II. Référentiel accélérés

Prof. Cécile Hébert

20 juillet 2021

Plan du cours

I - Cinématique
II - Référentiel accélérés
III - Lois de Newton
IV - Balistique – effet d'une force constante et uniforme
V - Forces ; application des lois de Newton
VI - Travail, Energie, principes de conservation
VII - Chocs, systèmes de masse variable
VIII - Oscillateur harmonique
IX - Moment cinétique ; Gravitation
X - Solide indéformable
XI - Application du solide indéformable

Table des matières

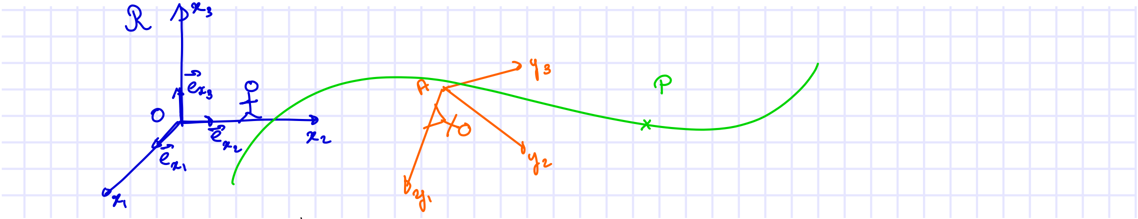
1. Introduction
2. Position vitesse et accélération
3. Analyse et cas particuliers

1. Introduction et notation

Soient un référentiel $\mathcal{R}$ fixe, muni du repère cartésien $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$

un référentiel $\mathcal{R}'$ muni du repère cartésien $(A, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ en mouvement dans $\mathcal{R}$.

On notera $\vec{e}_{x_i}$ respectivement $\vec{e}_{y_i}$ les vecteurs unitaires de ces deux repères.



Dans $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{OP} = \sum_i x_i \vec{e}_{x_i}$ $\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \sum_i \dot{x}_i \vec{e}_{x_i}$ $\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \sum_i \ddot{x}_i \vec{e}_{x_i}$

Dans $\mathcal{R}'$: $\overrightarrow{AP} = \sum_i y_i \vec{e}_{y_i}$ $\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) = \sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i}$ $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = \sum_i \ddot{y}_i \vec{e}_{y_i}$

On peut séparer le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ en deux composantes : une rotation et une translation.

La translation donne le mouvement de A dans $\mathcal{R}$ et la rotation la rotation des axes (y_j) par rapport aux axes (x_i). On appelle $\vec{\omega}$ le vecteur rotation. $\vec{\omega}$ quelconque $\vec{\omega}(t)$!

Les vecteurs $\vec{e}_{y_i}$ changent dans $\mathcal{R}$. On obtient leur dérivée par :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{y_j} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_{y_j} = \dot{\vec{e}}_{y_i}$$

position dans $R \Leftrightarrow$ position dans R' $\quad \vec{v}_R(P) \leftrightarrow \vec{v}_{R'}(P) \quad \vec{a}_R(P) \leftrightarrow \vec{a}_{R'}(P)$

2. Position, vitesse et accélération

P déplace dans $\mathcal{R}'$ $(A\ y_1\ y_2\ y_3)$ $\mathcal{R}'$ mobile dans $\mathcal{R}$ $\mathcal{R}\ (O,\ x_1\ x_2\ x_3)$

$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$ position de P dans $\mathcal{R}$ = position de A dans $\mathcal{R}$ + position de P dans $\mathcal{R}'$

$$\frac{d}{dt}(\vec{OP}) = \frac{d}{dt}(\vec{OA} + \vec{AP})$$

$$\vec{v}_R(P) = \frac{d}{dt}(\vec{OA}) + \frac{d}{dt}(\vec{AP}) = \vec{v}_R(A) + \frac{d}{dt}\sum_i y_i \vec{e}_{y_i} = \vec{v}_R(A) + \sum_i \frac{d}{dt}(y_i \vec{e}_{y_i})$$

$$= \vec{v}_R(A) + \sum_i \left[\dot{y}_i \vec{e}_{y_i} + y_i \dot{\vec{e}}_{y_i}\right] = \vec{v}_R(A) + \vec{v}_{R'}(P) + \sum_i y_i \vec{\omega} \wedge \vec{e}_{y_i}$$

$$= \vec{v}_R(A) + \vec{v}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge \sum_i y_i \vec{e}_{y_i}$$

$$\vec{v}_R(P) = \vec{v}_R(A) + \vec{v}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge \vec{AP}$$

$$\vec{v}_R(P) = \vec{v}_R(A) + \vec{v}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge \vec{AP} \quad \rightarrow \quad \text{dérivation}$$

$$\vec{a}_R(P) = \vec{a}_R(A) + \frac{d}{dt}\left[\sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i}\right] + \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega} \wedge \sum_i y_i \vec{e}_{y_i}\right]$$

$$= \vec{a}_R(A) + \sum_i \frac{d}{dt}\left(\dot{y}_i \vec{e}_{y_i}\right) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \sum_i y_i \vec{e}_{y_i} + \vec{\omega} \wedge \sum_i \frac{d}{dt}\left(y_i \vec{e}_{y_i}\right)$$

$$= \vec{a}_R(A) + \sum_i \left(\ddot{y}_i \vec{e}_{y_i} + \dot{y}_i \dot{\vec{e}}_{y_i}\right) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AP} + \vec{\omega} \wedge \sum_i \left(\dot{y}_i \vec{e}_{y_i} + y_i \dot{\vec{e}}_{y_i}\right)$$

$$= \vec{a}_R(A) + \sum_i \ddot{y}_i \vec{e}_{y_i} + \sum_i \dot{y}_i \vec{\omega} \wedge \vec{e}_{y_i} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AP} + \vec{\omega} \wedge \sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i} + \vec{\omega} \wedge \left[\sum_i y_i \vec{\omega} \wedge \vec{e}_{y_i}\right]$$

$$= \vec{a}_R(A) + \vec{a}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge \sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AP} + \vec{\omega} \wedge \sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i} + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge \sum_i y_i \vec{e}_{y_i}\right]$$

$$\vec{a}_R(P) = \vec{a}_R(A) + \vec{a}_{R'}(P) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AP} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{AP}\right)$$

Résumé :

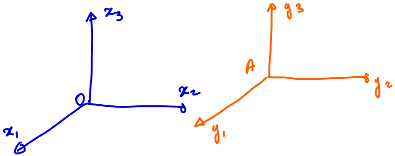
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

3. Analyse et cas particuliers

Cas particulier 1 : $\mathcal{R}'$ a un mouvement de translation uniforme dans $\mathcal{R}$



A a un mouvement rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}$

pas de rotation de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$

$\vec{v}_R(A) = \overrightarrow{cte}$ $\quad \vec{a}_R(A) = \vec{0}$ $\qquad \vec{\omega} = \vec{0}$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \underbrace{\cancel{\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}}}_{\vec{0}}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \underbrace{\cancel{\vec{a}_{\mathcal{R}}(A)}}_{\vec{0}} + \underbrace{\cancel{\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP}}}_{\vec{0}} + \underbrace{\cancel{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP})}}_{\vec{0}} + \underbrace{\cancel{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)}}_{\vec{0}}$$

Cas particulier 1 : $\mathcal{R}'$ a un mouvement de translation uniforme dans $\mathcal{R}$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(A) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) \qquad (1)$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)$$

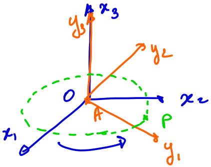
(1) Composition des vitesses dans un mouvement de translation

↳ Chapitre 3 = lois de Newton   lien entre force et accélération
elles s'exprimeront de la même manière dans R et R'

R' sera aussi un référentiel galiléen.

Cas particulier 2 :

$\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$ et P fixe dans $\mathcal{R}'$



Ox_3 = axe de rotation

Rotation de $(A\,y_1)$ et $(A\,y_2)$

P fixe dans $\mathcal{R}'$ ⇒ décrit un mvt circulaire

↳ et uniforme

$\vec{\omega} =$ cte

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \underbrace{\cancel{\vec{v}_{\mathcal{R}}(A)}}_{\vec{0}} + \underbrace{\cancel{\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)}}_{\vec{0}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \underbrace{\cancel{\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)}}_{\vec{0}} + \underbrace{\cancel{\vec{a}_{\mathcal{R}}(A)}}_{\vec{0}} + \underbrace{\cancel{\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP}}}_{\vec{0}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + \underbrace{\cancel{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)}}_{\vec{0}}$$

Cas particulier 2 :

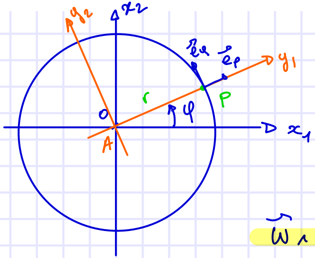
$\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$ et P fixe dans $\mathcal{R}'$
P a donc un mouvement circulaire uniforme dans $\mathcal{R}$.

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$$

$\vec{\omega} = \omega \, \vec{e}_{y_3}$

$\overrightarrow{OP} = r \, \vec{e}_{y_1}$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})$$



$\vec{e}_\rho = \vec{e}_{y_1}$

$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_{y_2}$

$\vec{v}_R(P) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} = \omega \vec{e}_{y_3} \wedge r \vec{e}_{y_1} = r\omega \, \vec{e}_{y_2}$

$\vec{v}_R(P) = r\omega \vec{e}_\varphi$

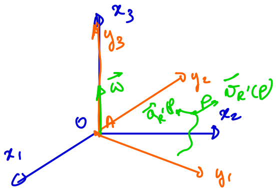
$\vec{a}_R(P) = \omega \vec{e}_{y_3} \wedge r\omega \vec{e}_{y_2} = r\omega^2 (-\vec{e}_{y_1}) = -r\omega^2 \vec{e}_{y_1}$

$= -r\omega^2 \vec{e}_\rho$

$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})$ est donc l'accélération centripète

Cas particulier 3 : $\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$

P a un mouvement quelconque dans R'



$\vec{\omega} = cte$

$\vec{v}_{R'}(P) \neq \vec{0}$ $\vec{a}_{R'}(P) \neq \vec{0}$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \underbrace{\cancel{\vec{v}_{\mathcal{R}}(A)}}_{\vec{0}} + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \underbrace{\cancel{\vec{a}_{\mathcal{R}}(A)}}_{\vec{0}} + \underbrace{\cancel{\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP}}}_{\vec{0}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$$

Cas particulier 3 : $\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation uniforme dans $\mathcal{R}$ avec $A = O$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})}_{\text{accélération centripète}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)}_{\text{accélération de Coriolis}}$$

accélération relative

P se déplace dans R'
<u>et</u> R' en rotation dans R

Nomenclature dans le cas général

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \underbrace{\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P)}_{\text{accélération relative}} + \underbrace{\vec{a}_{\mathcal{R}}(A) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP})}_{\text{accélération d'entraînement}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)}_{\text{Accélération de Coriolis}}$$

P est entraîné par l'accélération de R' dans R.