

X - Dynamique du solide indéformable

Prof. Cécile Hébert

27 octobre 2021

Plan du cours

- I - Cinématique
- II - Référentiel accélérés
- III - Lois de Newton
- IV - Balistique – effet d'une force constante et uniforme
- V - Forces ; application des lois de Newton
- VI - Travail, Energie, principes de conservation
- VII - Chocs, systèmes de masse variable
- VIII - Oscillateur harmonique
- IX - Moment cinétique ; Gravitation
- X - Solide indéformable
- XI - Application du solide indéformable

Table des matières

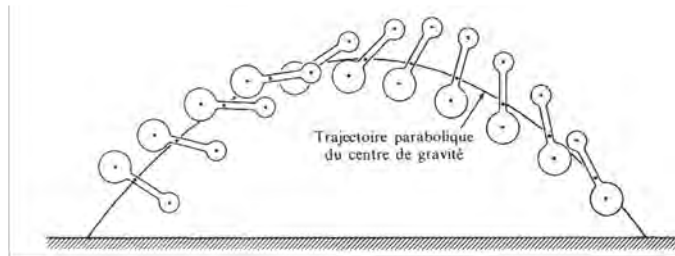
- 1 - Introduction. Du système de points au solide indéformable.
- 2 - Centre de masse et lois de Newton
- 3 - Statique
- 4 - Energie (cinétique) de rotation
- 5 - Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe
- 6 - Moment cinétique d'un solide
- 7 - Solide qui roule
- 8 - Tenseur d'inertie (hors programme)

X-1. Introduction. Du système de points au solide indéformable.

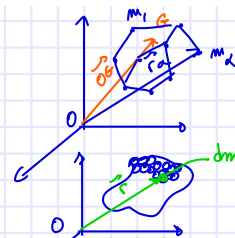
Un solide indéformable peut avoir un mouvement

- de translation
- de rotation

Il va falloir mettre de nouveaux concepts en place pour le mouvement de rotation !



2 - Centre de masse et lois de Newton

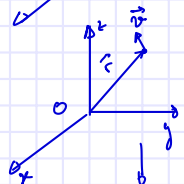


$$\vec{OG} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}}{M}$$

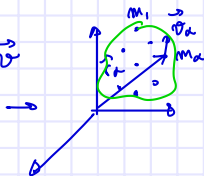
$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = M \vec{a}_G$$

$$\vec{P}^{\text{tot}} = M \vec{v}_G$$

$$\vec{OG} = \frac{\int_{\text{vol}} \vec{r} dm}{M} = \frac{\int_{\text{vol}} \vec{r} \rho(\vec{r}) dV}{M} = \frac{\iiint_V \vec{r}(x,y,z) \rho(x,y,z) dV}{M}$$



$$\vec{L}_0 = \vec{r} \wedge m \vec{v}$$



$$\vec{L}_0^{\text{tot}} = \sum_{\alpha} \vec{L}_0^{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}$$

$$\vec{L}_0^{\text{tot}} = \int_{\text{vol}} d\vec{L}_0 = \int_{\text{vol}} \vec{r} \wedge dm \vec{v}(\vec{r})$$

$$\sum \vec{J}_0^{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_0}{dt}$$

$$\sum \vec{J}_0^{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_0^{\text{tot}}}{dt}$$

solide

$$\sum \vec{J}_0^{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_0^{\text{solide}}}{dt}$$

Quantité de mouvement et 2ème Loi de Newton pour un solide :

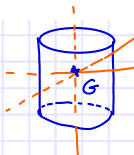
$$\begin{aligned}\vec{P}_{\text{tot}} &= M\vec{v}_G \\ \sum \vec{F}^{\text{ext}} &= M\vec{a}_G\end{aligned}\quad \left. \vphantom{\begin{aligned}\vec{P}_{\text{tot}} &= M\vec{v}_G \\ \sum \vec{F}^{\text{ext}} &= M\vec{a}_G\end{aligned}} \right\} \text{justifie l'approximation} \\ &\quad \text{de la mécanique du point}$$

Théorème du moment cinétique pour un solide

$$\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

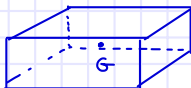
Important dans tous les cas : le poids s'applique au centre de masse.

Détermination du centre de masse d'un solide

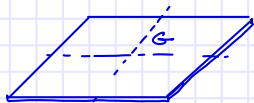


Si un solide possède un axe de symétrie,
le centre de masse est sur cet axe

Si l'objet possède plusieurs axes de symétrie
le centre de masse sera à l'intersection de
ces axes



→ pour ces solides, la position sera donnée.



masse surfacique ρ_s
 $M = S \rho_s$



Objets à 2 dimensions

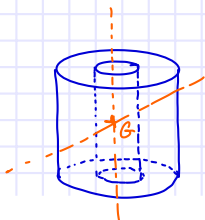


ρ_l masse linéique
 $M = l \rho_l$

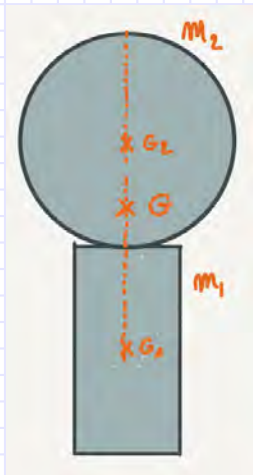


Anneau

Le centre de
masse peut être
à l'extérieur de l'objet



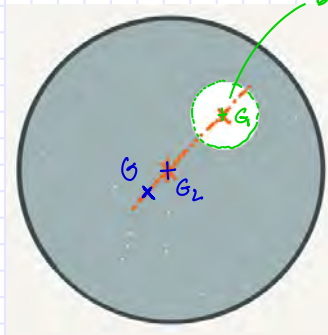
Superposition de deux solides :



$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2}{m_1 + m_2}$$

Centre de masse du système
composé de deux solides

solide à trou



bouchon de masse m_1
centre de masse G_1

Solide + bouchon . masse m_2
Centre de masse en G_2

$$\text{Solide total} \cdot \vec{OG}_2 = \frac{M \vec{OG} + m_1 \vec{OG}_1}{M + m_1} = \frac{M \vec{OG} + m_1 \vec{OG}_1}{m_2}$$

$$M \vec{OG} = m_2 \vec{OG}_2 - m_1 \vec{OG}_1$$

$$\vec{OG} = \frac{m_2 \vec{OG}_2 - m_1 \vec{OG}_1}{M}$$

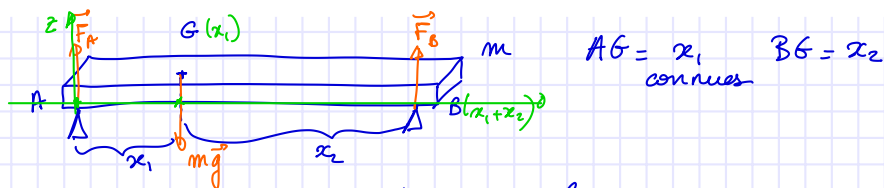
Chercher le c.d.m. entre le solide sans trou et un "trou" de masse négative égale à la masse enlevée au solide.

3 - Statique

Les conditions sont alors :

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0} \quad \vec{M}_O^{\text{ext}} = \vec{0}$$

Exemple : poutre (non homogène !) de masse m sur 2 supports. Déterminer les forces F_A en A et F_B en B exercées par les supports



Attention aux points d'application des forces

$$\sum \vec{F} = \vec{0} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + m\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow F_A + F_B - mg = 0$$

$$\sum \vec{M}_A = \vec{0}$$



$$\vec{AG} \wedge m\vec{g} + \vec{AB} \wedge \vec{F}_B = \vec{0}$$

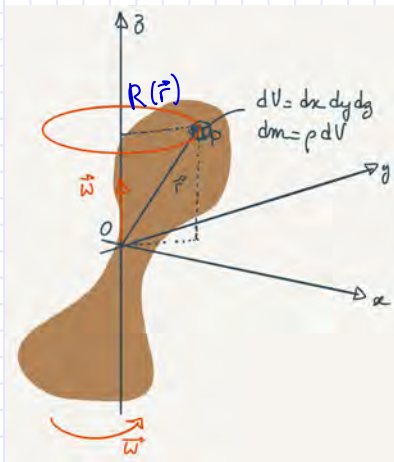
$$x_1 \vec{e}_x \wedge (-mg \vec{e}_z) + (x_1 + x_2) \vec{e}_x \wedge F_B \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$mgx_1 \vec{e}_y - (x_1 + x_2) F_B \vec{e}_y = \vec{0}$$

$$mgx_1 = F_B (x_1 + x_2) \Rightarrow F_B = mg \frac{x_1}{x_1 + x_2} \quad F_A + F_B - mg = 0$$

$$F_A = mg \frac{x_2}{x_1 + x_2}$$

$$F_B = mg \frac{x_1}{x_1 + x_2}$$



$$E_{c, \text{rot}} = \frac{1}{2} I_3 \omega^2$$

Vector notation = $\vec{\omega}$

Morceau de solide de volume dV

de masse $dm = \rho(\vec{r}) dV$ autour de P

il a une énergie cinétique $dE_{c, \text{rot}} = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} dm (R\omega)^2$

$$dE_{c, \text{rot}} = \frac{1}{2} (\rho(\vec{r}) dV) R^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \rho(\vec{r}) R^2 \omega^2 dV$$

$$E_{c, \text{rot}} = \int_{\text{vol}} \frac{1}{2} \rho(\vec{r}) R^2 \omega^2 dV = \frac{1}{2} \omega^2 \int_{\text{vol}} \rho(\vec{r}) R^2 dV$$

Moment d'inertie du solide par rapport à Oz

$$I_3 = \int_{\text{vol}} \rho(\vec{r}) R^2 dV$$

Résumé

$$E_{C,\text{rot}} = \frac{1}{2}\omega^2 \int_{\text{vol}} R^2 \rho(r) d\vec{r} = \frac{1}{2}\omega^2 I_z$$

Avec I_z moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Oz)

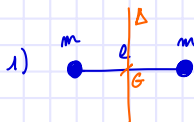
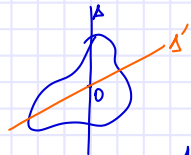
$$I_z = \int_{\text{vol}} R^2 \rho(r) d\vec{r}$$

5 - Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

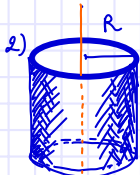
$$E_{c,rot} = \frac{1}{2} I_2 \omega^2$$

$$I_2 = \int_{vol} R^2 \rho(\vec{r}) dV \quad \text{moment d'inertie par rapport à } O_2$$

Cette grandeur dépend du solide et de l'axe

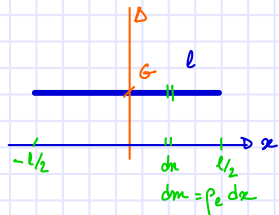


$$I_D = m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \\ = 2m\frac{l^2}{4} = \frac{1}{2}ml^2$$



cylindre creux,
mince de rayon R
de masse M

$$I_D = MR^2$$

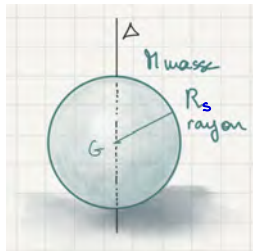


Tige mince de longueur l densité linéique $\rho_e = M/l$

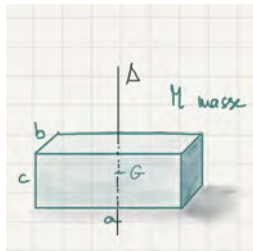
$$I_D = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho_e x^2 dx = \rho_e \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{M}{l} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \left(-\frac{l}{2}\right)^3 \right] = \frac{M}{l} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2l^3}{8} = \frac{1}{12} Ml^2$$

Solides usuels

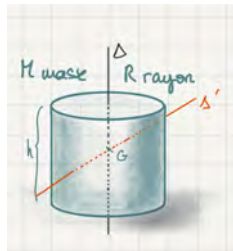
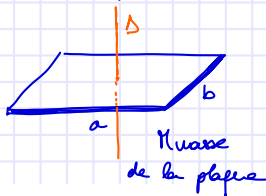
Solides pleins homogènes



$$I_{\Delta} = \frac{2}{5} M R_s^2$$



$$I_{\Delta} = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$



$$I_{\Delta} = \frac{1}{2} M R^2$$

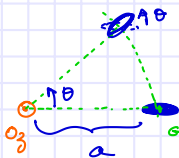
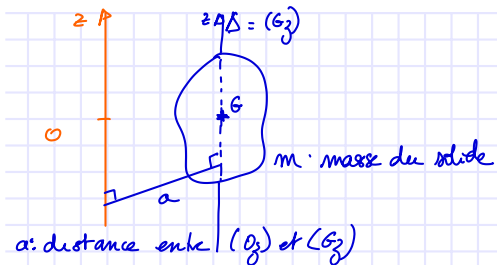
$$I_{\Delta'} = \frac{1}{4} M \left[R^2 + \frac{h^2}{3} \right]$$

Théorème de Steiner :

Si on a deux axes *parallèles* (Oz) et (Gz) distants de a , avec G centre de masse. Si I_{Gz} est le moment d'inertie par rapport à (Gz) alors

$$I_{Oz} = I_{Gz} + ma^2$$

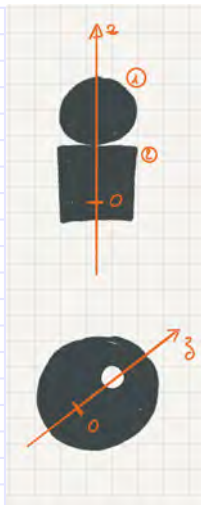
I_{Oz} moment d'inertie par rapport à (Oz)



$$I_{Oz} = \frac{1}{12} m l^2 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2$$

$$I_{Oz} = m l^2 \left[\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{3} m l^2$$

Solides composés et solides à trous



$$I_{O_3}^{\text{total}} = I_{O_3}^{(1)} + I_{O_3}^{(2)}$$

$$I_{O_3}^{\text{solide bouché}} = I_{O_3}^{\text{solide réel}} + I_{O_3}^{\text{bouchon}}$$

$$I_{O_3}^{\text{solide réel}} = I_{O_3}^{\text{solide bouché}} - I_{O_3}^{\text{bouchon}}$$

Application

cylindre creux masse M et rayon R roule sans glisser
 lâché sans vitesse initiale en A On cherche v_B

 Forces: $M\vec{g}$, réaction $\vec{R}$, $\vec{F}_f$ frottements
 vitesse du point d'application de $\vec{F}_f$ est nulle $W_{F_f} = 0$ $W_{\vec{R}} = 0$
 Seule force qui travaille: poids $\Rightarrow$ conservation de $E_m = E_p + E_{c,trans,G} + E_{rot autour de G}$
 $E_{c,trans} = E_c = \frac{1}{2} M v_G^2$; $E_{rot} = \frac{1}{2} I_{Gz} \omega^2$ $I_{Gz} = MR^2$ $v_G = R\omega$
 $E_{m,A} = E_{m,B} \Rightarrow E_{p,A} + E_{c,A} + E_{rot,A} = E_{p,B} + E_{c,B} + E_{rot,B}$
 $Mgh + 0 + 0 = 0 + \frac{1}{2} M v_B^2 + \frac{1}{2} I_{Gz} \omega_B^2 = \frac{1}{2} M v_B^2 + \frac{1}{2} M R^2 \frac{v_B^2}{R^2}$
 ~~$Mgh = \frac{1}{2} M v_B^2$~~
 $v_B = \sqrt{gh}$ Objet qui glisse sans rouler $v_B = \sqrt{2gh}$

6 - Moment cinétique d'un solide.

Rappel : quantité de mouvement et 2ème Loi de Newton pour un solide :

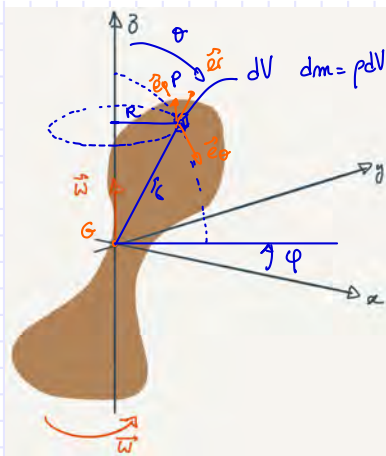
$$\vec{P}_{\text{tot}} = M\vec{v}_G$$

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = M\vec{a}_G$$

Théorème du moment cinétique pour un solide

$$\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

Soit un solide en rotation autour d'un axe passant par G. On place l'axe (Gz) de manière que ce soit l'axe de rotation. Le vecteur rotation est alors $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$



$$d\vec{L}_G = \vec{r} \wedge d\vec{p} = \vec{r} \wedge dm \vec{v}(P)$$

Coordonnées sphériques (r, θ, φ)

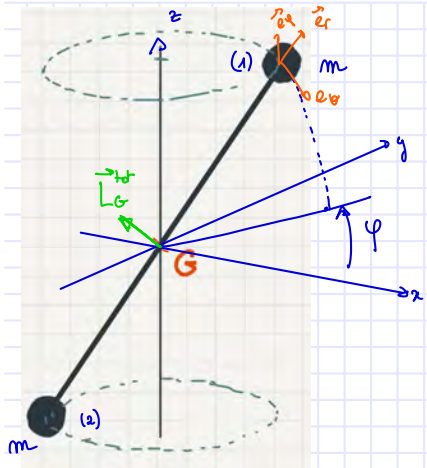
$$\vec{v}(P) \parallel \vec{e}_\varphi \quad \vec{v} = R \omega \vec{e}_\varphi = r \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

$$d\vec{L}_G = r \vec{e}_r \wedge dm r \sin \theta \vec{e}_\varphi = r^2 dm \sin \theta (-\vec{e}_\theta)$$

$$d\vec{L}_G = r^2 dm \sin \theta (-\vec{e}_\theta)$$

$$\vec{L}_G = \int_{\text{volume}} r^2 dm \sin \theta (-\vec{e}_\theta)$$

Cas simple : "haltère" en rotation, dont la tige a une masse négligeable.



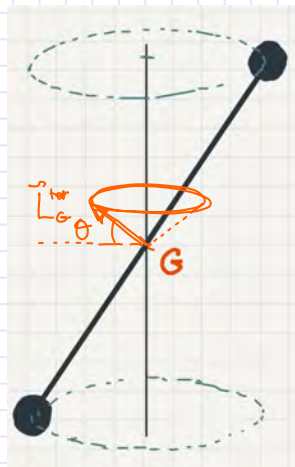
$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3$$

$$\vec{L}_G^{\text{solide}} = \vec{L}_G^{(1)} + \vec{L}_G^{(2)}$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_G^{(1)} &= \vec{r}_1 \wedge \vec{p} = \vec{r}_1 \wedge m \vec{v} = r \vec{e}_r \wedge m (r \sin \theta \omega \vec{e}_\varphi) \\ &= m r^2 \sin \theta \omega (\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\varphi) = -m r^2 \sin \theta \omega \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

$$\vec{L}_G^{(2)} = (-\vec{r}) \wedge (m(-\vec{v})) = m \vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{L}_G^{(1)}$$

$$\vec{L}_G^{\text{total}} = 2 \vec{L}_G^{(1)} = - \underbrace{2 m r^2 \sin \theta \omega}_{M = \text{masse du solide}} \vec{e}_\theta$$



Résumé

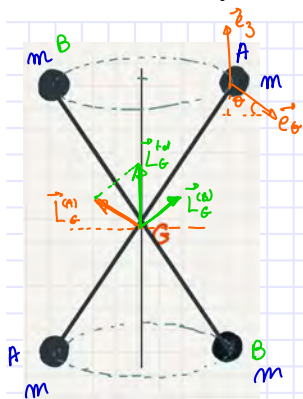
dors de la rotation du solide autour de (Gz)
le moment cinétique décrit un cône

la direction du vecteur $\vec{L}_G^{\text{tot}}$ change

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_G = \frac{d\vec{L}_G^{\text{tot}}}{dt} \neq \vec{0} !$$

La rotation demande d'exercer un moment
pour être maintenue !

En général, le moment cinétique n'est pas parallèle à l'axe de rotation. Sauf si il y a une certaine symétrie dans la répartition de la masse :



$$\vec{L}_G^{(A)} = 2mr^2 \sin\theta \omega (-\vec{e}_\theta)$$

$$\underbrace{\vec{L}_G^{\text{total}}}_{\parallel \vec{e}_z} = \vec{L}_G^{(A)} + \vec{L}_G^{(B)}$$

$$|\vec{L}_G^{\text{total}}| = 2 \vec{L}_G^{(A)} \cdot \vec{e}_z = 2 (2mr^2 \sin\theta \omega) (-\vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_z$$

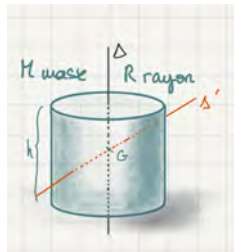
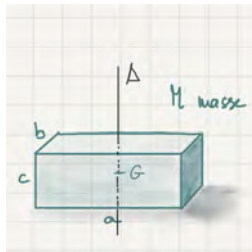
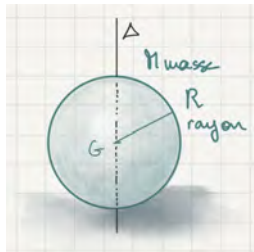
$$\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_z = -\sin\theta$$

$$|\vec{L}_G^{\text{total}}| = 4mr^2 \sin\theta \omega \sin\theta = 4m\omega (\sin\theta)^2 r^2 = \mathcal{I} \omega R^2$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_G^{\text{total}} &= \mathcal{I} R^2 \omega \vec{e}_z = \mathcal{I} R^2 \vec{\omega} \\ &= \mathcal{I}_G \vec{\omega} \end{aligned}$$

Dans certains cas $\vec{L}_G \parallel \vec{\omega}$. Alors : $\vec{L}_G = \mathcal{I}_{Gz} \vec{\omega}$

Exemples de cas symétriques :

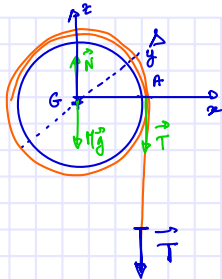


Pour ces solides il existe des axes de symétrie tels que pour une rotation autour de cet axe $\vec{L}_G = I_{Gz} \vec{\omega}$ Axe principal d'inertie

Tout solide admet au moins 3 axes principaux d'inertie

Pour une rotation autour d'un axe principal d'inertie, $\vec{L}_G = I_{Gz} \vec{\omega}$

Exemple



Poulie = disque plein homogène fixé à un axe Δ passant par G , M masse de la poulie R son rayon
 Corde sans masse enroulée autour de la poulie
 durant t_0 , on exerce une tension $\vec{T}$ sur la corde
 l'ensemble est initialement immobile

[Quelle est la longueur de corde déroulée au bout de t_0 ?]

Forces poids $M\vec{g}$ Réaction $\vec{N}$ Tension $\vec{T}$ $\sum \vec{dL}_G = \frac{d\vec{L}_G}{dt}$

$$\sum \vec{dL}_G = \cancel{\vec{GG} \wedge M\vec{g}} + \cancel{\vec{GG} \wedge \vec{N}} + \vec{GA} \wedge \vec{T} = R \vec{e}_x \wedge (-T \vec{e}_y) = RT \vec{e}_y$$

$$\sum \vec{J}_G = RT \vec{e}_y = \frac{d}{dt} \vec{L}_G$$

Δ : axe principal d'inertie

$$I_{Gy} = \frac{1}{2} \pi R^2$$

$$\vec{L}_G = I_{Gy} \vec{\omega} = I_{Gy} \omega \vec{e}_y$$

$$\vec{L}_G = \frac{1}{2} \pi R^2 \omega \vec{e}_y$$

ω dépend du temps! $\omega(t)$ cette information est restée implicite!

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_G = \frac{1}{2} \pi R^2 \dot{\omega} \vec{e}_y = RT \vec{e}_y$$

$$\dot{\omega} = \frac{2RT}{\pi R^2} = \frac{2T}{\pi R} = \text{cte}$$

$\alpha = \text{cte}$ accélération angulaire

$$\omega = \frac{2T}{\pi R} \cdot t + \cancel{\omega(t_0)}_0$$

$$L = \theta_f \cdot R$$

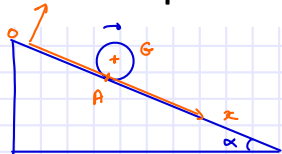
$$\theta = \frac{2T}{\pi R} \cdot \frac{1}{2} t^2 + 0$$

$$\theta_f = \frac{T}{\pi R} t_0^2$$

$$L = \frac{T t_0^2}{\pi}$$

7 - Solide qui roule

Problématique



Cylindre qui roule sans glisser

$$\sum \vec{\mathcal{L}}_X = \frac{d\vec{L}_X}{dt}$$

Choix de X?
O, A ou G???Pour l'instant $\sum \vec{\mathcal{L}}_X = \frac{d\vec{L}_X}{dt}$ si X fixe $\Rightarrow$ O convenant
A et G ???Calcul de $\vec{L}_X$

$$\vec{L}_G = I_{Gz} \vec{\omega} \quad \text{si } Gz \text{ axe principal d'inertie}$$

$$\vec{L}_A = I_{Az} \vec{\omega} \quad \text{si } A \text{ point du solide à vitesse nulle et } Az \text{ axe principal d'inertie.}$$

Le point O n'est ni le centre de masse ni un point du solide à vitesse nulle ~~et donc pas convenant!~~La contrainte de "X fixe dans le référentiel" pour utiliser $\sum \vec{\mathcal{L}}_X = \frac{d\vec{L}_X}{dt}$ est donc trop limitante.

Parfois, on souhaite utiliser un point *non fixe* pour étudier le mouvement.

A un point quelconque de $\mathcal{R}$, non fixe $\Rightarrow \vec{\omega}_R(A) \neq \vec{0}$

$$\sum \vec{\mathcal{L}}_A \stackrel{?}{=} \frac{d\vec{L}_A}{dt} \quad ? \quad O \text{ fixe} \quad \sum \vec{\mathcal{L}}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_A &= \int_{\text{volume}} \vec{AP} \wedge dm \vec{v}_R(P) = \int_{\text{vol}} (\vec{AO} + \vec{OP}) \wedge dm \vec{v}_R(P) = \int_{\text{vol}} \vec{AO} \wedge dm \vec{v}_R(P) + \underbrace{\int_{\text{vol}} \vec{OP} \wedge dm \vec{v}_R(P)}_{\vec{L}_O} \\ &= \vec{AO} \wedge \int_{\text{vol}} dm \vec{v}_R(P) + \vec{L}_O = -\vec{OA} \wedge \vec{P}^{\text{tot}} + \vec{L}_O \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = - \left[\frac{d\vec{OA}}{dt} \wedge \vec{P}^{\text{tot}} + \vec{OA} \wedge \frac{d\vec{P}^{\text{tot}}}{dt} \right] + \frac{d\vec{L}_O}{dt} = -\vec{\omega}_R(A) \wedge \vec{P}^{\text{tot}} - \vec{OA} \wedge \sum \vec{F}^{\text{ext}} + \sum \vec{\mathcal{L}}_O$$

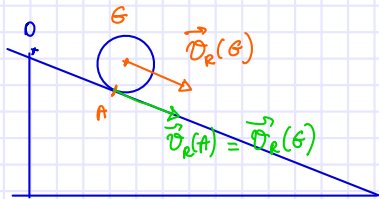
$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = -\vec{\omega}_R(A) \wedge (M \vec{v}_R(G)) + \sum \vec{AO} \wedge \vec{F}^{\text{ext}} + \sum \vec{OP}_{\text{eff}} \wedge \vec{F}^{\text{ext}}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = -M \vec{\omega}_R(A) \wedge \vec{v}_R(G) + \underbrace{\sum (\vec{AO} + \vec{OP}_{\text{eff}})}_{\vec{AP}} \wedge \vec{F}^{\text{ext}} \rightarrow \sum \vec{AP} \wedge \vec{F}^{\text{ext}} = \sum \vec{\mathcal{L}}_A$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \vec{\sigma}_A - M \vec{\omega}_R(A) \wedge \vec{\omega}_R(G) \quad \text{Formule générale}$$

$$\vec{\omega}_R(A) \wedge \vec{\omega}_R(G) = \vec{0}$$

- si A fixe dans R
- si A est le centre de masse G
- si $\vec{\omega}_R(A)$ est colinéaire à $\vec{\omega}_R(G)$



$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\sigma}_O$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \vec{\sigma}_A$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \sum \vec{\sigma}_G$$

O, A et G fonctionnent!

En résumé :

- Pour pouvoir utiliser

$$\vec{M}_A^{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_A}{dt}$$

Il faut que A soit fixe dans le référentiel, ou confondu avec le c.d.m. ou se déplace à une vitesse colinéaire à celle du c.d.m. G

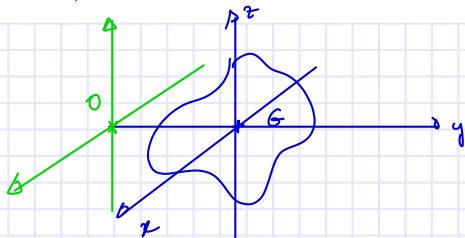
- Pour pouvoir calculer $\vec{L}_A$ avec $\vec{L}_A = I_{Az}\vec{\omega}$

Il faut que (Az) soit un axe principal d'inertie

ET que

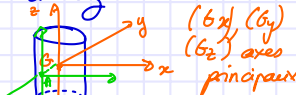
$A = G$ OU A est un point du solide à vitesse nulle.

(O, x, y, z) peuvent-ils être axes principaux d'inertie ?



$O \in (Gy) \Rightarrow Oy$ axe principal

mais aussi Ox et Oz

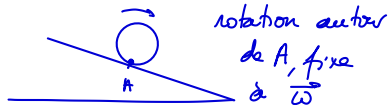


$A (Gy)$ axes principaux d'inertie.
 $(Ax), (Ay)$ et (Az)

Oui, si (G, x, y, z) sont axes principaux d'inertie et si O appartient à un axe principal d'inertie.

Dans ce cas, pour une rotation autour de (Oz) :

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z \text{ et } \vec{L}_O = I_{Oz} \vec{\omega}.$$



Comparaison translation / rotation

Translation

$$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a} \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}}$$

$$\begin{array}{c} m \\ \text{Forces} \\ \sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \vec{p} \\ \frac{1}{2} m v^2 \end{array}$$

Rotation

$$\theta, \vec{\omega}, \alpha \quad \alpha = \dot{\omega}$$

$$\begin{array}{c} I_{\Delta} \\ \vec{L}_0 = \vec{OP}_1 \vec{F} \\ \sum \vec{L}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \vec{L}_0 \\ \frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2 \end{array}$$

8 - Tenseur d'inertie (hors programme)

Cas où l'axe de rotation passe par G , centre de masse :

En fait, de manière générale :

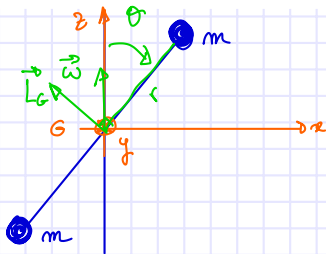
$$\vec{L}_G = \underline{I}_G \vec{\omega}$$

avec :

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & - \int xy dm & - \int xz dm \\ - \int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & - \int yz dm \\ - \int xz dm & - \int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}$$

$\underline{I}$ est le tenseur d'inertie, il dépend de l'origine et des axes choisis.

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & - \int xy dm & - \int xz dm \\ - \int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & - \int yz dm \\ - \int xz dm & - \int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}$$



$$\underline{\bar{I}} = \begin{bmatrix} 2m(r \cos \theta)^2 & 0 & -2mr^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 2mr^2 & 0 \\ -2mr^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 2m(r \sin \theta)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2mr^2 \omega \sin \theta \cos \theta \\ 0 \\ 2mr^2 \omega \sin^2 \theta \end{bmatrix} = \underline{\vec{L}}_G$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$