

## IX. Moment cinétique, force centrale, gravitation

Prof. Cécile Hébert

8 octobre 2021

## Plan du cours

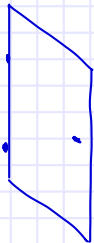
- I - Cinématique
- II - Référentiel accélérés
- III - Lois de Newton
- IV - Balistique – effet d'une force constante et uniforme
- V - Forces ; application des lois de Newton
- VI - Travail, Energie, principes de conservation
- VII - Chocs, systèmes de masse variable
- VIII - Oscillateur harmonique
- IX - Moment cinétique ; Gravitation
- X - Solide indéformable
- XI - Application du solide indéformable

## **Table des matières**

- 1 - Moment cinétique et moment d'une force
- 2 - Force centrale
- 3 - Gravitation
- 4 - Analyse énergétique de la force gravitationnelle

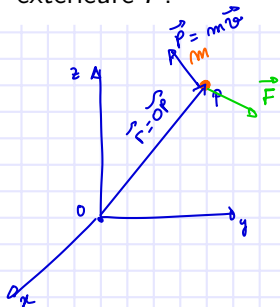
## 1 - Moment cinétique et moment d'une force.

Bras de levier



Le moment cinétique permet de caractériser la rotation autour d'un point O ; le moment de la force permet de caractériser la capacité d'une force à provoquer un mouvement de rotation.

Point P de masse  $m$ , ayant une quantité de mouvement  $\vec{p}$  et soumis à une force extérieure  $\vec{F}$ .



Moment cinétique par rapport au point O

$$\vec{L}_O = \vec{OP} \wedge \vec{p} = \vec{OP} \wedge m\vec{v}$$

Moment de la force  $\vec{F}$  par rapport au point O

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{OP} \wedge \vec{F}$$



Les moments dépendent du point de référence  
 si il ya plusieurs forces.  $\vec{F}_1 - \vec{F}_N$   $\vec{F}_{tot} = \sum \vec{F}$   $\vec{\mathcal{M}}_O = \sum \vec{\mathcal{M}}_O^i = \sum_i \vec{OP}_i \wedge \vec{F}_i$

$$\vec{L}_O = \vec{OP} \wedge \vec{p}$$

$$\text{et } \vec{\sigma}_O = \vec{OP} \wedge \vec{F}$$

$$2^{\text{d}} \text{ loi de Newton. } \sum \vec{F}^i = \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{OP} \wedge \vec{p}) = \underbrace{\frac{d}{dt}(\vec{OP}) \wedge \vec{p}}_{\vec{\omega} \wedge (m\vec{v})} + \underbrace{\vec{OP} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}}_{\vec{\sigma}_O}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\sigma}_O = \sum \vec{\sigma}_O^i$$

Le **moment cinétique** par rapport au point O est :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{p}$$

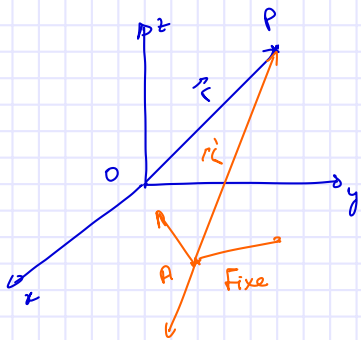
Le **moment de la force**  $\vec{F}$  par rapport au point O est :

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}$$

Théorème du moment cinétique

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_O) = \vec{M}_O$$

## Choix du point de référence



$$\vec{\sigma}_O \quad \text{et} \quad \vec{L}_O$$

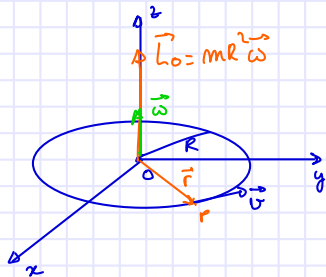
$$\vec{\sigma}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

$$\vec{\sigma}_A \quad \text{et} \quad \vec{L}_A$$

$$\vec{\sigma}_A = \frac{d\vec{L}_A}{dt}$$

On peut utiliser n'importe quel point  
Fixe de l'espace

## Exemple : mouvement circulaire



Coordonnées cylindriques

$$\vec{OP} = \rho \vec{e}_\rho = R \vec{e}_\rho$$

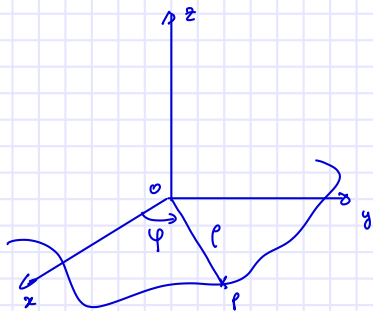
$$\vec{v} = \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \cancel{\dot{\rho} \vec{e}_\rho} = R \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

 $\omega = \dot{\varphi}$  vitesse angulairevecteur rotation  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ 

$$\vec{L}_0 = \vec{OP} \wedge \vec{p} = R \vec{e}_\rho \wedge (m \vec{v}) = R m \vec{e}_\rho \wedge (R \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) = m R^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

$$\vec{L}_0 = m R^2 \vec{\omega}$$

Exemple : mouvement curviligne plan en coordonnées cylindriques



$$\vec{OP} = \rho \vec{e}_\rho \quad \rho \text{ varie}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{OP} \wedge (m \vec{v}) \\ &= (\rho \vec{e}_\rho) \wedge m [\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi] \\ &= \rho m \rho \dot{\varphi} \vec{e}_z = m \rho^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

$$\vec{L}_O = m \rho^2 \vec{\omega}$$

## 2 - Force centrale



Une force centrale de centre  $O$  est telle que  $\vec{F}$  est toujours colinéaire à  $\vec{OP}$

Deux exemples connus : force électrostatique  
force de gravitation

Force centrale de centre  $O$   $\vec{F}$   $\vec{O}_O = \vec{OP}$ ,  $\vec{F} = \vec{O}$   $\vec{O}_O^P = \vec{O}$

Le moment par rapport à  $O$  d'une force centrale de centre  $O$  est nul

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{O}_O = \vec{O} \Rightarrow \vec{L}_O = \text{constant}$$

Le moment cinétique par rapport à  $O$  d'un objet soumis à une force centrale de centre  $O$  est constant.

**Résumé :**

Une force centrale de centre O est telle que  $\vec{F}$  colinéaire à  $\overrightarrow{OP}$

Le moment par rapport à O d'une force centrale de centre O est nul.

Donc le moment cinétique par rapport à O d'un point soumis à une force centrale de centre O est constant

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_O = \vec{0}$$

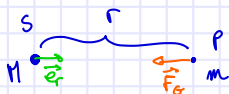
### 3 - Gravitation

Rappel historique : lois de Kepler (1571-1630) :



- 1– Les planètes tournent autour du Soleil en décrivant des ellipses dont cet astre occupe un des foyers.
- 2– Les aires des surfaces décrites par les rayons vecteurs sont proportionnelles aux temps employés à les balayer.
- 3– Les carrés des temps des révolutions des planètes autour du Soleil sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites.

Grâce aux lois de Kepler, Newton arrive à l'expression de la force de gravitation.



$$F_G \propto \frac{1}{r^2}$$

$$\vec{F}_G \propto -\frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{F}_G \propto -\frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{F}_G = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$$

$G$ : constante de gravitation

$$6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$



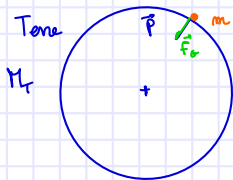
la force de gravitation exercée par un corps à symétrie sphérique est la même que si toute sa masse était concentrée en son centre



pour  $P$  à l'intérieur de la sphère seule compte la masse à l'intérieur de la sphère de rayon  $OP$

$$\vec{F}_G = -\frac{GM(r)}{r^2} \vec{e}_r$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad (\text{cas "usuels"})$$



Poids  $\vec{P} = m\vec{g}$   
 Force gravitationnelle  $\vec{F}_G = -\frac{GM_T m}{R_T^2} \vec{e}_r$  } la même chose !

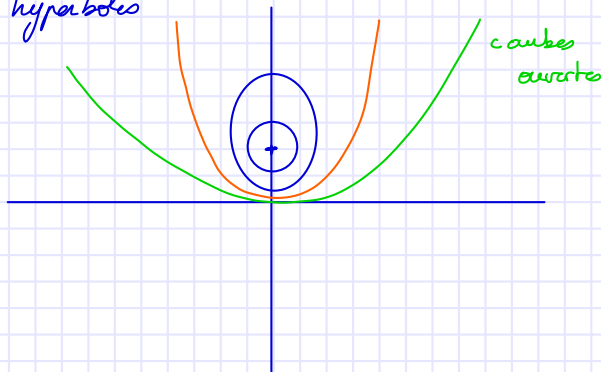
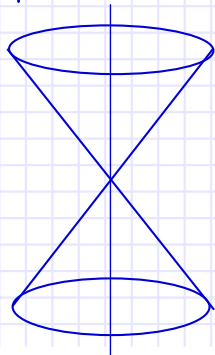
$$mg = \frac{GM_T m}{R_T^2}$$

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

## Des lois de Newton on retrouve les lois de Kepler (élargies)

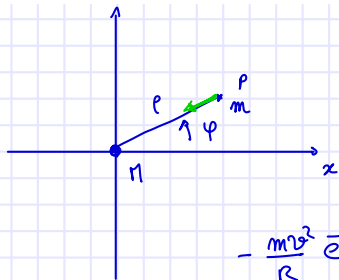
Le mouvement d'un objet dans le champ de gravitation créé par une masse ponctuelle est une cône. La masse ponctuelle occupe le foyer.

Cônes : ellipses, paraboles, hyperboles



## Cas le plus simple : mouvement circulaire

analyser le mouvement; montrer qu'il est uniforme; Calculer la vitesse en fonction du rayon de la trajectoire.



$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$$

mouvement circulaire  $r = \text{cte} = R$

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} = m \left( -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r + \frac{dv}{dt} \vec{e}_\varphi \right) = \vec{F}_g$$

$$-\frac{mv^2}{R} \vec{e}_r + m \frac{dv}{dt} \vec{e}_\varphi = -\frac{GMm}{R^2} \vec{e}_r$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sur } \vec{e}_r : -\frac{mv^2}{R} = -\frac{GMm}{R^2} \quad (1) \\ \text{Sur } \vec{e}_\varphi : m \frac{dv}{dt} = 0 \quad (2) \end{array} \right\}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{cte}$$

Mouvement circulaire uniforme

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$$

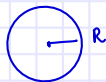
$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \text{de}$$

Période  $T$  = temps pour faire un tour (longueur  $2\pi R$ )

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{R^3}{GM}$$

3<sup>e</sup> loi de Kepler !

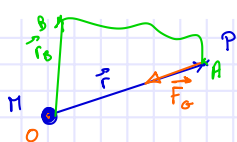


$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$$

Si on connaît  $R$  et  $T$  on peut mesurer  $M$

## 4 - Analyse énergétique de la force gravitationnelle

Énergie potentielle de gravitation :



Coordonnées sphériques

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\text{But : } W_{AB}^{\vec{F}_g} = E_{l,A} - E_{l,B} = \int_A^B \left(-\frac{GMm}{r^2}\right) \vec{e}_r \cdot d\vec{r}$$

$$d\vec{r} = \vec{v} dt = (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi) dt$$

$$W_{AB}^{\vec{F}_g} = \int_A^B \left(-\frac{GMm}{r^2}\right) \vec{e}_r \cdot (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi) dt = \int_A^B -\frac{GMm}{r^2} \dot{r} dt = -GMm \int_A^B \frac{\dot{r} dt}{r^2}$$

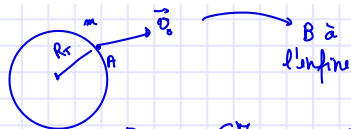
$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{r}\right) = -\frac{(-\dot{r})}{r^2} = \frac{\dot{r}}{r^2} \Rightarrow W_{AB}^{\vec{F}_g} = GMm \left[ \frac{1}{r} \right]_A^B = GMm \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

$$W_{AB}^{\vec{F}_g} = \underbrace{-\frac{GMm}{r_A}}_{E_{l,A}} - \underbrace{\left[-\frac{GMm}{r_B}\right]}_{E_{l,B}}$$

$$E_p^g = -\frac{GMm}{r}$$

## Vitesse de libération

Quelle est la vitesse de libération d'un objet sur Terre ? (Vitesse qu'il faut communiquer à un objet pour qu'il échappe à l'attraction gravitationnelle de la terre)



Conservation de l'énergie mécanique

$$E_{m,A} = E_{m,B} \Rightarrow E_{p,A} + E_{c,A} = E_{p,B} + E_{c,B}$$

$$E_{p,A} = -\frac{GMm}{R_T}, \quad E_{c,A} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$E_{p,B} = -\frac{GMm}{(r_B \rightarrow \infty)} = 0$$

objet arrive à l'infini avec  $v=0 \Rightarrow E_{c,\infty} = 0$

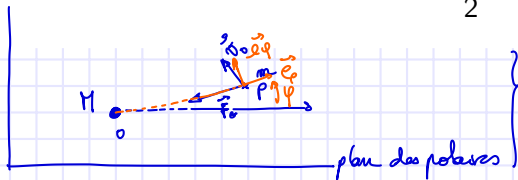
$$-\frac{GMm}{R_T} + \frac{1}{2} m v_0^2 = 0 \Rightarrow v_0^2 = \frac{2GM}{R_T} \quad v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}} \quad 11 \text{ km/s}$$

## Notion d'énergie potentielle effective

Conservation de l'énergie

$$E = E_c + E_p = \text{cte}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = \text{cte}$$



coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$

$$\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z \rightarrow \rho = r \quad \dot{\rho} = \dot{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2$$

$$\dot{\varphi}^2 ??$$

$$\vec{L}_0 = m\rho^2\dot{\varphi}\vec{e}_z = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z$$

$$\vec{L}_0 = \text{cte} \quad \text{car force } \underline{\text{centrale}}$$

$$L_0^2 = m^2 r^4 \dot{\varphi}^2 = \text{cte} \Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \frac{L_0^2}{m^2 r^4}$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{L_0^2}{m^2 r^4}$$

$$E = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + r^2 \frac{L_0^2}{m^2 r^4} \right) - \frac{GMm}{r}$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{L_0^2}{m^2 r^2} - \frac{GMm}{r}$$

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2}}_{E_c} - \underbrace{\frac{GMm}{r}}_{E_p} = A\dot{r}^2 + B \frac{1}{r^2} - C \frac{1}{r}$$

↓ fonction de l'énergie potentielle effective

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{L_O^2}{m r^2} - \frac{GmM}{r}}_{E_{l,eff}(r)} = \underbrace{A \cdot \frac{1}{r^2}}_{\text{somme}} + \underbrace{(-B) \frac{1}{r}}_{\text{somme}}$$

Analyse de  $E_{l,eff}(r)$

