V. Forces; applications des lois de Newton

Prof. Cécile Hébert

10 juin 2021

Plan du cours

Table des matières

V - 1. Réaction d’un support

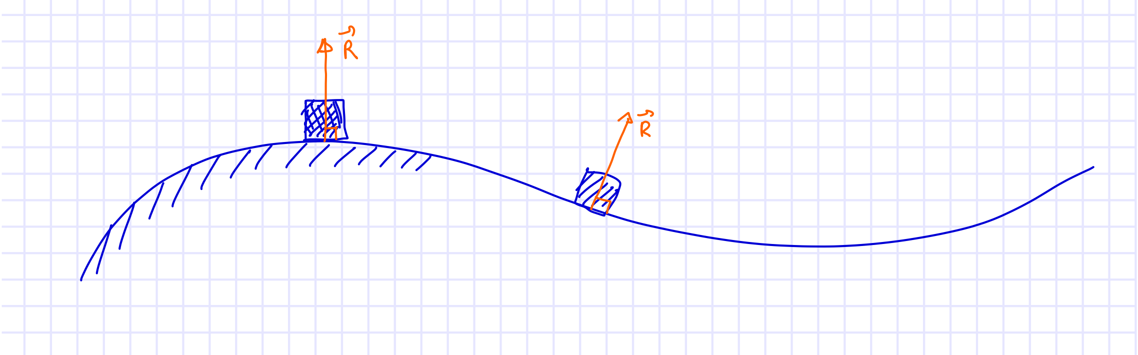
Lorsqu’un corps est posé sur un support, les atomes des deux solides se rapprochent. Ils commencent à avoir une interation notable.

La forces en jeu est la force électromagnétique. La décrire exactement est trop complexe, alors on modélise son effet par des forces phénoménologiques : réaction du support et frottements.

La réaction correspond à la partie répulsive des noyaux des atomes qui ne peuvent pas trop se rapprocher.

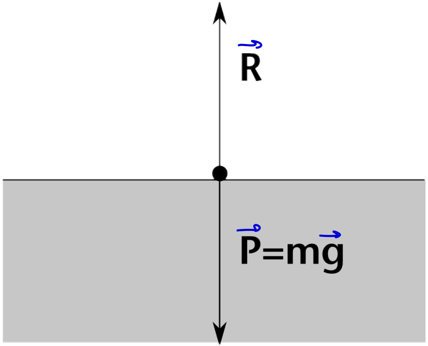
La réaction est normale au support usuellement notée $\vec{R}$ ou $\vec{N}$. Elle est toujours dirigée du support vers l'objet.

On l'obtient en faisant l'hypothèse (raisonnable) que les corps étant des solides indéformables, l'objet ne va pas rentrer dans le support.



Exemple : poids et réaction du support

Masse *m* sur un support horizontal



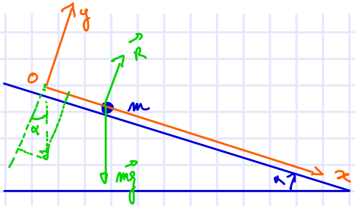
m immobile $\sum \vec{F} = \vec{0}$

Forces : poids $\vec{P} = m\vec{g}$, réaction $\vec{R}$

$$m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$$

$$\vec{R} = -m\vec{g}$$

Masse m sur un support incliné



système : masse m

Référentiel : laboratoire   Repère : (O, x, y)

Forces : poids $\vec{p} = m\vec{g}$ et $\vec{R}$

La masse reste sur le plan $\Rightarrow v_y = 0$ et $y = 0$

Cela implique $a_y = 0$

$\vec{R} \begin{vmatrix} 0 \\ R > 0 \end{vmatrix}$ $m\vec{g} \begin{vmatrix} mg \sin\alpha \\ mg(-\cos\alpha) \end{vmatrix}$

$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{a}$

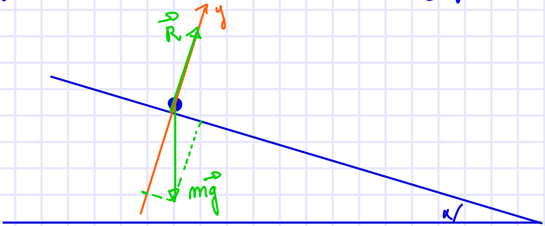
$m\vec{a} \begin{vmatrix} ma_x \\ ma_y \end{vmatrix} \Rightarrow m\vec{a} \begin{vmatrix} ma_x = 0 + mg \sin\alpha \\ ma_y = R - mg\cos\alpha \end{vmatrix}$

Utilisation de la contrainte de liaison $a_y = 0$

$R - mg\cos\alpha = 0$ $ma_x = mg \sin\alpha$

$R = mg\cos\alpha \qquad a_x = g\sin\alpha < g$

$v_x = (g\sin\alpha)t + v_{x,0} \rightarrow x = \frac{1}{2}(g\sin\alpha)t^2 + (v_{x,0})t + x_0$



V - 2 Forces de frottement secs

Les frottements sont aussi une manifestation d'interactions électromagnétiques complexes.

C'est une simplification par un modèle phénoménologique.

Un frottement s'oppose au mouvement.

On distinguera deux types de frottements

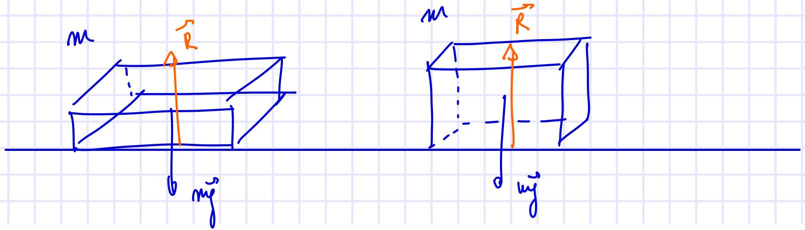
– Frottements secs (d'un solide sur un autre)

– Frottements fluides ou visqueux, ils ont lieu dans un fluide (liquide, gaz...)

frottement secs : expériences

La force de frottement ne dépend que de la réaction du support et du type de surfaces en contact, mais ni de l'aire de contact apparent, ni de la vitesse.

Les frottements secs se comportent différemment suivant que l'objet est immobile ou en mouvement.



Deux formes de frottements secs

1) Quand le corps est immobile : frottements statiques

$\sum \vec{F} = \vec{0}$, donc la force de frottement $\vec{F}_F$ *compense exactement* la force qui tente de mettre l'objet en mouvement, jusqu'à une *valeur limite* .

Tant que $F_F \leq \mu_s R$, le corps ne bouge pas. μ_s coefficient de frottement statique.

2) Quand le corps est en mouvement : frottements dynamiques

$F_F = \mu_c R$, μ_c coefficient de frottement cinétique ou dynamique.

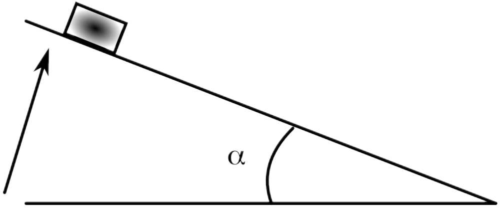
En général $\mu_s > \mu_c$.

Exemple :

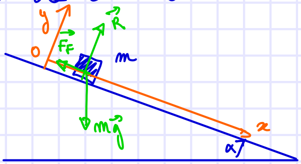
Un bloc de masse *m* est posé en haut d'un plan incliné dont on peut varier l'inclinaison. On considère qu'il y a des frottements et que $\mu_s > \mu_c$. Initialement, le plan est horizontal, on l'incline doucement de plus en plus.

1) A quel angle est-ce que le bloc commence à glisser ?

2) Dès que le bloc "décroche" (commence à glisser), on cesse d'augmenter l'angle. Quelle est alors l'accélération du bloc ?



1) Le bloc est immobile sur le plan incliné. Référentiel. labo



repère (O, x, y)

Forces : poids $(m\vec{g})$ réaction $\vec{R}$ frottements $\vec{F_F}$

Cas : statique $\vec{v} = \vec{0}$ $\vec{a} = \vec{0}$ $\Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0}$

$m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F_F} = \vec{0}$ $\quad m\vec{g} \begin{vmatrix} mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha \end{vmatrix}$ $\quad \vec{R} \begin{vmatrix} 0 \\ R > 0 \end{vmatrix}$ $\quad \vec{F_F} \begin{vmatrix} -F_F \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad F_F > 0$

$$\begin{cases} mg\sin\alpha + 0 - F_F = 0 \\ -mg\cos\alpha + R + 0 = 0 \end{cases}$$

$F_F = mg\sin\alpha$

$R = mg\cos\alpha$

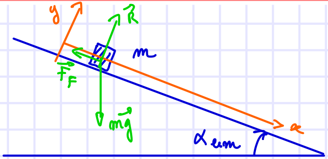
valeur limite pour $F_F = \mu_s R$

α_{lim} la valeur limite de décrochage

$F_F = \mu_s R = \mu_s mg\cos\alpha_{lim}$

$F_F = mg\sin\alpha_{lim}$

$\mu_s \cancel{mg}\cos\alpha_{lim} = \cancel{mg}\sin\alpha_{lim}$ $\quad \dfrac{\sin\alpha_{lim}}{\cos\alpha_{lim}} = \tan\alpha_{lim} = \mu_s$



$\alpha = \alpha_{lim}$ le bloc glisse $\Rightarrow$ frottements cinétiques

$F_F = \mu_c R$

$\sum \vec{F} = m\vec{a} \neq \vec{0}$

$m\vec{g} \left| \begin{array}{l} mg\sin\alpha_{lim} \\ -mg\cos\alpha_{lim} \end{array} \right.$ $\quad \vec{R} \left| \begin{array}{l} 0 \\ R \end{array} \right.$ $\quad \vec{F}_F \left| \begin{array}{l} -F_F \\ 0 \end{array} \right.$

$F_F = \mu_c R$

$m\vec{a} \left| \begin{array}{l} ma_x = mg\sin\alpha_{lim} + 0 - F_F \\ ma_y = -mg\cos\alpha_{lim} + R + 0 = 0 \Rightarrow R = mg\cos\alpha_{lim} \end{array} \right.$

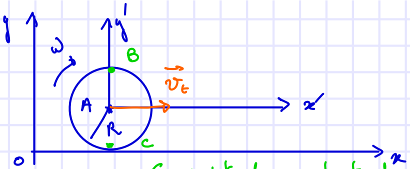
(contrainte de liaison)

$F_F = \mu_c R = \mu_c mg\cos\alpha_{lim}$

$ma_x = mg\sin\alpha_{lim} - F_F = mg\sin\alpha_{lim} - \mu_c mg\cos\alpha_{lim} = mg\sin\alpha_{lim}\left[1 - \mu_c \frac{\cos\alpha_{lim}}{\sin\alpha_{lim}}\right]$

$\cancel{m}a_x = \cancel{m}g\sin\alpha_{lim}\left[1 - \frac{\mu_c}{\tan\alpha_{lim}}\right] \Rightarrow a_x = g\sin\alpha_{lim}\left[1 - \frac{\mu_c}{\mu_s}\right]$

V - 3 Roulement d'une roue



Roue de rayon R

$\vec{v}_t$ vitesse de translation (vitesse de A) cte

ω vitesse de rotation

C. point de contact de la roue avec le sol

B: point diamétralement opposé.

R(O, x, y) fixe R'(A, x', y') se déplace dans R à $\vec{v}_t$ translation sans rotation

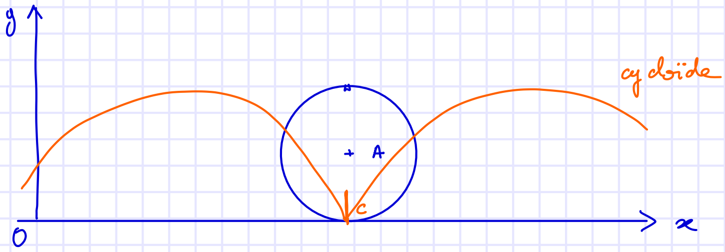
$\vec{v}_R(C) = \vec{0}$ $\vec{v}_R(C) = \vec{v}_R(A) + \vec{v}_{R'}(C)$ $\vec{0} = \vec{v}_t + \vec{v}_{R'}(C)$ $\vec{v}_{R'}(C) = -\vec{v}_t$

$|\vec{v}_{R'}(C)| = R\omega = |\vec{v}_t|$ $\Rightarrow$ $v_t = R\omega$

Dans R C a une vitesse nulle

$\vec{v}_{R'}(B) = \vec{v}_t$

$\vec{v}_R(B) = \vec{v}_R(A) + \vec{v}_{R'}(B) = \vec{v}_t + \vec{v}_t = 2\,\vec{v}_t$ B se déplace à $2\,v_t$



La vitesse du point de la roue en contact avec le sol est nulle

$$\vec{v}_R(B) = 2\,\vec{v}_t$$

$$\vec{v}_R(A) = \vec{v}_t$$

$$\vec{v}_R(C) = \vec{0}$$

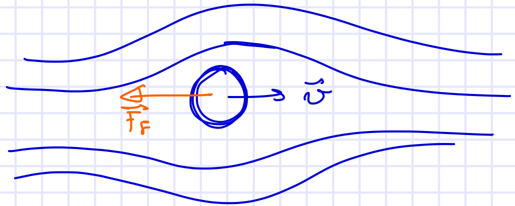
$$v_t = R\,\omega$$

V - 4 Frottements fluides

La force de frottement dépend de la vitesse et de la géométrie de l'objet. À petites vitesses (régime laminaire) la dépendance est linéaire

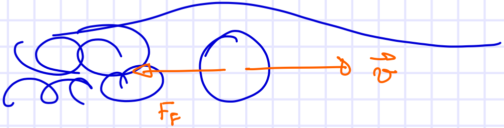
$$\vec{F}_F = -b_l \vec{v}$$

$b_l = K\eta$ avec η coefficient de viscosité et K facteur dépendant de la forme de l'objet.



À plus grande vitesse (régime d'écoulement turbulent), la dépendance est quadratique

$$\boxed{\vec{F}_F = -b_t v^2 \frac{\vec{v}}{v}}$$



$|\vec{F}_F| \propto v^2$

$\vec{F}_F$ col à $\vec{v}$

$$\vec{F}_F = -b_t v \vec{v} = -b_t v^2 \frac{\vec{v}}{v} = -b_t v^2 \vec{\tau}$$

Dans la suite : régime laminaire

à $t=0$ $\quad \vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$

objet en $x=0$

Un projectile arrive avec $\vec{v}_0$ dans un fluide de viscosité η. On appelle K le coefficient lié à la forme de la balle.

But : calculer $v(t)$

Nous négligeons le poids $\qquad$ Force en jeu = force de frottement $\vec{F}_F$

$$\vec{F}_F = -b_\ell \vec{v} \qquad \sum \vec{F} = m\vec{a} = -b_\ell \vec{v}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\dot{v}_x \vec{e}_x = -b_\ell v_x \vec{e}_x \qquad \dot{v}_x = -\frac{b_\ell}{m} v_x = -\frac{K\eta}{m} v_x$$

Equation différentielle $\quad \dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{K\eta}{m} v_x$

$$\frac{dv_x}{dt} = \underbrace{\frac{-k\eta}{m}}_{\lambda} v_x \rightarrow ??$$

$$f(x) = Ae^{x} \Rightarrow f'(x) = Ae^{x} = f(x)$$

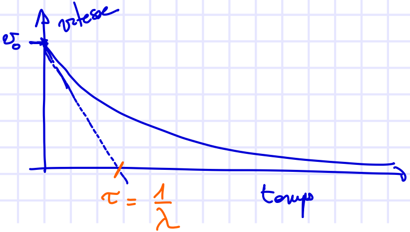
$$f(x) = Ae^{-\lambda x} \Rightarrow f'(x) = -\lambda Ae^{-\lambda x} = -\lambda f(x)$$

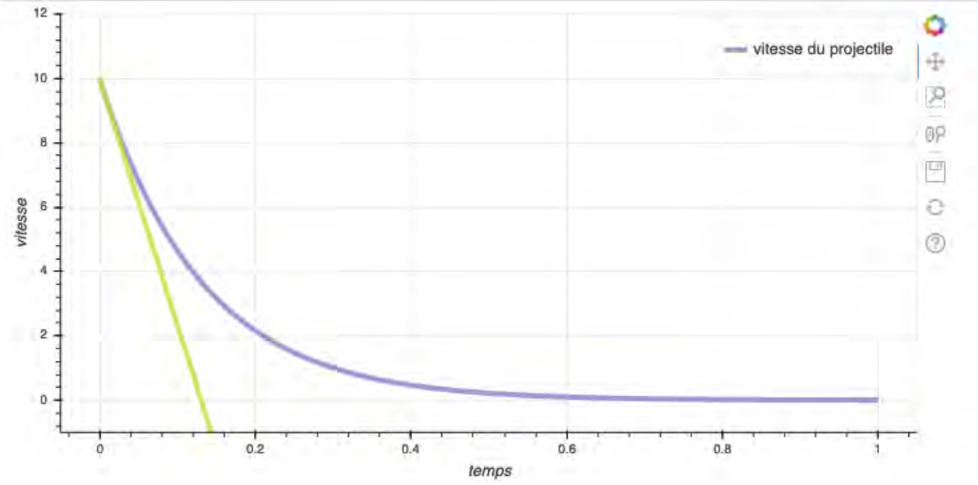
$$\frac{dv_x}{dt} = -\lambda v_x \Rightarrow v_x(t) = Ae^{-\lambda t}$$

à $t = 0$ $\quad v(0) = v_0 = Ae^{0} = A \Rightarrow A = v_0$

$$v_x(t) = v_0 e^{-\lambda t}$$

à $t = 0$ $\quad \frac{dv_x}{dt} = -\lambda v_0 = -\frac{k\eta}{m} v_0$




vitesse du projectile
12
10
8
6
4
2
0
vitesse
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
temps

Objet lâché sans vitesse initiale $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = \vec{0}$

à $t=0$ $z=0$

but. $\vec{v}(t)$?

$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_F + m\vec{g} = -b_\ell \vec{v} + m\vec{g}$

$m\vec{g} = mg\vec{e}_z$ $\quad \vec{v} = v_z \vec{e}_z$ $\quad \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}_z \vec{e}_z$

$m\dot{v}_z \vec{e}_z = -b_\ell v_z \vec{e}_z + mg\vec{e}_z$ $\quad m\dot{v}_z = -b_\ell v_z + mg$

On a une vitesse limite $\vec{v}_{lim}$ $\quad \sum \vec{F} = \vec{0}$ $\quad \vec{F}_F = -m\vec{g} = -b_\ell \vec{v}_{lim}$

$-mg\vec{e}_z = -b_\ell v_{z\,lim} \vec{e}_z$ $\quad \boxed{v_{lim} = \dfrac{mg}{b_\ell}}$ $\quad \dfrac{b_\ell}{m} = \dfrac{k\eta}{m} = \lambda$ $\quad v_{lim} = \dfrac{g}{\lambda}$

Résumé $\quad t \to \infty \quad v_{lim} = \dfrac{g}{\lambda} \qquad \lambda = \dfrac{k\eta}{m} = \dfrac{b_e}{m}$

$$m\,\dot{v}_3 = -b_e v_3 + mg \qquad \dot{v}_3 = -\frac{b_e}{m} v_3 + g \Rightarrow \dot{v}_3 = -\lambda v_3 + g$$

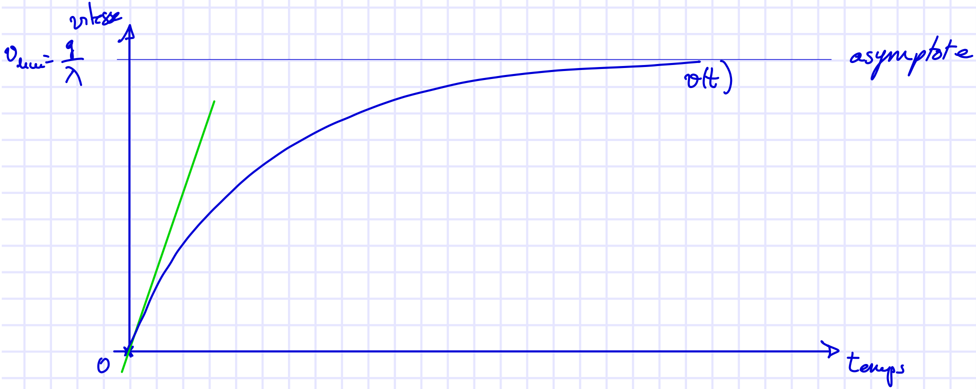
Admettons que la forme de la solution est $v_3(t) = A + B e^{-\lambda t}$

$$v_{lim}.\quad \lim_{t\to\infty}\left(A + B e^{-\lambda t}\right) = A \Rightarrow A = v_{lim} = \frac{g}{\lambda}$$

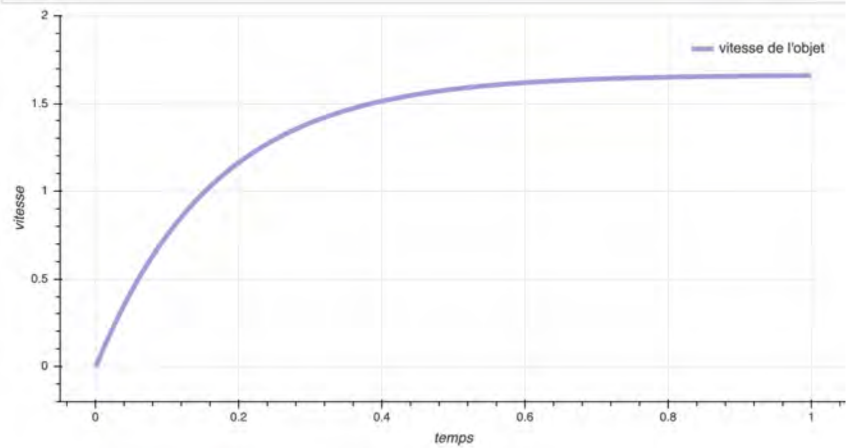
à $t = 0 \quad v(0) = 0 \Rightarrow v_3(0) = 0 = A + B e^{0} = A + B \Rightarrow B = -A = -\dfrac{g}{\lambda}$

$$v(t) = \frac{g}{\lambda} - \frac{g}{\lambda} e^{-\lambda t} = \frac{g}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

$$v_z(t) = \frac{g}{\lambda}\left[1 - e^{-\lambda t}\right] \qquad \dot{v}_z = \frac{g}{\lambda}\left[-(-\lambda)e^{-\lambda t}\right] = g\,e^{-\lambda t}$$

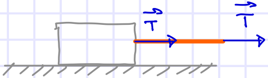


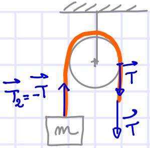
$$v(t) = \frac{g}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})$$



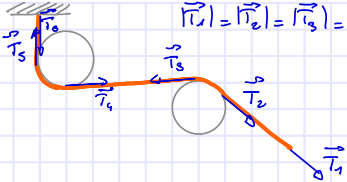
V - 5 Tension dans une corde

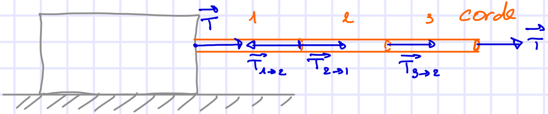
Une corde sans masse, inextensible et tendue transmet simplement les forces, en changeant éventuellement leur direction.





$$|\vec T_1| = |\vec T_2| = |\vec T_3| = |\vec T_4| = |\vec T_5| = |\vec T_6|$$

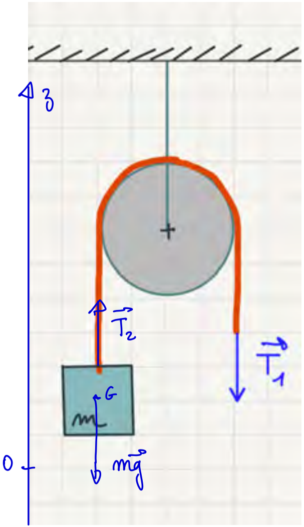




Sur ② $\sum \vec F = m\vec a = \vec T_{3\to 2} + \vec T_{1\to 2} = \vec 0$

$m_2 = 0$

$$\left.\begin{aligned} \vec T_{1\to 2} &= -\vec T_{3\to 2} \\ \vec T_{1\to 2} &= -\vec T_{2\to 1} \end{aligned}\right\} \vec T_{3\to 2} = \vec T_{2\to 1}$$



$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|$ système = bloc de masse m

$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}_2$

$\vec{T}_2 = T_2\,\vec{e}_z$ $T_2 \geq 0$ $T_2 = T_1 = |\vec{T}_1|$

$\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$ $g > 0$

$\vec{a} = a_z\,\vec{e}_z$ a_z composante de $\vec{a}$ sur z

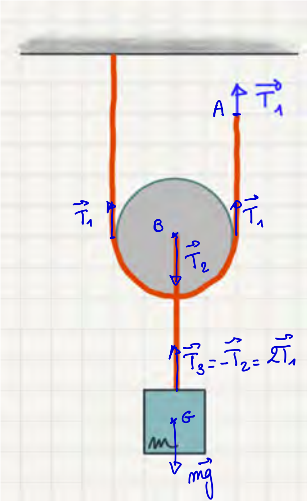
$= a\vec{e}_z$ a_z algébrique >0 ; $=0$; <0

$m a_z \vec{e}_z = -mg\,\vec{e}_z + T_1\vec{e}_z$ $m a_z = T_1 - mg$

si $T_1 > mg$ $a_z > 0$ masse accélérée vers le haut

$T_1 = mg$ $a_z = 0$ masse immobile ou mvt rectiligne uniforme

si $T_1 < mg$ $a_z < 0$



Nous négligeons la masse de la poulie et des cordes

mouvement de m en fonction de T_1 ?

Sur la poulie $\sum \vec{F} = \underset{0}{\cancel{m}_p} \vec{a} = \vec{0} = \vec{T}_1 + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 2\vec{T}_1 + \vec{T}_2 \Rightarrow \vec{T}_2 = -2\vec{T}_1$

Sur la masse $\vec{T}_3$ $(= 2\vec{T}_1)$ et $m\vec{g}$ $\qquad 2\vec{T}_1 + m\vec{g} = m\vec{a}$

$\vec{a}$ accélération du bloc

bloc immobile $\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T}_1 = -\frac{m\vec{g}}{2}$

$\vec{v}_G = \vec{v}_B$, $\vec{a}_G = \vec{a}_B$

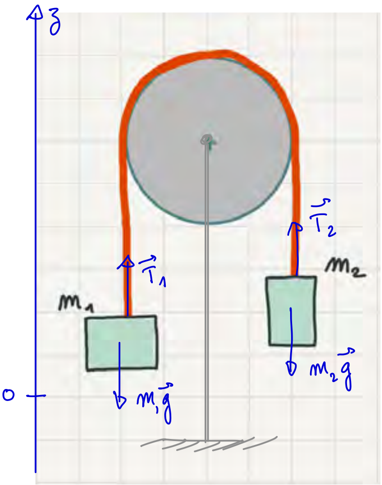
déplacement de A = 2 × déplacement de B

$\vec{v}_A = 2 \times \vec{v}_B = 2\vec{v}_G$

$\vec{a}_A = 2\vec{a}_B = 2\vec{a}_G$

On a divisé les forces par 2 mais multiplié le déplacement par 2

Exemple machine d'Atwood :



2 systèmes : m_1 et m_2 on cherche a_1 et a_2 accélération de m_1 et m_2

Sur $m_1 \Rightarrow \sum \vec{F} = m_1 \vec{a}_1 = \vec{T}_1 + m_1 \vec{g}$

$\vec{T}_1 = T_1 \vec{e}_3 \quad T_1 > 0 \qquad m_1 \vec{g} = -m_1 g \vec{e}_3$

$\vec{a}_1 = a_1 \vec{e}_3 \quad a_1$ algébrique composante de $\vec{a}_1$ sur Oz

$m_1 a_1 \vec{e}_3 = T_1 \vec{e}_3 - m_1 g \vec{e}_3 \qquad m_1 a_1 = T_1 - m_1 g$

Sur m_2 $\quad \vec{T}_2$ et $m_2 \vec{g} \qquad \vec{T}_2 = T_2 \vec{e}_3 \qquad m_2 \vec{g} = -m_2 g \vec{e}_3$

$\sum \vec{F} = m_2 \vec{a}_2 = m_2 a_2 \vec{e}_3 = T_2 \vec{e}_3 - m_2 g \vec{e}_3$

$m_2 a_2 = T_2 - m_2 g \qquad T_1 = T_2 \qquad \vec{a}_2 = -\vec{a}_1$

$a_1 = -a_2$

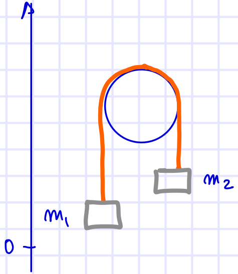
$$\begin{cases} m_1 a_1 = T_1 - m_1 g & (1) \\ m_2 a_2 = T_2 - m_2 g & (2) \\ T_1 = T_2 & (3) \\ a_1 = -a_2 & (4) \end{cases}$$

$(1)-(2)$ $\quad m_1 a_1 - m_2 a_2 = \cancel{T_1 - T_2} - m_1 g + m_2 g$

$$m_1 a_1 + m_2 a_1 = g\,(m_2 - m_1)$$

$$a_1 = g\,\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} = -a_2$$

$$a_2 = g\,\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

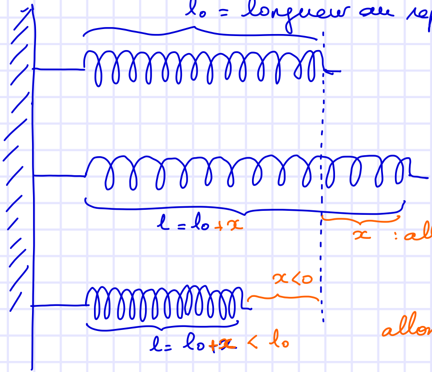


si $m_2 > m_1$ $\quad a_1 > 0$ $\quad$ accélération $\uparrow$

si $m_1 > m_2$ $\quad a_1 < 0$ $\quad$ ——— $\downarrow$

V - 6. Force de rappel d'un ressort

l_0 = longueur au repos : longueur "naturelle du ressort"



$l = l_0 + x$

x : allongement > 0 ressort étiré

$x < 0$

allongement < 0 ressort comprimé

$l = l_0 + x < l_0$

$l = l_0 + x$ x algébrique

Dans le cas idéal, la force exercée par un ressort est proportionnelle à sa variation de longueur. Pour cela il faut rester dans le domaine des petites déformations (réversibles).

Loi de Hooke

repère Ox tel que x : allongement

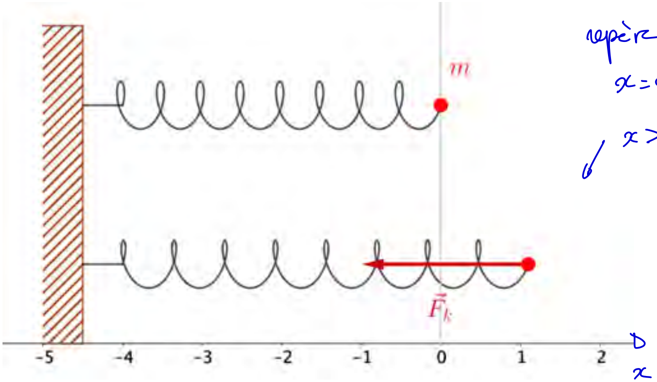
$x = 0$ quand le ressort est au repos

$x > 0$

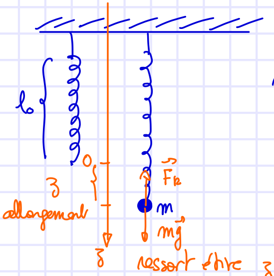
$$\boxed{\vec{F}_k = -k\,x\,\vec{e}_x}$$

k : constante de raideur $N.m^{-1}$

si $x < 0$ $\quad -kx\,\vec{e}_x$



Cas d'un ressort accroché verticalement avec une masse suspendue



ressort étiré $z>0$

Sur m : forces : $m\vec{g}$ et $\vec{F}_k$

m immobile $\sum \vec{F} = \vec{0}$

$$m\vec{g} + \vec{F}_k = 0$$

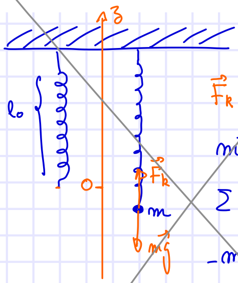
$$m\vec{g} = mg\,\vec{e}_z$$

$$\vec{F}_k = -kz\,\vec{e}_z$$

$$mg\,\vec{e}_z - kz\,\vec{e}_z = \vec{0}$$

$$mg - kz = 0 \qquad z = \frac{mg}{k} > 0$$

$$l = l_0 + z > l_0$$



ici : ressort étiré ⇔ $z<0$?!

$$\vec{F}_k = -kz\,\vec{e}_z$$

$$m\vec{g} = -mg\,\vec{e}_z$$

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

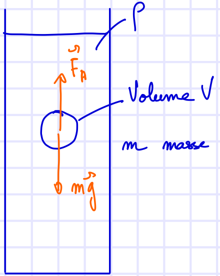
$$-mg\,\vec{e}_z - kz\,\vec{e}_z = 0$$

$$kz = -mg \qquad \underline{z = -\frac{mg}{k}}$$

toujours prendre l'orientation pour avoir un allongement >0 si le ressort est étiré

V - 7 Poussée d’Archimède

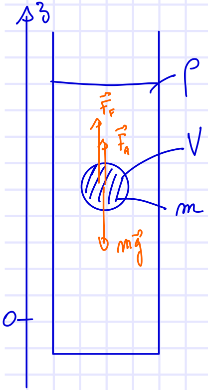
Un corps immergé dans un fluide reçoit une poussée vers le haut égale au poids du volume de fluide déplacé



m_f = masse de fluide déplacé $\qquad m_f = \rho V$

poids du fluide déplacé $= \rho V g = F_A$

Un objet de masse m et volume V tombe dans un fluide visqueux de masse volumique ρ. On est dans le cas d'un régime laminaire. Quelle est sa vitesse limite ?



Forces qui s'exercent sur l'objet : poids $m\vec{g}$, $\vec{F}_A$ force d'Archimède

$\vec{F}_F$ force de frottement

$m\vec{g} = -mg\,\vec{e}_z \qquad \vec{F}_A = \rho V g\,\vec{e}_z$

$\vec{F}_F = -b_\ell\,\vec{v} \qquad \vec{v} = \vec{cte} = \vec{v}_{lim} = v_{lim}\,\vec{e}_z \qquad v_{lim}$: algébrique

$= -b_\ell\, v_{lim}\,\vec{e}_z$

$\vec{v} = \vec{v}_{lim} = \vec{cte} \Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0} \qquad m\vec{g} + \vec{F}_F + \vec{F}_A = \vec{0}$

$-mg\,\vec{e}_z - b_\ell\, v_{lim}\,\vec{e}_z + \rho V g\,\vec{e}_z = \vec{0} \qquad -mg - b_\ell\, v_{lim} + \rho V g = 0$

$$v_{lim} = \frac{\rho V g - mg}{b_\ell}$$