\dot\theta^2\vec{e}_\rho - d\,\ddot\theta\,\vec{e}_\varphi = -d\,\dot\theta^2\vec{e}_\rho - d\,\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$

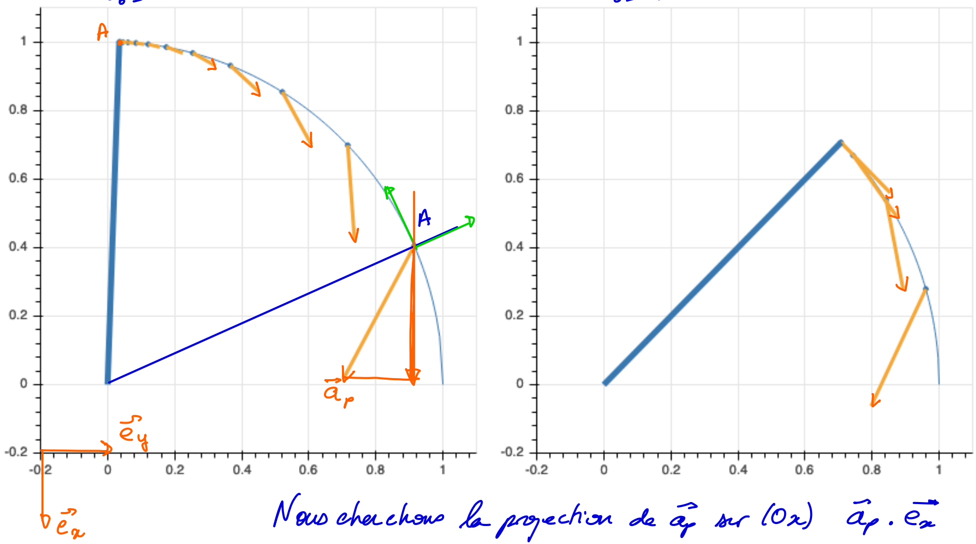
tableau de t $\vec{a}_P(t) = -d\left[\dot\theta(t)\right]^2\vec{e}_\rho - d\,\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\sin\theta(t)\,\vec{e}_\varphi$



- choix de θ_0
- calculer $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$
- choix d'un intervalle de temps Δt
- pour chaque position de P $\rightarrow \vec{a}_P$

$$\vec{a}_P = -d\,\dot{\theta}(t)^2\,\vec{e}_\rho + \left(-d\,\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi$$

$\theta_0 = 2°$ $\theta_0 = 45°$

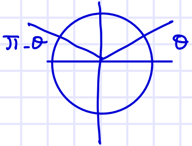


Nous cherchons la projection de $\vec{a}_p$ sur (Ox) $\vec{a}_p \cdot \vec{e}_x$

$$\vec{a}_\rho \cdot \vec{e}_x = \left[-d\,\dot{\theta}^2\,\vec{e}_\rho - d\,\frac{3}{2}\,\frac{g}{\ell}\sin\theta\;\vec{e}_\varphi \right] \cdot \vec{e}_x$$

$$= -d\,\dot{\theta}^2\,\vec{e}_\rho\,\vec{e}_x - d\,\frac{3}{2}\,\frac{g}{\ell}\sin\theta\;\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_x$$

$\varphi = \pi - \theta$

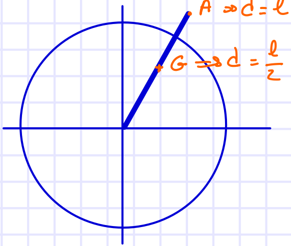


$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_x = \left(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\right)\cdot\vec{e}_x = \cos\varphi = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

$$\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_x = \left(-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y\right)\cdot\vec{e}_x = -\sin\varphi = -\sin(\pi - \theta) = -\sin\theta$$

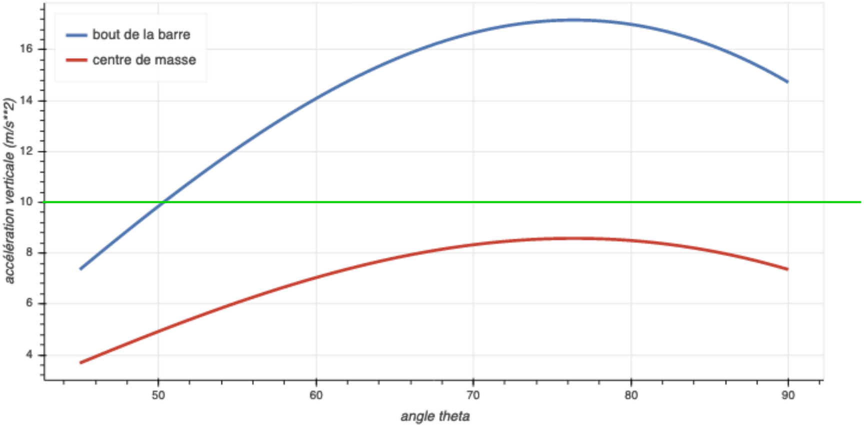
$$\vec{a}_\rho \cdot \vec{e}_x = -d\,\dot{\theta}^2(-\cos\theta) - d\,\frac{3}{2}\,\frac{g}{\ell}\sin\theta\,(-\sin\theta)$$

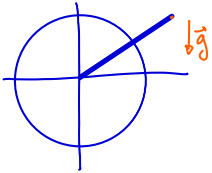
$$\vec{a}_\rho \cdot \vec{e}_x = d\,\dot{\theta}^2\cos\theta + d\,\frac{3}{2}\,\frac{g}{\ell}\sin^2\theta$$



$$\vec{a}_A \cdot \vec{e}_x = \ell\,\dot{\theta}^2\cos\theta + \frac{3}{2}\,g\sin^2\theta$$

$$\vec{a}_G \cdot \vec{e}_x = \frac{\vec{a}_A \cdot \vec{e}_x}{2} = \frac{\ell}{2}\,\dot{\theta}^2\cos\theta + \frac{3}{4}\,g\sin^2\theta$$

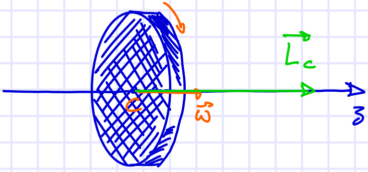




$\vec{g} \cdot \vec{e_x} = 10 \, m \, s^{-2}$

pour $\theta \simeq 50°$ $\quad \vec{a_*} \cdot \vec{e_x} > g$!

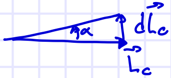
XI-2. Mouvement gyroscopique

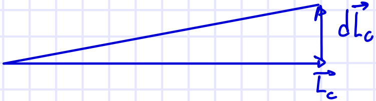


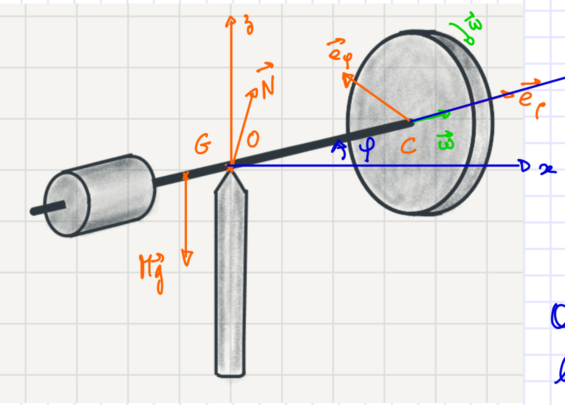
$$\vec{L}_c = I_{cz}\,\vec{\omega}$$

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_c = \frac{d\vec{L}_c}{dt}$$

Afin de faire tourner l'objet dans un plan vertical, le Moment de la force doit être dans un plan vertical. La force est, elle, dans un plan horizontal !







$\vec L_O^{disque}$

$\vec\omega = \omega \vec e_\rho$

poids $\vec P = M\vec g$

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \frac{d\vec L_O}{dt}$$

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{OG}\wedge M\vec g + \underbrace{\cancel{\vec{OO}\wedge\vec N}}_{\vec 0} = \vec{OG}\wedge M\vec g$$

On néglige les contributions à $\vec L_O$ autres que la rotation du disque $\vec L_O = \vec L_O^{disque} = I_O\vec\omega$

$$\vec{OG}\wedge M\vec g = \frac{d\vec L_O}{dt} \Rightarrow (-OG\,\vec e_\rho)\wedge(-Mg\,\vec e_z) = \frac{d}{dt}\left(I_O\,\omega\vec e_\rho\right) = I_O\,\omega\dot{\vec e}_\rho = I_O\,\omega\dot\varphi\,\vec e_\varphi$$

$OG = d_G$

$$(-OG\,\vec{e}_\rho) \wedge (-Mg\,\vec{e}_3) = Mg\,OG\,(-\vec{e}_\varphi) = I_o\,\omega\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{Mg\,OG}{I_o\,\omega} = -\frac{Mg\,d_G}{I_o\,\omega}$$ vitesse angulaire de précession

Le gyroscope se met en rotation dans un plan horizontal à la vitesse angulaire $\Omega = \dot{\varphi}$