VI. Travail, énergie, principes de conservation

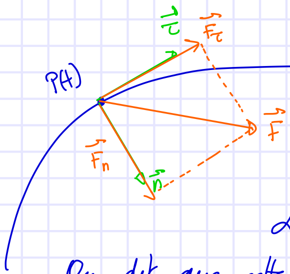
Prof. Cécile Hébert

24 juin 2021

Plan du cours

Table des matières

VI - 1 Travail d’une force, puissance



$$\underbrace{\vec{F}}_{\text{résultante}} = \sum \vec{F}^{ext}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n$$
$$= F_\tau \vec{\tau} + F_n \vec{n}$$

$$\sum \vec{F}^{ext} = \vec{F} = m\vec{a} = m a_n \vec{n} + m a_\tau \vec{\tau}$$
$$= F_n \vec{n} + F_\tau \vec{\tau}$$

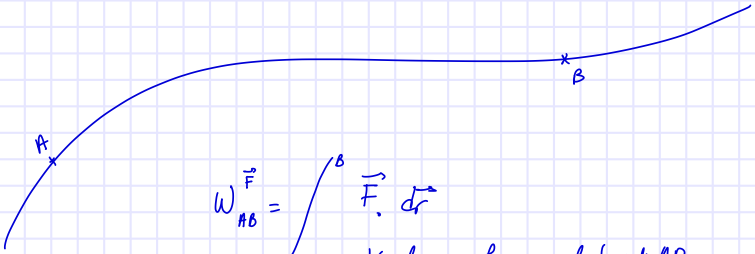
La composante F_τ fait varier la norme de $\vec{v}$

On dit que cette composante travaille elle fait varier $|\vec{v}|$

Définitions

Définissons le travail de $\vec{F}$ pour un déplacement infinitésimal $\vec{dr}$

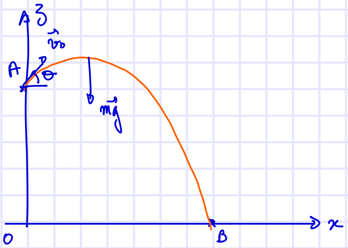
$$\delta W^{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \vec{dr} = \vec{F} \cdot dr\,\vec{\tau} = F_\tau\, dr$$



$$W_{AB}^{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

= intégrale curviligne sur le trajet AB

Exemple 1 : travail du poids dans un tir balistique



$$\vec{mg}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix} \qquad \vec{AB}\begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{vmatrix}$$

$$W_{AB}^{\vec{mg}} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{mg}\cdot d\vec{r} = \vec{mg}\cdot\int_A^B d\vec{r}$$

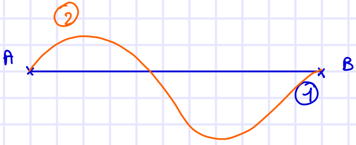
$$= \vec{mg}\cdot\vec{AB}$$

$$W_{AB}^{\vec{mg}} = \vec{mg}\cdot\vec{AB}$$

$$\Rightarrow \vec{mg}\cdot\vec{AB} = -mg(z_B - z_A)$$

$$W_{AB}^{\vec{mg}} = mg z_A - mg z_B$$

Exemple 2 : travail de la force de frottements



$W_{AB(1)}^{\vec{F}_F}$ $\qquad$ $W_{AB(2)}^{\vec{F}_F}$

$$W_{AB(1)}^{\vec{F}_F} = \int_A^B \vec{F}_F \cdot d\vec{r}$$

$\vec{F}_F$ colinéaire à $d\vec{r}$

sens opposé

$$W_{AB(1)}^{\vec{F}_F} = \int_A^B - F_F \cdot dr = - F_F \underbrace{\int_A^B dr}_{l_1} = - F_F \, l_1$$

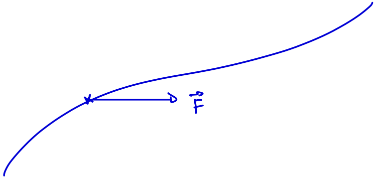
$$W_{AB(2)}^{\vec{F}_F} = - F_F \, l_2 \neq - F_F \, l_1 \neq W_{AB(1)}^{\vec{F}_F}$$

Le travail de la force de frottements dépend du parcours choisi !

Par définition, la puissance est la variation du travail W par unité de temps.

La puissance P est $P = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t}$.

$\delta W =$ travail effectué durant dt



$$P = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Résumé

Le travail d'une force pour un déplacement infinitésimal $\mathrm{d}\vec{r}$ est

$$\delta W^{\vec{F}} = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Donc pour un déplacement de A à B, le travail est

$$W_{AB}^{\vec{F}} = \int_A^B \delta W^{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Travail en Joules [J] ; 1 J = 1 N·m = 1 kg·m^2·s^{-2}

La puissance P est $P = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

La puissance est en Watt [W] ; 1W= 1J·s^{-1}

Puissance : ordre de grandeurs.

5-10 W : Ampoule basse consommation
20-40 W : Puissance consommée par le cerveau humain
100 W : Puissance consommée par le corps humain au repos
300-400W : Un PC
736W : Un cheval-vapeur
900 W : la puissance de sortie d’un humain en bonne santé (non-athlétique) sur les 6 premières secondes d’un sprint de 30 secondes

1 kW à 2 kW : puissance d’une bouilloire électrique domestique
12 kW : La puissance du flash d’un appareil photo amateur (12 joules délivrés en 1 milliseconde)
40 kW à 200 kW : intervalle de puissance de sortie approximative des automobiles

3 MW : puissance de sortie mécanique d’une locomotive diesel
290 MW : Puissance de l’usine de Fionnay (Gde Dixence)

2 GW : puissance du complexe hydro-electrique Cleuson-Dixence
18,2 GW : la puissance électrique générée du barrage des Trois Gorges en Chine

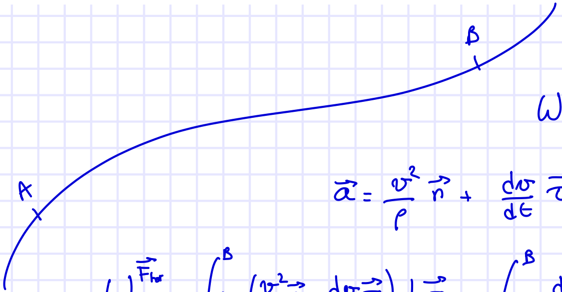
12 TW : la puissance moyenne de la consommation énergétique mondiale
50 à 200 TW : dégagement d’énergie d’un cyclone tropical

174 PW : Puissance du soleil reçue par la Terre

VI - 2 Energie cinétique

D'où sort la notion d'énergie cinétique ?

Mouvement curviligne sous l'action d'une force totale $\vec{F}_{\text{tot}}$:



$$\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$W_{AB}^{\vec{F}_{tot}} = \int_A^B \vec{F}_{tot}\, d\vec{r} = \int_A^B (m\vec{a}) \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{\rho}\vec{n} + \frac{dv}{dt}\vec{\tau} \qquad d\vec{r} = dr\,\vec{\tau}$$

$$W_{AB}^{\vec{F}_{tot}} = \int_A^B m\left(\frac{v^2}{\rho}\vec{n} + \frac{dv}{dt}\vec{\tau}\right) . dr\,\vec{\tau} = \int_A^B m\,\frac{dv}{dt}\,dr = m\int_A^B dv\,\frac{dr}{dt} = m\int_A^B dv\,v$$

$$W_{AB}^{\vec{F}_{tot}} = m \int_A^B v \, dv \qquad \int x\,dx \rightarrow \frac{1}{2}x^2 \qquad W_{AB}^{\vec{F}_{tot}} = m\left[\frac{1}{2}v^2\right]_A^B$$

$$W_{AB}^{\vec{F}_{tot}} = \underbrace{\frac{1}{2}m v_B^2}_{E_{c,B}} - \underbrace{\frac{1}{2}m v_A^2}_{E_{c,A}}$$

$$E_c = \frac{1}{2}m v^2$$

$$W_{AB}^{\vec{F}_{tot}} = E_{c,B} - E_{c,A}$$

$$W_{AB}^{\vec{F}_{tot}} = \int_A^B \sum_i \vec{F}^i \cdot d\vec{r} = \sum_i \int_A^B \vec{F}^i \, d\vec{r} = \sum_i W_{AB}^{\vec{F}_i}$$

Résumé

Par définition, l'énergie cinétique est :

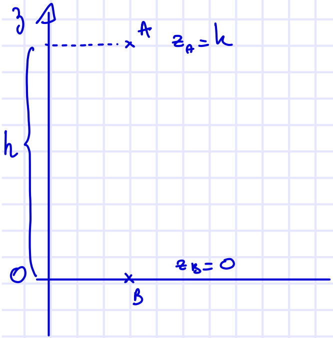
$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Si l'objet est soumis à plusieurs forces $\vec{F}_i$ entre A et B, $\vec{F}^{\text{tot}} = \sum \vec{F}_i$

$$W_{AB}^{\text{tot}} = \sum W^{\vec{F}_i} = E_{c,B} - E_{c,A}$$

Exemple

Vitesse au sol acquise par un objet lâché d'une hauteur *h* avec une vitesse nulle



Forces = poids = $m\vec{g}$

$$W_{AB}^{m\vec{g}} = mg\underbrace{z_A}_{h} - mg\underbrace{\cancel{z_B}}_{0}$$

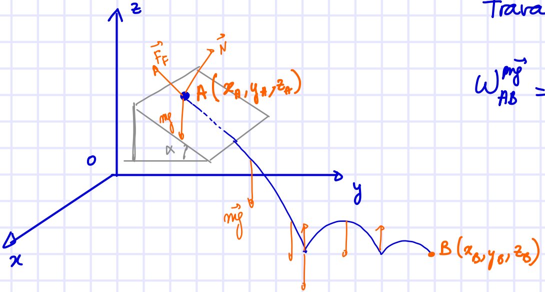
$$W_{AB}^{\vec{F}_{tot}} = W_{AB}^{m\vec{g}} = E_{c,B} - E_{c,A} = mgh$$

$$= \frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 - \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}mv_A^2}}_{0} = \cancel{m}gh$$

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

VI - 3 Energie potentielle et énergie mécanique

Exemple du travail du poids :



travail du poids entre A et B

$$W_{AB}^{m\vec{g}} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{r} = m\vec{g} \cdot \int_A^B d\vec{r} = m\vec{g} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$W_{AB}^{m\vec{g}} = m\vec{g} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Le résultat est indépendant du chemin suivi entre A et B

$W_{AB}^{m\vec{g}}$ ne dépend que des coordonnées d'espace de A et B

Par définition, l'énergie potentielle $E_p^{\vec{F}}(x, y, z)$ est une fonction des coordonnées d'espace (x, y, z) qui est associée à la force considérée $\vec{F}$, a la dimension d'une énergie et est telle que

$$W_{AB}^{\vec{F}} = E_{p,A}^{\vec{F}} - E_{p,B}^{\vec{F}}$$

Force F quelconque → Arrive-t-on à trouver la fonction $E_p^{\vec{F}}$?

oui

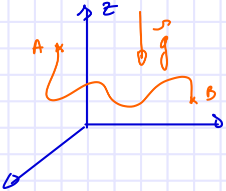
$W_{AB}^{\vec{F_i}} = E_{p,A}^{i} - E_{p,B}^{i}$

non

$W_A^{\vec{F_j}}$ . .

Énergie potentielle dans le champ de pesanteur terrestre :

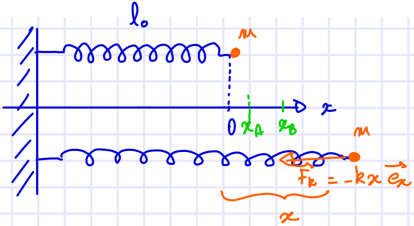
$$W_{AB}^{m\vec{g}} = m\vec{g}\cdot\vec{AB} = -mg\,\vec{e}_3\cdot\vec{AB} = -mg\,(z_B - z_A) = \underbrace{mgz_A}_{E_{p,A}} - \underbrace{mgz_B}_{E_{p,B}}$$



$$E_p^{m\vec{g}} = mgz$$

$$W_{AB}^{m\vec{g}} = E_{p,A}^{m\vec{g}} - E_{p,B}^{m\vec{g}} \qquad E_p^{m\vec{g}} = mgz$$

Énergie potentielle d'un ressort :



$$W_{AB}^{\vec{F_k}} = \int_A^B \vec{F_k} \cdot \vec{dr}$$

$$\vec{dr} = dx\,\vec{e_x}$$

$$\vec{F_k} = -kx\,\vec{e_x}$$

$$= \int_A^B -kx\,\vec{e_x} \cdot dx\,\vec{e_x}$$

$$= -k\int_A^B x\,dx = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_A^B = -k\left[\frac{1}{2}x_B^2 - \frac{1}{2}x_A^2\right]$$

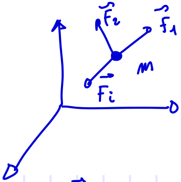
$$W_{AB}^{\vec{F_k}} = \underbrace{\frac{1}{2}kx_A^2}_{E_{p,A}^{\vec{F_k}}} - \underbrace{\frac{1}{2}kx_B^2}_{E_{p,B}^{\vec{F_k}}}$$

$$E_p^{\vec{F_k}} = \frac{1}{2}kx^2$$

Energie mécanique

On définit l'énergie mécanique E_m par

$$E_m = E_p + E_c$$



Si toutes les forces $\vec{F}_i$ sont associées à une énergie potentielle $E_p^{\vec{F}_i}$ $\quad \vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i$

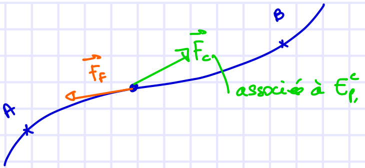
$$W_{AB}^{\vec{F}_{tot}} = \sum_i W_{AB}^{\vec{F}_i} = \sum_i \left(E_{p,A}^{\vec{F}_i} - E_{p,B}^{\vec{F}_i}\right) = \underbrace{\sum_i E_{p,A}^{\vec{F}_i}}_{\substack{E_{p,A}^{tot} \\ E_{p,A}}} - \underbrace{\sum_i E_{p,B}^{\vec{F}_i}}_{\substack{E_{p,B}^{tot} \\ E_{p,B}}} = E_{p,A} - E_{p,B}$$

$$W_{AB}^{\vec{F}_{tot}} = E_{c,B} - E_{c,A} = E_{p,A} - E_{p,B}$$

$$E_{c,A} + E_{p,A} = E_{c,B} + E_{p,B} \qquad E_{m,A} = E_{m,B}$$

Conservation de l'énergie mécanique car les forces sont "conservatives"

Frottements :



$$W_{AB}^{\vec{F}_{tot}} = W_{AB}^{\vec{F}_F} + W_{AB}^{\vec{F}_c}$$

$$W_{AB}^{\vec{F}_F} = -F_F\,\ell$$ ℓ longueur du trajet de A à B

$$W_{AB}^{\vec{F}_c} = E_{p,A}^{F_c} - E_{p,B}^{F_c}$$

$$W_{AB}^{\vec{F}_{tot}} = E_{c,B} - E_{c,A} = E_{p,A}^{F_c} - E_{p,B}^{F_c} - F_F\,\ell$$

$$\underbrace{E_{c,B} + E_{p,B}}_{E_{m,B}} = \underbrace{E_{c,A} + E_{p,A}}_{E_{m,A}} - F_F\,\ell$$

$$E_{m,B} = E_{m,A} - F_F\,\ell$$

$$E_{m,B} = E_{m,A} + W_{AB}^{\text{forces non conservatives}}$$

Force de frottement = force non conservative

Récapitulatif :

Pour certaines forces, on peut trouver la fonction énergie potentielle telle que $W_{AB}^{\vec{F}} = E_{p,A} - E_{p,B}$. Ces forces sont dites "conservatives" car elles conservent l'énergie mécanique.

Si plusieurs forces conservatives entrent en jeu $E_p^{\text{tot}} = \sum E_p^i$

S'il y a plusieurs forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ...

$$W_{AB}^{\text{tot}} = W_{AB}^{\vec{F}_1} + W_{AB}^{\vec{F}_2} + ... = E_{c,B} - E_{c,A}$$

Pour les $\vec{F}_i$ conservatives $W_{AB}^{\vec{F}_i} = E_{p,A}^i - E_{p,B}^i$

Pour les $\vec{F}_j$ non conservatives $W_{AB}^{\vec{F}_j} = \int_A^B \vec{F}_j \cdot d\vec{r}$

Énergie potentielle dans le champ de pesanteur terrestre :

$$mgz$$

z altitude

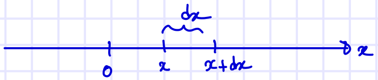
Énergie potentielle d'un ressort :

$$\frac{1}{2}kx^2$$

L'énergie potentielle est définie à une constante près (l'endroit où on prend le référence). Ça n'est pas un problème car seule la différence d'énergie potentielle a un sens physique.

VI - 4 Lien entre force et énergie potentielle

Cas à une dimension selon (Ox), pour une force conservative :



$$\vec{F}(x) = F(x)\,\vec{e}_x$$

$$\delta W^{\vec{F}(x)} = \vec{F}(x).\,d\vec{r} = F(x)\,\vec{e}_x \,.\, dx\,\vec{e}_x = F(x)\,dx$$

$$= E_p(x) - E_p(x+dx) = F(x)\,dx$$

$$F(x) = \frac{E_p(x) - E_p(x+dx)}{dx} = -\frac{E_p(x+dx) - E_p(x)}{dx} = -\frac{dE_p}{dx}$$

$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$$

Force dérive d'un potentiel $\Leftrightarrow$ force conservative

Cas à 3 dimensions : $E_p(x, y, z)$. $\vec{F}$?

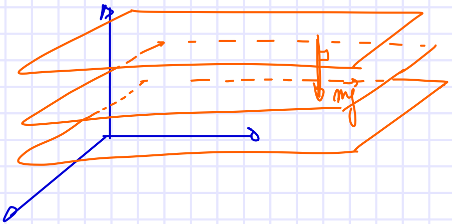
⇒ Analyse II

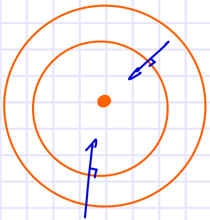
$$\vec{F} = \left| \begin{array}{l} -\dfrac{\partial E_p}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial E_p}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial E_p}{\partial z} \end{array} \right. = -\vec{\nabla} E_p$$

- gradient de E_p

⇒ électromagnétisme !

Surfaces équipotentielles :





Pas au programme de ce cours !

Une force est conservative si et seulement si :

Il existe une *fonction* $E_p(x, y, z)$ telle que $W_{AB}^{\vec{F}} = E_p(A) - E_p(B)$

ou

Il existe une *fonction* $E_p(x, y, z)$ telle que $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$

ou

Le travail de $\vec{F}$ ne dépend pas du chemin suivi

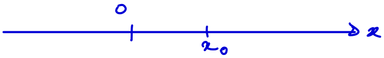
ou

Le travail de $\vec{F}$ est nul sur tout chemin fermé

ou

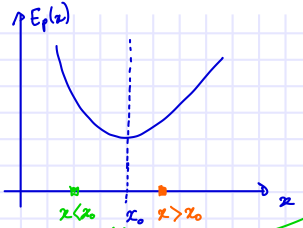
$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

VI - 5 Energie potentielle et équilibre



Si à la position x_0 $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$, alors $F(x_0) = 0$.

Pas de force appliquée sur l'objet. Si l'objet est immobile en x_0, il y reste. C'est une position d'équilibre. ⇒ Extrémum de E_p



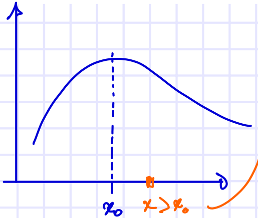
↳ $F(x) > 0$

$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} < 0$

Force dirigée vers la gauche

⇒ ramène l'objet en x_0

Position stable



$\frac{dE_p}{dx} < 0$ $F(x) > 0$

force vers la droite

écarte encore plus l'objet de la position d'équilibre

Position d'équilibre instable