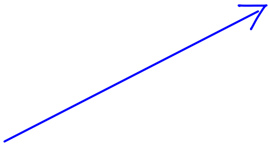
# Rappels mathématiques

29 avril 2021

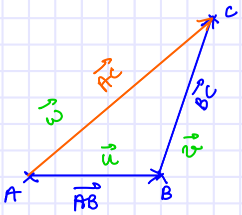
## Table des matières

Un vecteur est caractérisé par sa norme, sa direction et son sens.

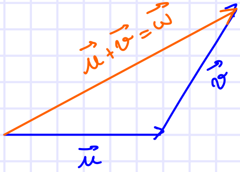


Un vecteur servira donc à représenter une grandeur pour laquelle, en plus de la "valeur", il est important de savoir le sens et la direction.

Typiquement, ce sont les déplacements, les vitesses, les accélérations et les forces.







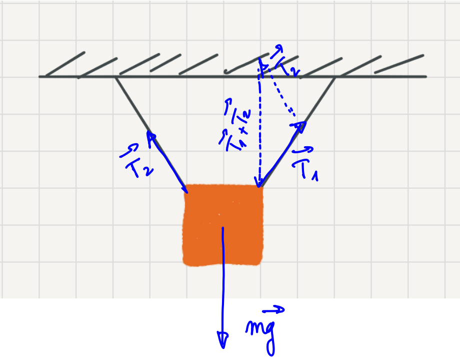

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$$

Physique générale : mécanique

## Exemple de bilan des forces

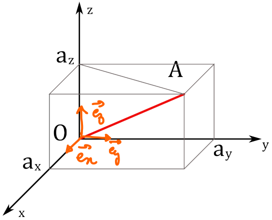



$$\sum \vec{F} = m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$$

## Vecteurs : en coordonnées cartésiennes

Afin de manipuler les vecteurs dans l'espace (à 3 dimensions), il est commode de les décomposer selon leurs composantes cartésiennes.

On fait partir le vecteur de l'origine du repère, les composantes du vecteur sont alors les coordonnées cartésiennes de son extrémité :




ici $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$

il a comme composantes $a_x$, $a_y$, $a_z$

Le vecteur $\vec{a}$ peut s'écrire grâce aux composantes et aux vecteurs de base du repère

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

On pourra noter verticalement les composantes du vecteur $\vec{a}$

si $\vec{e}_x$ $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ fixes

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right.$$

N.B. : dans certains livres, le vecteur $\vec{a}$ est noté **a**

La somme de deux vecteurs se calcule par la somme de ses composantes

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array}\right. + \vec{b}\left|\begin{array}{l} b_x \\ b_y \\ b_z \end{array}\right. = \vec{a}+\vec{b}\left|\begin{array}{l} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{array}\right.$$

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'obtiennent par la soustraction des coordonnées des points $B$ et $A$.

$$A\left|\begin{array}{l} x_A \\ y_A \\ z_A \end{array}\right. \; ; \; B\left|\begin{array}{l} x_B \\ y_B \\ z_B \end{array}\right. \rightarrow \overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{array}\right.$$

En physique, tout bouge... nos vecteurs sont des fonctions du temps $t$. Nous aurons besoin de calculer leurs dérivées par rapport au temps.

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$$

$a_x(t)$ $a_y(t)$ $a_z(t)$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{da_y}{dt}\vec{e}_y + \frac{da_z}{dt}\vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} \left| \begin{array}{l} \frac{da_x}{dt} \\ \frac{da_y}{dt} \\ \frac{da_z}{dt} \end{array} \right.$$

Si les vecteurs de base $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ dépendent du temps

$$\vec{a} = a_{x'}\vec{e}_{x'} + a_{y'}\vec{e}_{y'} + a_{z'}\vec{e}_{z'} \qquad \frac{d\vec{a}}{dt} \; ?$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_{x'}}{dt}\vec{e}_{x'} + a_{x'}\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + \frac{da_{y'}}{dt}\vec{e}_{y'} + a_{y'}\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + \frac{da_{z'}}{dt}\vec{e}_{z'} + a_{z'}\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}$$

Physique générale : mécanique

## Vecteurs : norme

### Définition

La norme d'un vecteur est par définition la longueur du segment sous-tendu, c'est-à-dire que pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$ donné, sa norme est la longueur du segment $[AB]$.

La norme s'obtient en calculant la racine carrée de la somme des composantes au carré :

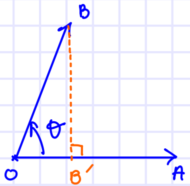
$$||\vec{a}|| := \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

en règle générale, on notera :

$$||\vec{a}|| = a$$

vecteur vitesse $\vec{v}$ $\quad \|\vec{v}\| = v$

## Produit scalaire




$$\vec{OA}\cdot\vec{OB} = \|\vec{OA}\|\,\|\vec{OB}\|\,\underbrace{\cos(\widehat{\vec{OA},\vec{OB}})}_{\cos\theta}$$

= norme de $\vec{OA}$ fois norme de la projection de $\vec{OB}$ sur $\vec{OA}$

$$\vec{OA}\cdot\vec{OB} = \|\vec{OA}\|\cdot\|\vec{OB'}\|$$

Le produit scalaire nous permettra de calculer la norme de la projection d'un vecteur.

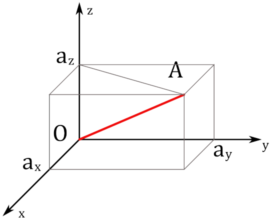
$\vec{u} \perp \vec{v}$ $\qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

$\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v}$ et de même sens $\qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = u\,v$

— — — — de sens opposé $\qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = -u\,v$

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right.$$

## Composantes et produit scalaire



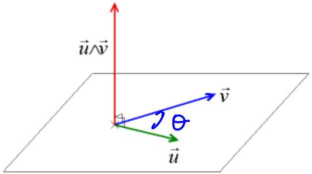

composante de $\vec{a}$ sur $(Ox)$ $= a_x = \vec{a} \cdot \vec{e}_x$

composante de $\vec{a}$ sur $(Oy)$ $= a_y = \vec{a} \cdot \vec{e}_y$

composante de $\vec{a}$ sur $(Oz)$ $= a_z = \vec{a} \cdot \vec{e}_z$

La composante $a_i$ de $\vec{a}$ s'obtient en effectuant $a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i$

## Produit vectoriel




### Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires se définit comme l'unique vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que

- le vecteur $\vec{w}$ est *orthogonal* aux deux vecteurs donnés ; $\Rightarrow$ direction de $\vec{w}$
- la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de *sens direct* ; $\Rightarrow$ sens de $\vec{w}$
- $||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot |\sin(\underbrace{\widehat{\vec{u}, \vec{v}}}_{\theta})|$

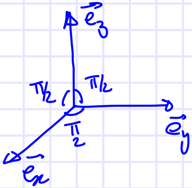
si $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v}$ $\quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

si on note $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ les vecteurs unitaires d'un trièdre orthonormé direct :

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y$$




$|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$

$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y$

$\vec{e}_x \quad \vec{e}_y \quad \vec{e}_z \quad \vec{e}_x \quad \vec{e}_y$

$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_x = \vec{0}$

$\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = -\vec{e}_z$

et de plus

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

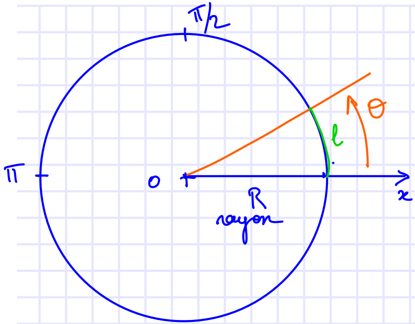
Le produit vectoriel de deux vecteurs se calcule par le produit croisé des composantes deux par deux selon la méthode suivante :

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \\ a_x \\ a_y \end{array}\right. \qquad \vec{b}\left|\begin{array}{l} b_x \\ b_y \\ b_z \\ b_x \\ b_y \end{array}\right. \qquad \vec{a}\wedge\vec{b}\left|\begin{array}{l} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{array}\right.$$

## Trigonométrie

Nous utiliserons souvent les angles en *radians* .

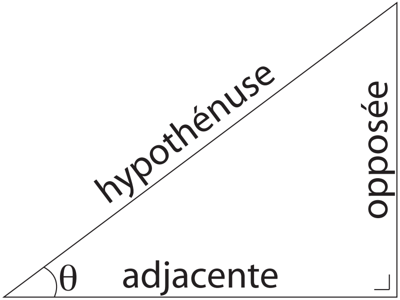
Le cercle complet fait $2\pi$ radians. Cette définition permet de relier directement la longueur de l'arc de cercle à l'angle et au rayon par $l = R\theta$ avec $\theta$ en radians.




| | angle | longueur arc |
|---|---|---|
| tour complet | $2\pi$ | $2\pi R$ |
| | $\theta$ | $l = \frac{\theta \, \cancel{2\pi} R}{\cancel{2\pi}}$ |

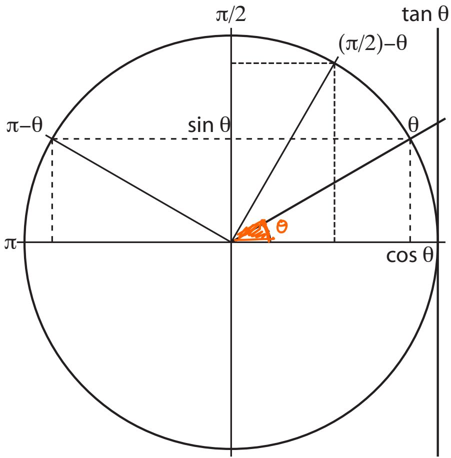
$l = \theta R$ si $\theta$ est en radians

## Trigonométrie dans le triangle rectangle




$$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

## Cercle trigonométrique




$$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta \qquad \sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta \qquad \cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 0 = 1 \qquad \sin 0 = 0$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

## Identités trigonométriques

$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1} \tag{1}$$

$$\boxed{\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1} \tag{2}$$

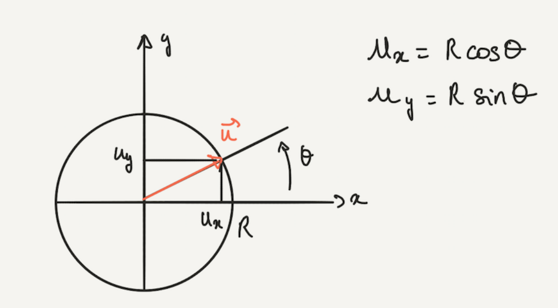
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \tag{3}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \tag{4}$$

...et bien d'autres dans votre formulaire et sur le web. Vous devez les savoir ou savoir les retrouver (ou les mettre dans votre formulaire personnel)

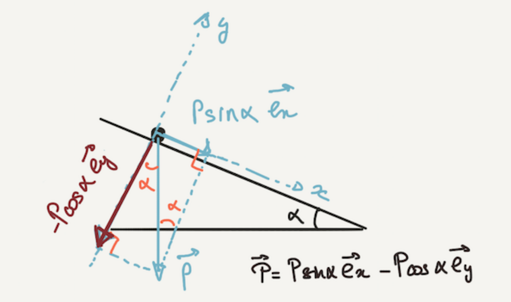
## Vecteurs et trigonométrie

Vous aurez souvent à trouver les composantes d'un vecteur dont vous connaissez la norme, et l'angle qu'il fait par rapport à un axe de référence. En d'autre termes, la projection d'un vecteur donné sur des axes (pas forcément verticaux ou horizontaux).

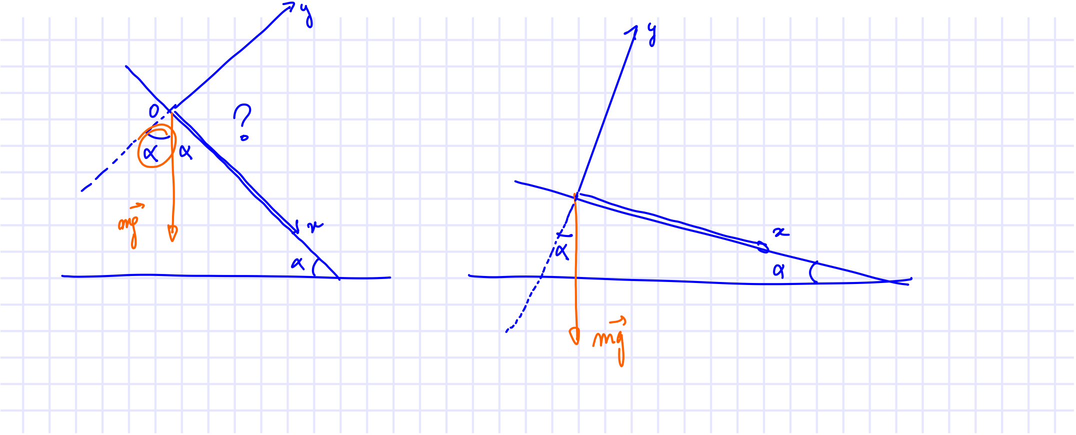


## Vecteurs et trigonométrie

Par exemple, ici, on décompose une force (le poids) en deux composantes portées respectivement par l'axe *x* et l'axe *y*. Avant de faire la projection, il faut bien identifier l'angle par des considérations géométriques.

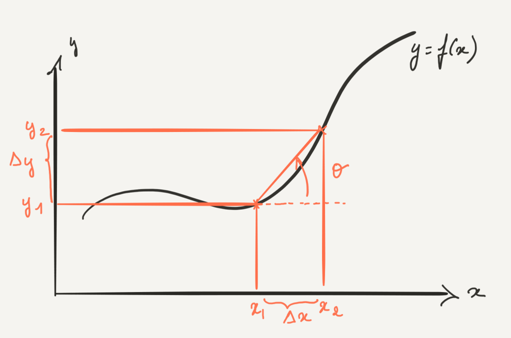


Pour cela, faites toujours un dessin avec des angles franchement différents de 45° !
Sinon vous risquez de faire des erreurs dans le report des angles.



## Dérivées

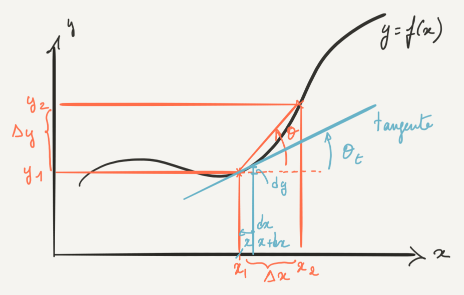
Soit une fonction $y = f(x)$ représentée par une courbe $y = f(x)$ dans le plan. La corde prise entre deux points a une pente caractérisée par l'angle $\theta$.




$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La dérivée de la fonction $f$ au point 1 est la limite de $\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ quand le point 2 tend vers le point 1. C'est donc la *pente de la tangente à la courbe*.

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x_1 + dx) - f(x_1)}{dx} = \frac{df}{dx}$$




En physique on utilisera souvent la variation infinitésimale de la fonction $f$

$$df = f(x + dx) - f(x)$$

pour une variation $dx$ de $x$.

Vous devez connaître les dérivées des fonctions usuelles.

| fonction | dérivée |
|---|---|
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\tan x$ | $1/\cos^2 x$ |
| $\ln x$ | $1/x$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $x^n$ | $n x^{n-1}$ |

$\frac{1}{x^n} = x^{-n} \rightarrow$ dérivée $(-n)\, x^{-n-1}$

$\frac{1}{x} \xrightarrow{\text{dérivée}} -1\, x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

## Produit et composition de fonctions

$$(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$$

$$\left(f[g(x)]\right)' = g'(x)\; f'\left[g(x)\right]$$

$$f(t) = \cos \Omega t \qquad \frac{df}{dt} = \Omega\left[-\sin(\Omega t)\right] = -\Omega \sin \Omega t$$

## Primitive

Calculer la primitive de f(x), c'est "la manoeuvre inverse" du calcul de la dérivée.

C'est chercher la fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$.

Comme la dérivée d'une constante est 0, on peut ajouter n'importe quelle constante à $F$ ça ne change rien, donc "la primitive de $F$ est définie à une constante près".

$f(x) = \cos x$ $\qquad F(x) = \sin x + A$ $\qquad A$ constante

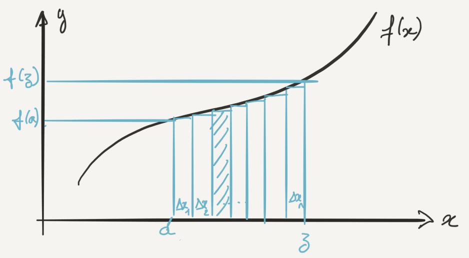
$A$ : "constante d'intégration"

$F(x_0)$ connue $\qquad F(x_0) = F_0 \Rightarrow F(x_0) = \sin x_0 + A = F_0 \Rightarrow A = F_0 - \sin x_0$

$F(x) = \sin x - \sin x_0 + F_0$

## Intégrale

On cherche à calculer l'aire sous la courbe entre le point $x = a$ et $x = z$.




C'est à peu près la somme des petits rectangles de largeur $\Delta x_i$ et de hauteur $f(x_i)$

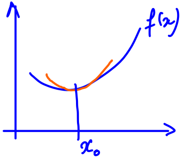
$$\mathcal{A} \simeq \sum_i f(x_i)\Delta x_i$$

Plus $\Delta x$ est petit plus l'aire est calculée juste. Finalement

$$\mathcal{A} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta x_i = \int_a^z f(x)dx = F(z) - F(a)$$

$F(x)$ primitive de $f(x)$

## Développement limité en série de Taylor




Intérêt : remplacer une fonction compliquée par un polynôme

$$f(x_0+\varepsilon) \simeq f(x_0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0)\varepsilon + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x_0)$$

$f(x) = (1+x)^n$ pour $x$ petit : développement autour de $x_0 = 0$

$f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ $\qquad f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$ ...

$f(0+\varepsilon) = f(0) + f'(0)\,\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(0) + \ldots = 1 + n\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} n(n-1) + \ldots$

$f(\varepsilon) = 1 + n\,\varepsilon + n(n-1)\frac{\varepsilon^2}{2} + \ldots$

$f(x) = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2} + \ldots \Rightarrow f(x) \simeq 1 + nx$

## Développement limité en série de Taylor utiles dans ce cours

$$(1+x)^n \simeq 1+nx \qquad \frac{1}{(1+x)^n} \simeq 1-nx$$

$$\ln(1+x) \simeq x \qquad e^x \simeq 1+x$$

$$\cos x \simeq 1-\frac{x^2}{2} \qquad \sin x \simeq x \qquad \tan x \simeq x$$

Pour $x$ petit (donc proche de 0)

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+(-x)} = [1+(-x)]^{-1} \simeq 1+(-1)(-x) = 1+x$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \simeq 1+x$$