IV - Balistique

Prof. Cécile Hébert

28 mai 2021

Plan du cours

Table des matières

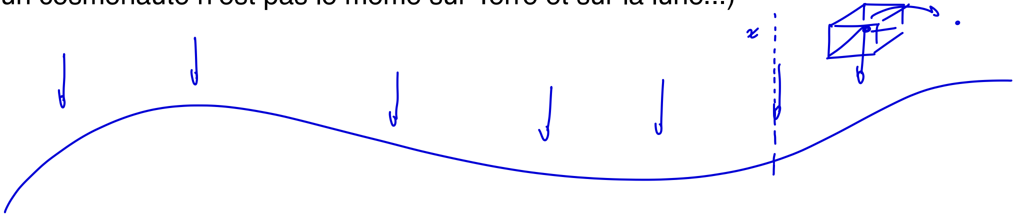
1 - Poids d’un objet

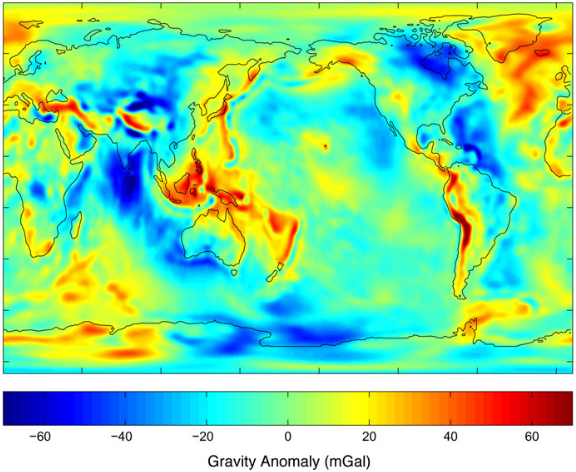
À l’échelle du laboratoire, la Terre est plate et l’accélération de la pesanteur $\vec{g}$ dirigée vers le bas.

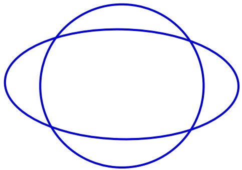
La force qui s’exerce sur une masse m est son poids $\vec{P}$

$\vec{P} = m\vec{g}$ $g \simeq 10\ m\,s^{-2}$ $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$

la masse est une propriété intrinsèque du corps. Le poids dépend du lieu (le poids d’un cosmonaute n’est pas le même sur Terre et sur la lune...)





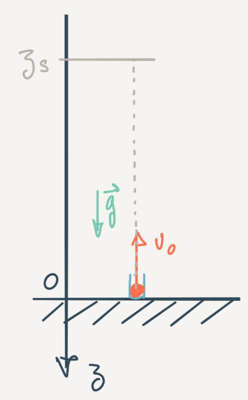


Anomalie de g par rapport à l'ellipsoide applati.

1 Gal = 1 cm$\cdot$s^{-2} $= 10^{-2}$ m.s^{-2}

1 mGal $= 10^{-5}$ m s^{-2}

2 - Cas d’un lancer vertical (1 dimension)



Référentiel : labo   repère : coordonnées cartésiennes (O,x,y,z)

Oz vertical vers le bas.

à $t=0$ $z(0)=0$ $\vec v_0 = \vec v(0) = -v_0 \vec e_z$ $v_0 = |\vec v_0| > 0$

force : poids $\vec P = m\vec g = m\vec a \Rightarrow \vec a = \vec g = g\vec e_z$ $g>0$

$\vec a = g\vec e_z \longrightarrow \underset{v_z(t)}{\vec v\,?} \longrightarrow \underset{z(t)}{\vec r\,?}$

$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} \to \vec v = \int \vec a\,dt = \int g\,\vec e_z\,dt = g t\,\vec e_z + \vec{cte}$

à $t=0$ $\vec v(0) = -v_0 \vec e_z = g\,0\,\vec e_z + \vec{cte} \Rightarrow \boxed{\vec v = g t\,\vec e_z - v_0\,\vec e_z}$

$z(t)$?

$v_z(t) = gt - v_0$

$z(t) = \frac{1}{2} g t^2 - v_0 t + z_0$

à $t=0$ $z(0) = z_0 = 0$

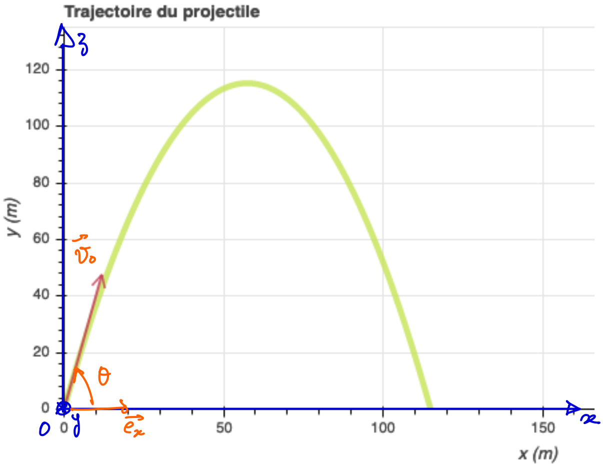
$$\boxed{z(t) = \frac{1}{2} g t^2 - v_0 t}$$

$\rightarrow z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t$

1- Choisir un repère et s'y tenir !

2- "Formules" dépendent du repère choisi

3 - Cas général



Conditions initiales :

à $t=0$ $\quad \vec{r}_0 = \vec{r}(0) = \vec{0} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 \begin{vmatrix} v_0 \cos\theta \\ 0 \\ v_0 \sin\theta \end{vmatrix}$

$\vec{P} = m\vec{g} \qquad \vec{g} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{vmatrix}$

$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} \qquad \vec{a} = \vec{g} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{vmatrix}$

$\vec{v} = \int \vec{a}\, dt \qquad \vec{v} \begin{vmatrix} A \\ B \\ -gt + C \end{vmatrix}$

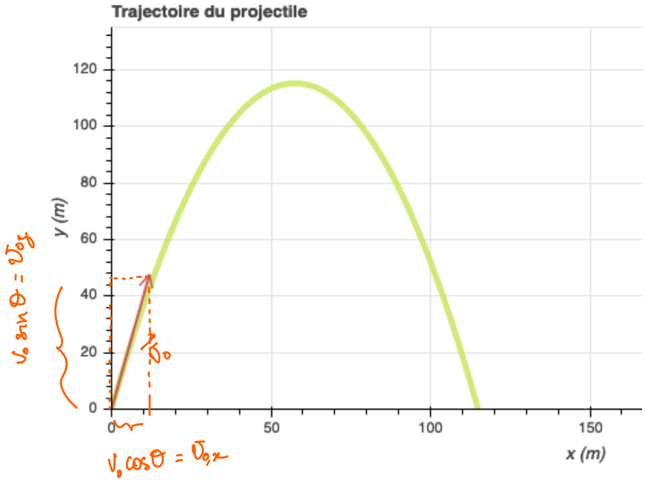
A, B & C constantes d'intégration.

$$\vec{v}\begin{vmatrix} A \\ B \\ -gt + C \end{vmatrix} \qquad \text{à } t=0 \quad \vec{v} = \vec{v}_0 \begin{vmatrix} v_0 \cos\theta & = A \\ 0 & = B \\ v_0 \sin\theta & = C \end{vmatrix} \qquad \boxed{\vec{v}\begin{vmatrix} v_0 \cos\theta \\ 0 \\ -gt + v_0 \sin\theta \end{vmatrix}}$$

$$\vec{r} = \int \vec{v}\,dt \qquad \vec{r}\begin{vmatrix} (v_0\cos\theta)\,t + D \\ E \\ -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)\,t + F \end{vmatrix} \qquad \text{à } t=0 \quad \vec{r}(0) = \vec{0} \begin{vmatrix} 0 & = D \\ 0 & = E \\ 0 & = F \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{r}\begin{vmatrix} (v_0\cos\theta)\,t \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\theta)\,t \end{vmatrix}}$$

$\forall t \quad y = 0$ la trajectoire reste dans le plan (O, x, z) C'est le plan contenant $\vec{v}_0$ et $\vec{g}$



$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -g \end{array} \right.$$

$$\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_0 \cos\theta \\ 0 \\ -gt + v_0 \sin\theta \end{array} \right.$$

$$\vec{r} \left| \begin{array}{l} (v_0 \cos\theta)\, t \\ 0 \\ -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\theta)\, t \end{array} \right.$$

équation horaire du mouvement

4 - Trajectoire, hauteur maximale, point d'impact

Chercher la trajectoire, c'est chercher z en fonction de x

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l}0\\0\\-g\end{array}\right.\qquad \vec{v}\left|\begin{array}{l}v_0\cos\theta\\0\\-gt+v_0\sin\theta\end{array}\right.\qquad \vec{r}\left|\begin{array}{l}(v_0\cos\theta)t = x(t)\\0\\-\frac{1}{2}gt^2+(v_0\sin\theta)t = z\end{array}\right.$$

équation paramétrique de la trajectoire

paramètre = temps

équation horaire

$$t = \frac{x}{v_0\cos\theta}$$

$$z(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2 + (\cancel{v_0}\sin\theta)\frac{x}{\cancel{v_0}\cos\theta}$$

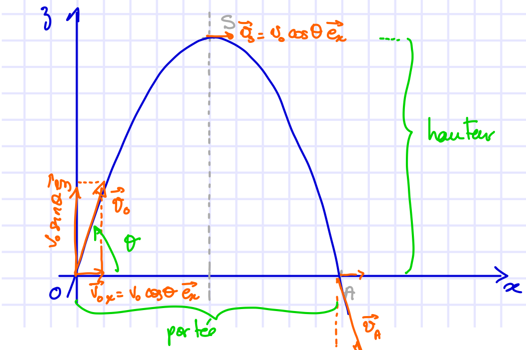
$$\boxed{z(x) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 + \tan\theta\, x}$$

$$z = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\theta}x^2 + \tan\theta\, x \quad = a x^2 + b x$$

$$a = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\theta} < 0$$

$$b = \tan\theta$$

trajectoire = parabole tournée vers le bas. passant par l'origine



but maintenant : obtenir les coordonnées de A et S en fonction de v_0 et θ

$$x_A = 2 x_S \quad \text{(symétrie)}$$

$\vec{r}_s \begin{vmatrix} x_s \\ 0 \\ z_s \end{vmatrix}$ $\quad \vec{v}_s \begin{vmatrix} v_0 \cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad \vec{v}(t) \begin{vmatrix} v_0 \cos\theta \\ 0 \\ -gt + v_0 \sin\theta \end{vmatrix}$ à t_s objet en s

$$\vec{v}(t_s) \begin{vmatrix} v_0 \cos\theta \\ 0 \\ -g t_s + v_0 \sin\theta \end{vmatrix} = \vec{v}_s \begin{vmatrix} v_0 \cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow t_s = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

$$\vec{r}(t) \begin{vmatrix} v_0 \cos\theta \, t \\ 0 \\ -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\theta) t \end{vmatrix} \quad \vec{r}(t_s) \begin{vmatrix} v_0 \cos\theta \, t_s \\ 0 \\ -\frac{1}{2} g t_s^2 + (v_0 \sin\theta) t_s \end{vmatrix} = \vec{r}_s \begin{vmatrix} x_s \\ 0 \\ z_s \end{vmatrix}$$

$$x_s = v_0 \cos\theta \, t_s = v_0 \cos\theta \, \frac{v_0 \sin\theta}{g} = \frac{v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g}$$

$$z_s = -\frac{1}{2} g \left[\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right]^2 + v_0 \sin\theta \, \frac{v_0 \sin\theta}{g} = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g}$$

Sommet S :

$$S \left| \begin{array}{l} \dfrac{v_0^2}{g} \sin\theta\cos\theta \\ 0 \\ \dfrac{v_0^2}{2g} \sin^2\theta \end{array} \right.$$

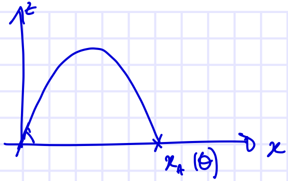
Point d'impact A

$$A \left| \begin{array}{l} 2\dfrac{v_0^2}{g} \sin\theta\cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

5 - Portée maximale ou atteindre une cible

On veut lancer le plus *loin* possible. A est le point d'impact :

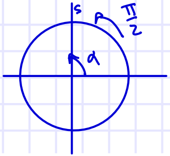
$$A \left| \begin{array}{l} 2\frac{v_0^2}{g}\sin\theta\cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$



variable = θ

$x_A(\theta) = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta\cos\theta = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$

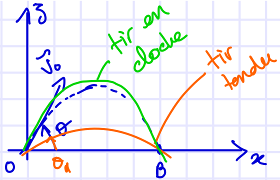
$\sin 2a = 2\sin a\cos a$



$\sin\frac{\pi}{2} = 1$ max de sinus

$\sin 2\theta = 1$ max si $2\theta = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\theta = \frac{\pi}{4} = 45°$

Atteindre une cible en B (x_B)



$B \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ x_B donné position de la cible.

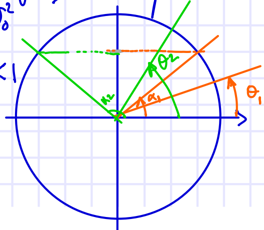
v_0 donné θ variable

avec θ et v_0 $\Rightarrow$ point d'impact $A \left| \begin{array}{l} \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta = x_B \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$

$$\sin 2\theta = \frac{x_B\, g}{v_0^2} = \sin \alpha$$

si $\frac{x_B\, g}{v_0^2} > 1 \Rightarrow$ pas de solution ; si $\frac{x_B\, g}{v_0^2} = 1$ seule solution $\theta = 45°$

si $\frac{x_B\, g}{v_0^2} < 1$



$\theta_1 = \frac{\alpha_1}{2}$

$\theta_1 \in [0, 45°[\rightarrow$ tir tendue

$\theta_2 \in]45°, 90°] \rightarrow$ tir en cloche

6 - Temps de vol

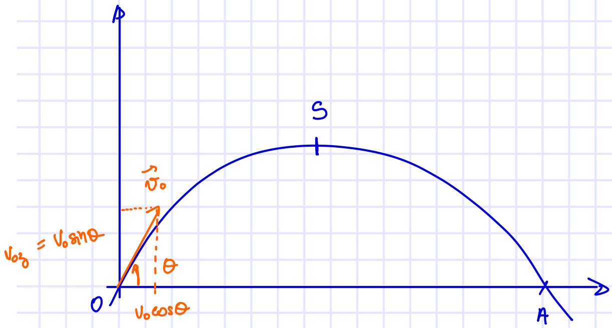
À quel temps t_A l'objet est-il en A ?

$$\vec{r}_A \left| \begin{array}{l} (v_0 \cos\theta)\, t_A \\ 0 \\ -\frac{1}{2} g t_A^2 + (v_0 \sin\theta)\, t_A \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} \frac{2 v_0^2}{g} \sin\theta \cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\cancel{v_0} \cancel{\cos\theta}\, t_A = \frac{2 v_0^{\cancel{2}}}{g} \sin\theta \cancel{\cos\theta}$$

$$t_A = 2 \left(\frac{v_0}{g} \right) \sin\theta. \qquad = 2 t_s$$

Analyse conceptuelle



$$S \left| \begin{array}{l} \frac{v_0}{g}\sin\theta\cos\theta \\ 0 \\ \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{v_{0z}^2}{2g} \end{array} \right.$$

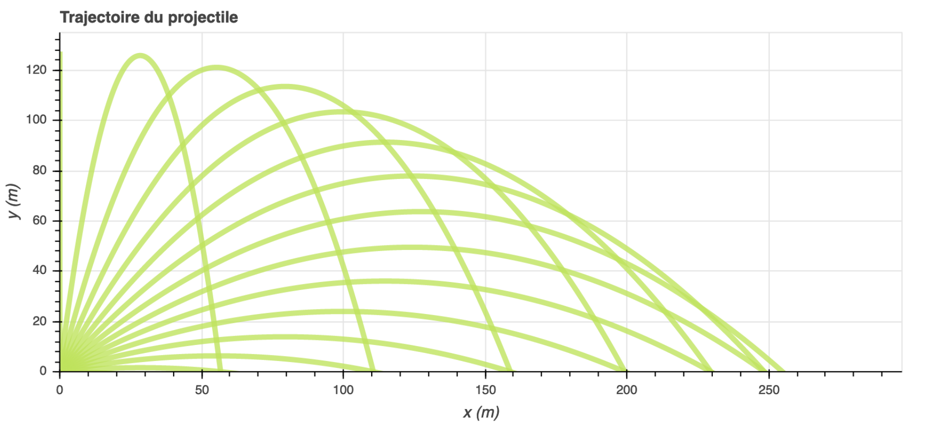
$$t_A = \frac{2v_0}{g}\sin\theta = \frac{2}{g} v_{0z}$$

$$z_s = \frac{v_{0z}^2}{2g} \Rightarrow v_{0z} = \sqrt{2g z_s}$$

$$t_A = \frac{2}{g}\sqrt{2g z_s} = 2\sqrt{\frac{2 z_s}{g}}$$

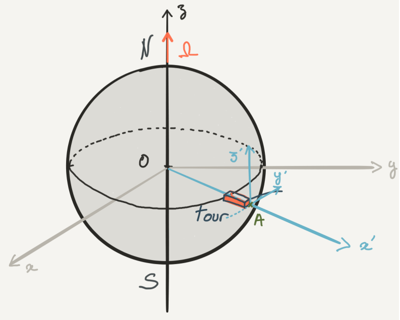
7 - Parabole de sureté

Parabole de sureté. Pour une vitesse initiale v_0 donnée, un projectile ne peut pas atteindre les points en dehors de la parabole de sureté.



8 - Effet de la rotation de la Terre : pierre qui tombe d’une tour

On considère qu’on lâche une pierre d’une hauteur *h* depuis une tour située à l’équateur. De quelle distance et dans quelle direction la pierre est-elle déviée ?

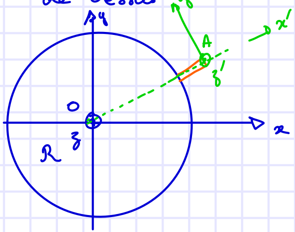


2 moyens d'analyser le problème

- "intuitive"
- complète $\vec{a}_c$

Calcul "intuitif", ne prenant en compte que les vitesses de rotations :

" de dessus "



$\vec{v}_i = (R+h)\Omega\, \vec{e_y}'$

$\vec{v}_s = R\,\Omega\, \vec{e_y}'$

$t_{chute} = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

R : rayon de la Terre
h : hauteur tour

$\vec{D}_{pierre}$ selon $\vec{e_y}'$

$\vec{D}_{pierre} = \vec{v}_i\, t_{chute} = (R+h)\Omega\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\, \vec{e_y}'$

$\vec{D}_{sol} = \vec{v}_s\, t_{chute} = R\,\Omega\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\, \vec{e_y}'$

$$\vec{D}_{déviation} = \vec{D}_{pierre} - \vec{D}_{sol} = (R+h)\Omega\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\vec{e_y}' - R\,\Omega\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\vec{e_y}'$$

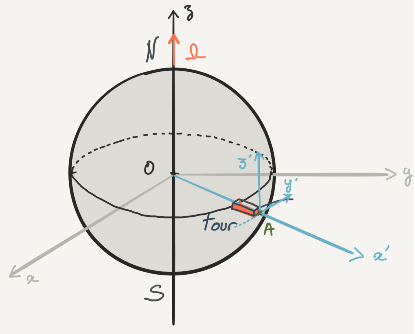
$$= h\,\Omega\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\vec{e_y}'$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7{,}3.10^{-5}\ rad.s^{-1}$$

$h = 300m \Rightarrow D_{déviation} \simeq 17cm$

Calcul complet

On prend un repère $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ fixe avec O centre de la Terre et un repère lié à la tour $\mathcal{R}'(A, x', y', z')$. A est le sommet de la tour (point d'où on lâche la pierre).



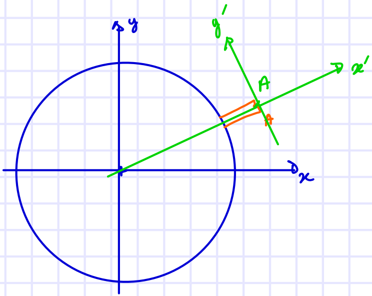
Dans $\mathcal{R}$ $\quad \sum \vec{F} = m\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = m\vec{g}$

$\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{e}_z = \Omega\,\vec{e}_{z'}$

$\vec{g} = -g\,\vec{e}_{x'}$

$$\vec{a}_R(P) = \vec{a}_{R'}(P) + \underbrace{\vec{a}_R(A)}_{\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{OA})} + \cancel{\dot{\vec{\Omega}}\wedge\vec{AP}}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{AP}) + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_{R'}(P)$$

$$\underbrace{\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{OA}) + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{AP})}_{\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{OP})}$$



$$\vec{a}_{R'}(P) = \vec{a}_R(P) - \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{OP}) - 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_{R'}(P)$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_R(P) = m\vec{g}$$

$$\vec{a}_{R'}(P) = \underbrace{\vec{g} - \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{OP})}_{-g_{eff}\,\vec{e}_{x'}} - 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_{R'}(P)$$

$$- 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_{R'}(P)$$

$$\vec{a}_{R'}(P) = -g_{eff}\,\vec{e}_{x'} - 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_{R'}(P)$$

$$\int_{t=0}^{t} \vec{a}_{R'}(P)\,dt = \int_{t=0}^{t} -g_{eff}\,\vec{e}_{x'}\,dt - \int_{t=0}^{t} 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{R'}(P)\,dt$$

$$\vec{v}_{R'}(P) - \vec{v}_{R'}(P)(t=0) = -g_{eff}\,t\,\vec{e}_{x'} - 2\vec{\Omega} \wedge \left(\vec{r}_{R'}(t) - \vec{r}_{R'}(t=0)\right)]$$

$$\vec{v}_{R'}(P) = -g_{eff}\,t\,\vec{e}_{x'} - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{AP} \qquad \vec{v}_{R'}(P)\begin{vmatrix}\dot{x}'\\ \dot{y}'\\ \dot{z}'\end{vmatrix} \qquad \vec{\Omega}\begin{vmatrix}0\\0\\\Omega\end{vmatrix} \qquad \vec{AP}\begin{vmatrix}x'\\y'\\z'\end{vmatrix}$$

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{AP} \qquad \vec{\Omega}\begin{vmatrix}0\\0\\\Omega\end{vmatrix} \wedge \vec{AP}\begin{vmatrix}x'\\y'\\z'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-\Omega y'\\+\Omega x'\\0\end{vmatrix} \qquad -2\vec{\Omega} \wedge \vec{AP}\begin{vmatrix}2\Omega y'\\-2\Omega x'\\0\end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_{R'}(P)\begin{vmatrix}\dot{x}'\\ \dot{y}'\\ \dot{z}'\end{vmatrix} = g_{eff}\,t\,\vec{e}_{x'}\begin{vmatrix}-g_{eff}t\\0\\0\end{vmatrix} + \left(-2\vec{\Omega} \wedge \vec{AP}\right)\begin{vmatrix}2\Omega y'\\-2\Omega x'\\0\end{vmatrix}$$

$$\begin{cases}\dot{x}' = -g_{eff}\,t + 2\Omega y'\\ \dot{y}' = -2\Omega x'\\ \dot{z}' = 0\end{cases}$$

$\dot{z}' = 0 \Rightarrow z' = cte = z'(t=0) = 0 \qquad z' = 0$ pas de déviation N_S

$\dot{x}' = -g_{eff}\,t + \cancel{2\Omega y'}$ négligeable devant $g_{eff}\,t$ $\Rightarrow \dot{x}' = -g_{eff}\,t$

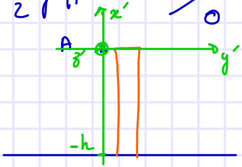
$\dot{y}' = -2\Omega x'$

$\dot{y}' = \cancel{-2}\,\Omega\,\cancel{\left(-\frac{1}{2}\right)} g_{eff}\,t^2 = \Omega\, g_{eff}\, t^2$

$x' = -\frac{1}{2} g_{eff}\, t^2 + \cancel{x'(t=0)}$ 0

$y' = \Omega\, g_{eff}\,\frac{1}{3} t^3 + \cancel{y'(t=0)}$ 0

$\vec{AP} \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{2} g_{eff}\, t^2 \\ \frac{\Omega g_{eff}}{3} t^3 \\ 0 \end{array} \right.$



t_f = temps auquel la pierre est au sol

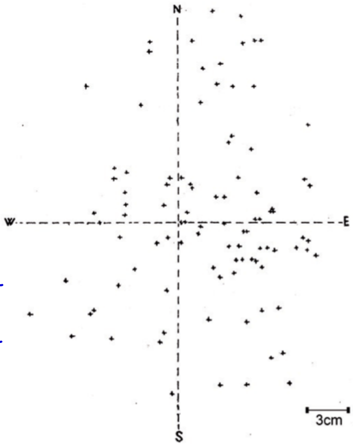
$-h = -\frac{1}{2} g_{eff}\, t_f \Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2h}{g_{eff}}}$

Déviation $= y'(t_f) = \frac{\Omega g_{eff}}{3} t_f^3 = \frac{\Omega \cancel{g_{eff}}}{3}\,\frac{2h}{\cancel{g_{eff}}}\sqrt{\frac{2h}{g_{eff}}}$

Déviation $= \frac{2}{3}\Omega h \sqrt{\frac{2h}{g_{eff}}}$

Ferdinand Reich 1799–1882

Expérience en 1833 ; $h = 158\text{m}$ $\lambda = 51°$



Mesure ≃ 2,5 cm

Théorie ≃ 3 cm