I - Cinématique

Prof. Cécile Hébert

20 mai 2021

Plan du cours

Table des matières

Cinématique = *description des mouvements*. Nous aurons besoins de références pour décrire mathématiquement les mouvements.

Référentiel : système de référence par rapport auquel on mesure le mouvement

Origine du référentiel : un point particulier *fixe* dans le référentiel par rapport auquel on définira la position d'un objet.

Repère : systèmes de vecteurs unitaires formant un trièdre orthonormé direct, par exemple $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ qui sert à décomposer mathématiquement le mouvement. *Attention !!* le repère n'est pas forcément fixe dans le référentiel, et dans un même référentiel, on peut utiliser plusieurs repères.

Coordonnées : Ensemble des grandeurs qui permettent de repérer la position d'un point. Exemple : coordonnées cartésiennes ; coordonnées GPS...

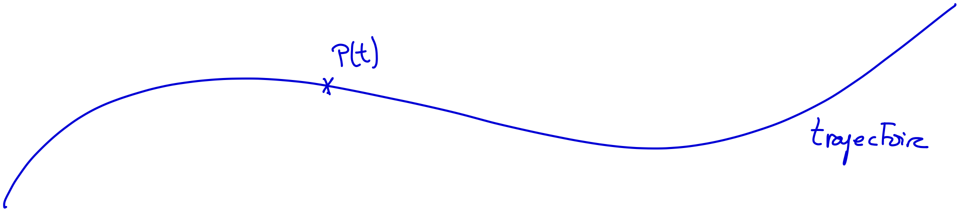
I - 2 Trajectoire, vitesse, accélération

Pour l'instant, l'objet étudié est considéré comme un *point matériel P*.

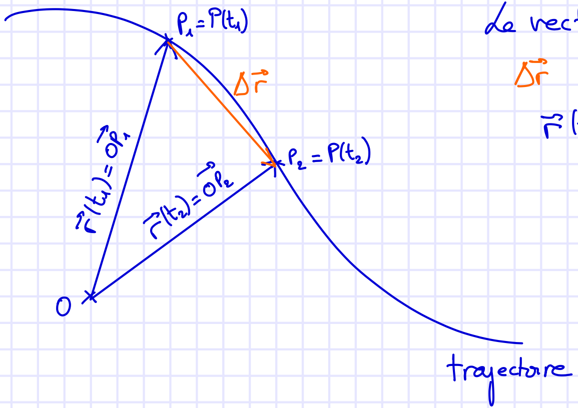
But : Décrire le mouvement de cet objet. Plus tard, prédire sa position.

Nous utiliserons pour ce faire sa position, sa vitesse et son accélération, mais aussi sa trajectoire.

La trajectoire est l'ensemble des points de l'espace par les quels passe cet objet (point) au cours du temps.



La position se mesure par rapport à l'origine fixe du référentiel (généralement O. On repère ce point par un *vecteur position* $\vec{r}(t) = \vec{OP}$.



Le vecteur position dépend du temps.

$\Delta\vec{r}$ vecteur déplacement entre t_1 et t_2

$\vec{r}(t_1) + \Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2)$

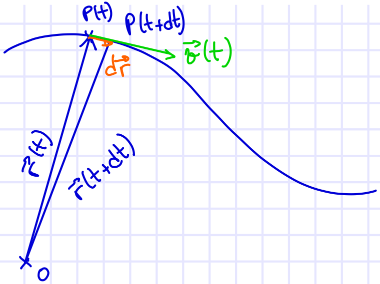
$\Delta\vec{r} = \vec{P_1P_2} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$

$\Delta t = t_2 - t_1$

vitesse moyenne entre t_2 et t_1

$\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

Vitesse instantanée



$$\vec{v}(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$d\vec{r} = \vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)}{dt}$$

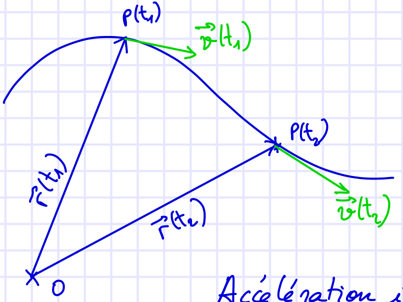
dérivée par rapport au temps du vecteur position

$\vec{v}(t)$ est colinéaire à $d\vec{r}$

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire

Notation : "dérivée par rapport au temps" = "point" $\qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}}$

Accélération instantanée



$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Accélération instantanée $\vec{a} = \lim\limits_{dt\to 0} \dfrac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt}$

Le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$ "r - deux - points"

Résumé :

$$\text{position : } \vec{r}(t) = \vec{OP}$$

$$\text{vitesse : } \vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}$$

$$\text{accélération : } \vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

La vitesse *scalaire* est la norme du vecteur vitesse, $v = |\vec{v}|$

L'accélération *scalaire* est la norme du vecteur accélération $a = |\vec{a}|$

$\boxed{\text{Attention !}}$

$\vec{v} \rightarrow \dfrac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \left|\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right|$ norme de la dérivée du vecteur vitesse

$\vec{v}$

$\downarrow$

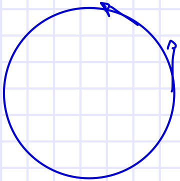
$|\vec{v}|$

$\downarrow$

dérivée de la norme du vecteur vitesse $\dfrac{d|\vec{v}|}{dt}$

$\neq$

Les deux grandeurs sont différentes



Pour pouvoir continuer, il faut maintenant faire le choix du système de coordonnées. Pour chaque système de coordonnées, un repère permet d'obtenir les composantes des vecteurs. Nous utiliserons uniquement des systèmes de coordonnées qui sont liés à un repère orthonormé direct.

Dans le cours (et dans la suite des études) :

– coordonnées cartésiennes

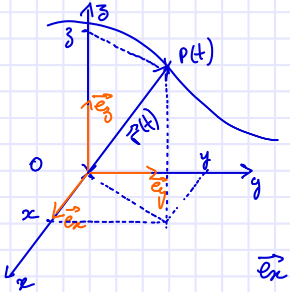
– coordonnées polaires

– coordonnées curvilignes (repère de Frenet)

– coordonnées cylindriques

– coordonnées sphériques

3 - Coordonnées cartésiennes



$$|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$$

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ trièdre orthonormé direct

$\vec{r}(t) = \vec{OP}$ vecteur position

$P(x, y, z)$ $\quad \vec{r} = \vec{OP} \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right.$ $\quad \vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z\right)$$

$\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ fixes

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z \qquad \vec{v} \left| \begin{array}{l} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{array} \right.$$

⚠ attention x, y et z sont des fonctions du temps. $x = x(t)$ "implicite"

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \qquad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\left(v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z\right) = \dot{v}_x \vec{e}_x + \dot{v}_y \vec{e}_y + \dot{v}_z \vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y + \ddot{z}\,\vec{e}_z \qquad \vec{a}\begin{cases} \ddot{x} = \dot{v}_x \\ \ddot{y} = \dot{v}_y \\ \ddot{z} = \dot{v}_z \end{cases}$$

Exemple : $\vec{r}(t)\begin{cases} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ kt \end{cases}$ R, ω et k constantes

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} R\omega(-\sin(\omega t)) = -R\omega\sin\omega t \\ R\omega\cos(\omega t) \\ k \end{cases} \qquad \vec{v}(t)\begin{cases} -R\omega\sin\omega t \\ R\omega\cos\omega t \\ k \end{cases} \qquad \vec{a}(t)\begin{cases} -R\omega^2\cos(\omega t) \\ -R\omega^2\sin(\omega t) \\ 0 \end{cases}$$

Résumé

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

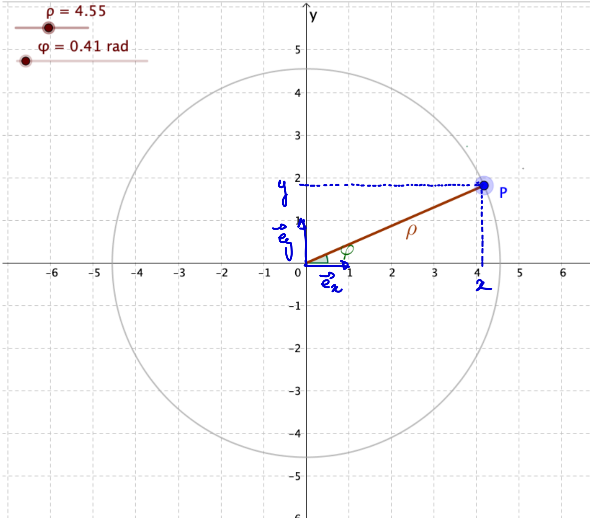
$$\vec{r} \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right. \qquad \vec{v} \left| \begin{array}{l} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{array} \right. \qquad \vec{a} \left| \begin{array}{l} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{array} \right.$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

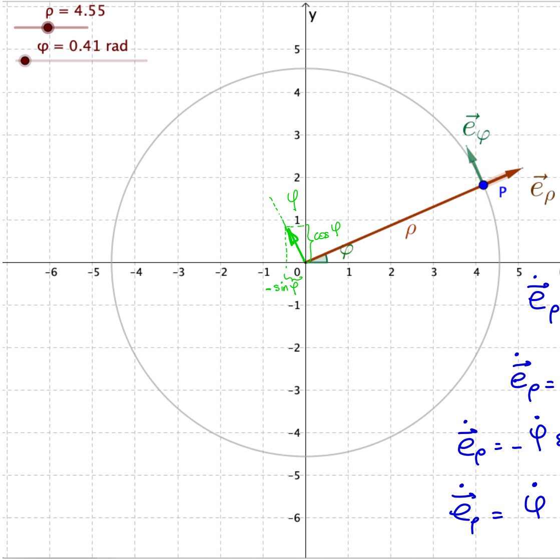
4 - Coordonnées polaires



$$P \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \end{array} \right.$$

$$\varphi \in [0, 2\pi[$$

$$\rho \in [0, \infty[$$



$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y$$

$$|\vec{e}_\rho| = \sqrt{\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{1}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y$$

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \frac{d}{dt}\left[\cos\varphi(t)\,\vec{e}_x + \sin\varphi(t)\,\vec{e}_y\right]$$

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \frac{d\varphi}{dt}\left[-\sin\varphi(t)\right]\vec{e}_x + \frac{d\varphi}{dt}\cdot\left[\cos(\varphi(t))\right]\vec{e}_y$$

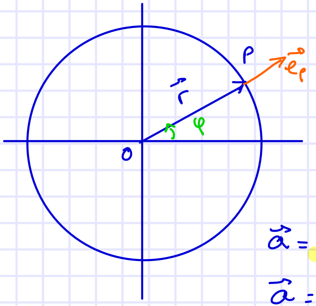
$$\dot{\vec{e}}_\rho = -\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e}_x + \dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{e}_y = \dot{\varphi}\Big[\underbrace{-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y}_{\vec{e}_\varphi}\Big]$$

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \qquad \dot{\vec{e}}_\varphi\ ?$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \Rightarrow \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{e}_x + \dot{\varphi}[-\sin\varphi]\vec{e}_y = -\dot{\varphi}\underbrace{[\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y]}_{\vec{e}_\rho}$$

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \qquad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho$$

Le but est d'exprimer $\vec{r}$ $\vec{v}$ et $\vec{a}$ avec ρ, φ, $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$



$$\vec{r} = \rho\,\vec{e}_\rho$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}[\rho\,\vec{e}_\rho] = \frac{d}{dt}\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\vec{e}}_\rho$$

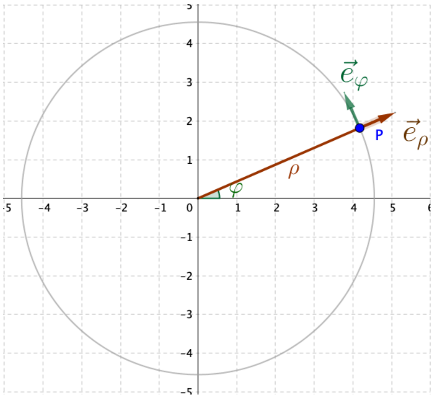
$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\,\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\,\dot{\vec{e}}_\varphi$$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{\rho}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}(-\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho)$$

$$\vec{a} = [\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2]\,\vec{e}_\rho + [2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}]\,\vec{e}_\varphi$$

Résumé

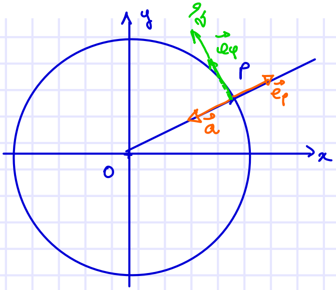


$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y$$

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$
$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho$$

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \rho\vec{e}_\rho \\
\vec{v} &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\
\vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

Exemple : mouvement circulaire uniforme



Rayon R $\Rightarrow$ $\rho = R = cte$

uniforme $\varphi = \omega t$ $\omega = cte$

$\rho = cte \Rightarrow \dot{\rho} = 0$ et $\ddot{\rho} = 0$, $\dot{\varphi} = \omega$ $\ddot{\varphi} = 0$

$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho = R \vec{e}_\rho$

$\vec{v} = \underbrace{\cancel{\dot{\rho} \vec{e}_\rho}}_{0} + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = R \omega \vec{e}_\varphi$

$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi = -\rho \dot{\varphi}^2 \vec{e}_\rho = \underbrace{-R\omega^2 \vec{e}_\rho}_{\text{accélération centripète}}$

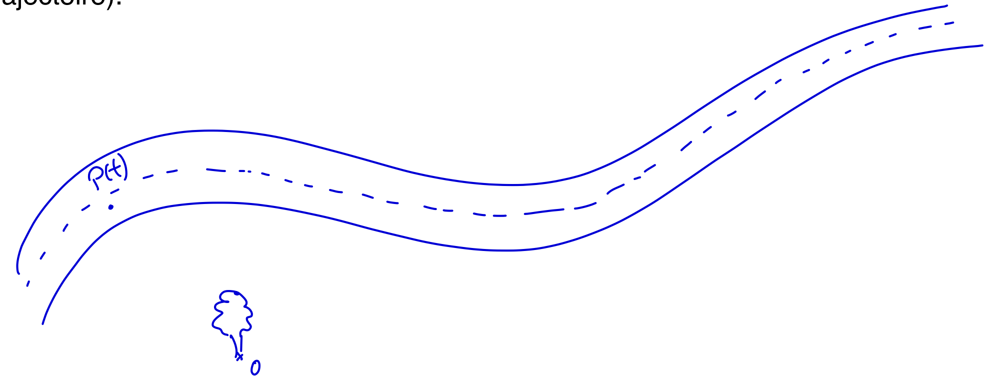
$|\vec{v}| = v = R\omega$ $|\vec{a}| = R\omega^2 = a = \dfrac{v^2}{R}$

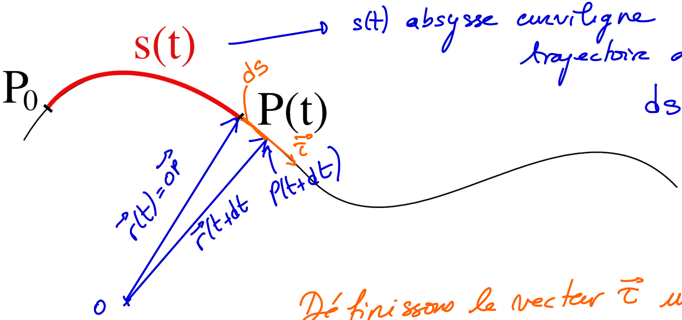
$\omega = 2\pi f$ f. fréquence en tours par seconde ω: pulsation.

5 - Coordonnées curviligne (repère de Frenet)

Cas général Mouvement dans le plan

Point de vue de l'automobiliste (point matériel) sur une route de plaine (trajectoire).





s(t) absysse curviligne : longueur parcourue sur la trajectoire depuis P_0

$ds = |d\vec{r}|$ distance parcourue entre t et t+dt

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t) = |\vec{v}|$$

Définissons le vecteur $\vec{\tau}$ unitaire, tangent à la trajectoire, dans la direction de $\vec{v}$

$$\vec{v} = v\vec{\tau} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = \dot{s}\vec{\tau}$$

Résumé

$s(t)$ mesure la *longueur* parcourue le long de la trajectoire

la vitesse *scalaire* est

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

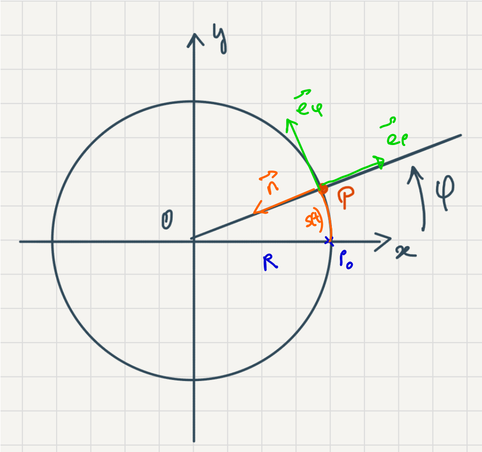
la vitesse *vectorielle* est

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau}$$

avec $\vec{\tau}$ vecteur *unitaire tangent à la trajectoire pointant dans la direction du mouvement* au point considéré.

$\vec{a}$??

Cas d’un mouvement circulaire quelconque, trajectoire de rayon R



$$s(t) = R\,\varphi(t)$$

$$\vec{v} = v\,\vec{e}_\varphi \qquad \vec{a} = (\cancel{\ddot{\rho}} - \rho\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + \cancel{2\dot{\rho}\dot{\varphi}})\,\vec{e}_\varphi$$

$$\rho = R = cte \qquad \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$$

$$\vec{a} = -R\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_\rho + R\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\tau} = \vec{e}_\varphi$$

Définissons $\vec{n}$ unitaire, perpendiculaire à $\vec{\tau}$ pointant vers le centre du cercle

ici : $\vec{n} = -\vec{e}_\rho$

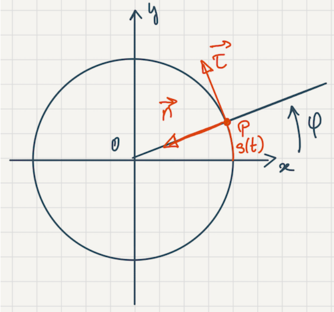
$$\vec{a} = R\dot{\varphi}^2\,\vec{n} + R\ddot{\varphi}\,\vec{\tau} \qquad \vec{v} = v\,\vec{\tau}$$

$\vec{\tau}$ tangent à la trajectoire dans le sens du mouvement et $\vec{n}$ pointant vers le centre du cercle, tous deux unitaires.

$\vec{a} = R\dot{\varphi}^2\vec{n} + R\ddot{\varphi}\vec{\tau}$

$s = R\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{s}{R} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\dot{s}}{R} = \frac{v}{R}$, $\ddot{\varphi} = \frac{dv}{dt}\frac{1}{R}$

$\vec{a} = \cancel{R}\frac{v^2}{R^{\cancel{2}}}\vec{n} + \cancel{R}\frac{dv}{dt}\frac{1}{\cancel{R}}\vec{\tau}$



$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

$$v(t) = R\dot{\varphi}(t) = R\omega$$

$\dot{\varphi} = \omega(t)$ *vitesse angulaire* en rad·s^{-1} $\dot{\omega} = \alpha(t)$ *accélération angulaire* en rad·s^{-2}.

Mouvement circulaire uniforme

Vitesse scalaire constante ; vitesse angulaire constante

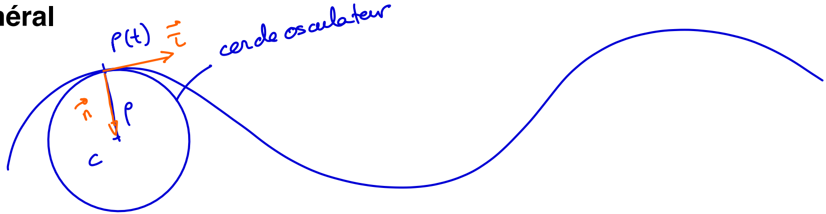
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau} \qquad \vec{a}(t) = \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{v}{R} = \text{cte}$$

ω *pulsation*. $\omega = 2\pi f$ avec f *fréquence* (en tours/s)

Cas général



Soit le cercle osculateur à la trajectoire au point considéré. Il a un rayon ρ.
Soient $\vec{\tau}$ tangent à la trajectoire dans le sens du mouvement et $\vec{n}$ pointant vers le centre du cercle osculateur, tous deux unitaires.

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v}(t) &= v(t)\vec{\tau} \\ \vec{a}(t) &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} \end{aligned}}$$

La composante selon $\vec{\tau}$ est l'accélération tangentielle $\vec{a}_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$.

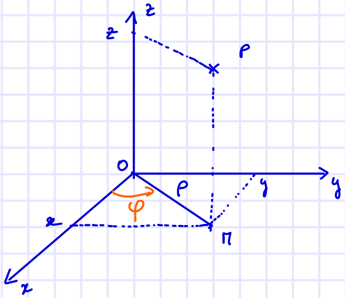
La composante selon $\vec{n}$ est l'accélération normale ou centripète $\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$.

L'accélération tangentielle provoque une variation de la vitesse scalaire ; l'accélération normale provoque une variation de la *direction* de la vitesse.

6 - Coordonnées cylindriques

Adaptées pour certains mouvements ou certaines symétries.

Coordonnées polaires pour (x, y) + axe z.

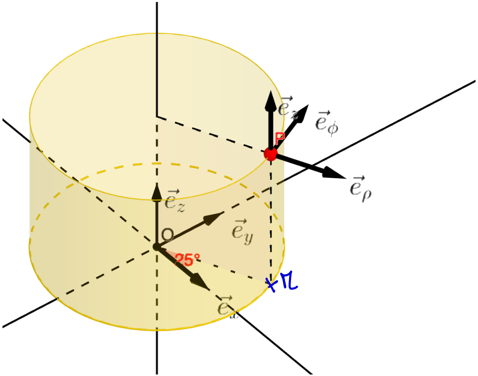


$P \left(\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right.$ en cartésiennes

M a comme coordonnés polaires (ρ, φ)

P a comme coordonnés cylindriques (ρ, φ, z)

$\varphi \in [0, 2\pi[$ $\quad \rho \in [0, \infty[$ $\quad z \in]-\infty, +\infty[$



$P(x, y, z)$ cartésiennes $P(\rho, \varphi, z)$

vecteurs de base cylindriques $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$

$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y$ $\quad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y$

$\vec{e}_z = \vec{e}_z$

$\dot{\vec{e}}_\rho = \dot\varphi\, \vec{e}_\varphi \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot\varphi\, \vec{e}_\rho \quad \dot{\vec{e}}_z = \vec{0}$

$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$

$\vec{r} = \vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP}$

$= \rho\, \vec{e}_\rho + z\, \vec{e}_z$

$\vec{r} = \rho\, \vec{e}_\rho + z\, \vec{e}_z$

$\vec{v}$? $\quad \vec{a}$

$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left[\rho\, \vec{e}_\rho + z\, \vec{e}_z\right]$

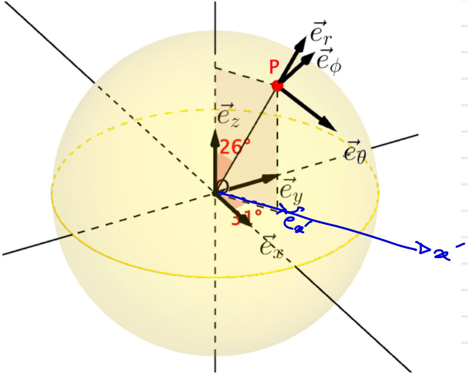
$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left[\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z\right] = \dot\rho\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vec{e}}_\rho + \dot z\vec{e}_z + z\cancel{\dot{\vec{e}}_z}^{\,\vec{0}} \qquad \dot{\vec{e}}_\rho = \dot\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$= \dot\rho\vec{e}_\rho + \rho\dot\varphi\vec{e}_\varphi + \dot z\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left[\vec{v}\right] = \frac{d}{dt}\left[\dot\rho\vec{e}_\rho + \rho\dot\varphi\vec{e}_\varphi + \dot z\vec{e}_z\right] = \underbrace{\text{"accélération en polaires"}}_{(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi)\vec{e}_\varphi} + \ddot z\vec{e}_z \rightarrow + \ddot z\vec{e}_z$$

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z \\
\vec{v} &= \dot\rho\vec{e}_\rho + \rho\dot\varphi\vec{e}_\varphi + \dot z\vec{e}_z \\
\vec{a} &= (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi)\vec{e}_\varphi + \ddot z\vec{e}_z
\end{aligned}$$

7 Coordonnées sphériques



P. cartésiennes (x,y,z) Sphériques (r,θ,φ)

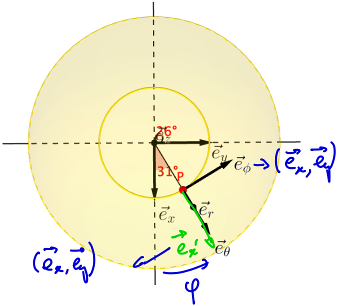
$(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$

$r \in [0,\infty[$; $\theta \in [0,\pi[$ $\varphi \in [0,2\pi[$

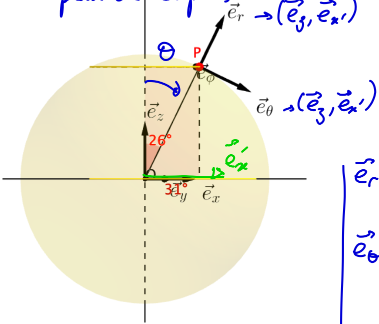
$\varphi = (\widehat{\vec{e}_x,\vec{e}_{x'}})$ $\theta = (\vec{e}_z,\vec{e}_r)$

$\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ en cartésiennes ?

dessus



"plan de la porte"



$\Rightarrow \vec{e}_r = \cos\theta\, \vec{e}_z + \sin\theta\, \vec{e}_x\,'$

$\vec{e}_\theta = \cos\theta\, \vec{e}_x\,' - \sin\theta\, \vec{e}_z$

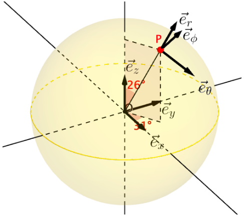
$\vec{e}_r = \sin\theta \left[\cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y\right] + \cos\theta\, \vec{e}_z$

$\vec{e}_\theta = \cos\theta \left[\cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y\right] - \sin\theta\, \vec{e}_z$

$\vec{e}_\varphi = \cos\varphi\, \vec{e}_y - \sin\varphi\, \vec{e}_x$

$\vec{e}_x\,' = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y$

$\vec{e}_r \left| \begin{array}{l} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{array} \right.$ $\quad \vec{e}_\theta \left| \begin{array}{l} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{array} \right.$ $\quad \vec{e}_\varphi \left| \begin{array}{l} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{array} \right.$



Cartesien $\rightarrow$ sphérique :

$$\vec{e}_r \left| \begin{array}{l} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{array} \right. \qquad \vec{e}_\theta \left| \begin{array}{l} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{array} \right. \qquad \vec{e}_\varphi \left| \begin{array}{l} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{array} \right.$$

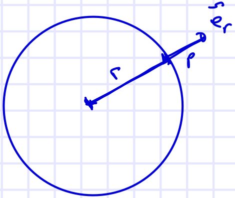
$$\dot{\vec{e}}_r \left| \begin{array}{l} \dot\theta\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta(-\dot\varphi\sin\varphi) \\ \dot\theta\cos\theta\sin\varphi + \dot\varphi\sin\theta\cos\varphi \\ -\dot\theta\sin\theta \end{array} \right.$$

$$= \dot\theta \left| \begin{array}{l} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{array} \right. + \dot\varphi\sin\theta \left| \begin{array}{l} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{array} \right. \Rightarrow \dot{\vec{e}}_r = \dot\theta\,\vec{e}_\theta + \dot\varphi\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot\theta\vec{e}_\theta + \dot\varphi\sin\theta\vec{e}_\varphi \qquad \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot\theta\vec{e}_r + \dot\varphi\cos\theta\vec{e}_\varphi \qquad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot\varphi\sin\theta\vec{e}_r - \dot\varphi\cos\theta\vec{e}_\theta$$

$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$?

$$\vec{r} = \vec{OP} = r\vec{e}_r \qquad \boxed{\vec{r} = r\vec{e}_r}$$



$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(r\vec{e}_r\right) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\left[\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\right]$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_\theta + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$
$$+ r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\dot{\vec{e}}_\varphi$$

Position, vitesse, accélération :

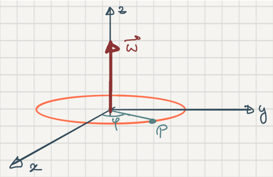
$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned}
a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \\
a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta \\
a_\varphi &= r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta
\end{aligned}$$

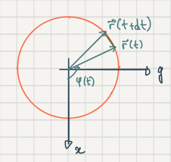
8 Mouvement circulaire en coordonnées cylindriques – vecteur rotation

On considère un point P ayant un mouvement circulaire dans le plan (O,x,y) à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\varphi}$.



Soit $\vec{\omega}$ le vecteur de norme ω, perpendiculaire au plan contenant le cercle décrit par P et de sens donné par la règle du tire-bouchon.

$\vec{\omega}$ est appelé vecteur rotation



$\vec{r} = r\vec{e}_\rho$

$\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = r\omega\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\omega}\wedge\vec{r} = (\omega\vec{e}_z)\wedge(r\vec{e}_\rho) = r\omega\vec{e}_z\wedge\vec{e}_\rho$$
$$= r\omega\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{r}$$

! $|\vec{r}| = cte$

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}}$$

$\vec{u}$ de *norme constante* subissant une rotation donnée par $\vec{\omega}$

$$\boxed{\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}}$$

Coordonnées cylindriques $\dot{\vec{e}}_\rho$ lorsque φ varie

$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \qquad \dot{\vec{e}}_\rho = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_\rho = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$