

Exercices

Exercice 1

Une comète de masse $2.2 \cdot 10^{14}$ kg est observée à une distance de $5 \cdot 10^{11}$ m du Soleil se dirigeant vers le Soleil à une vitesse de $2.16 \cdot 10^4$ m s⁻¹, et faisant un angle de 45° avec le rayon vecteur du Soleil. Calculer pour la comète :

1. son énergie totale et son moment cinétique ;
2. rappeler l'expression de l'énergie totale pour une orbite quelconque ;
3. en déduire la distance au Soleil lorsqu'elle est le plus proche du soleil (périhélie) et lorsqu'elle est le plus loin (aphélie).

On rappelle $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ m³kg⁻¹s⁻² et que la masse du soleil vaut $M_{\odot} = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg.

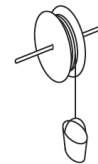
Exercice 2

Une patineuse tourne sur elle-même à la vitesse angulaire Ω les bras écartés, avec dans chacune de ses mains une masse m considérée comme ponctuelle. Supposons maintenant que la patineuse tourne autour d'un axe vertical et que l'on puisse négliger sa masse M ainsi que l'action des frottements.

1. Quelle sera la vitesse angulaire finale ω de la patineuse si, une fois les bras fermés, la distance initiale entre l'axe de rotation et les masses m est divisée par 3 ?
2. Pourrait-on résoudre cet exercice avec la conservation de l'énergie ?

Exercice 3

Un seau est retenu par une corde enroulée sur la poulie d'un puits. On lâche la corde. On admettra que la poulie (cylindre homogène de masse M , de rayon R) tourne sans frottement autour de son axe et qu'il n'y a pas de glissement de la corde (de masse négligeable) sur la poulie. Trouver l'accélération du seau.

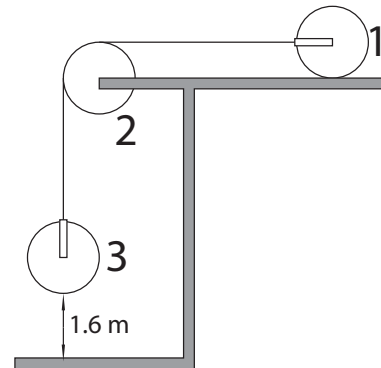


Résoudre l'exercice de 3 manières :

1. En considérant le bilan des forces (séparément sur le seau et la poulie) ;
2. Par la conservation de l'énergie ;
3. En considérant le théorème du moment cinétique pour le système masse-poulie.

Exercice 4

Trois cylindres identiques, pleins et d'une masse volumique homogène, ont chacun une masse de 9 kg et un rayon de 0.5 m. Ils sont posés sur des essieux rattachés à des supports de masse négligeable et ce système fonctionne sans frottements. Une corde relie les supports des cylindres 1 et 3 et passe sans glisser sur la tranche du cylindre 2 dont le support est fixé au rebord d'une structure simple. Le cylindre 1 roule sans glisser sur la surface rugueuse de cette structure lorsque le cylindre 3 descend. Le système est d'abord maintenu immobile dans la position représentée ici – le cylindre 3 se trouvant à une hauteur de 1.6 m au-dessus du sol – puis on le laisse aller. Quelle est la vitesse du cylindre 3 immédiatement avant le sol ?



Solutions

Solution 1

1. L'énergie mécanique du système s'écrit comme

$$\begin{aligned} E_{mec} &= E_c + E_p \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_{\odot}m}{d} \end{aligned}$$

Comme l'énergie mécanique totale est constante, on peut la calculer pour l'instant de la mesure

A.N. : $E_{mec} = -7.08 \cdot 10^{21} \text{ J}$.

Le moment cinétique s'écrit comme

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \overrightarrow{OP} \wedge (m\vec{v}) \\ &= dm v \sin \alpha \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$L_O = dm v \sin \alpha$$

L_O est aussi constant, calculé pour l'instant de la mesure.

A.N. : $L_O = 1.68 \cdot 10^{30} \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$

2. L'énergie mécanique totale est donnée

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L_O^2}{mr^2} - \frac{GM_{\odot}m}{r}$$

3. Au périhélie/aphélie, $\dot{r} = 0$. Alors

$$E_{mec} = \frac{1}{2}\frac{L_O^2}{m}\frac{1}{r^2} - GM_{\odot}m\frac{1}{r}$$

Il s'agit d'une équation polynomiale du deuxième ordre, dont les solutions sont :

$$r_1 = 2.32 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$r_2 = 3.89 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

Solution 2

- On utilise le fait que le moment cinétique est conservé s'il n'y a pas de moment qui s'applique au système ($\dot{\vec{L}} = \sum \vec{M}$) :

$$\vec{L} = (2m)\vec{r} \wedge \vec{v} = (2m)r^2\omega\hat{e}_z = cste$$

Vitesse angulaire initiale :

$$\Omega = \frac{L}{2mR^2} \Rightarrow L = 2mR^2\Omega$$

Vitesse angulaire finale :

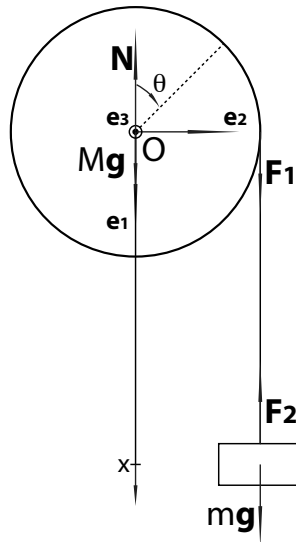
$$\omega = \frac{L}{2mr^2} = \frac{L}{2m(\frac{R}{3})^2} = \frac{2mR^2\Omega}{2m(\frac{R}{3})^2} = 9\Omega$$

La vitesse de rotation augmente proportionnellement au carré du rapport des longueurs.

- Non : l'énergie n'est pas conservée, car il faut à la patineuse fournir un certain travail pour amener les deux masses m vers elle.

Solution 3

Pour étudier le problème, on va prendre comme référentiel le sol et le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ dessiné ci-dessous.



Le problème a un degré de liberté : on peut choisir soit x soit θ comme variable, car la corde reste tendue et ne glisse pas sur la poulie : ces deux variables sont liées par la relation

$$x = R\theta \quad (1)$$

1. Traitement par le bilan des forces

Les forces externes s'exerçant sur le système global sont les forces pesantes $m\vec{g}$ et $M\vec{g}$ et la force de réaction $\vec{N}$ de l'axe. Les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sont des forces internes.

Il faut décomposer le système global en sous-systèmes :

- sous-système seau : masse m sur laquelle agissent les forces extérieures $m\vec{g}$ et $\vec{F}_2$;
- sous-système poulie : masse M sur laquelle agissent les forces extérieures $M\vec{g}$ et $\vec{F}_1$;
- sous-système corde : masse nulle sur laquelle agissent les forces extérieures $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.

Sous-système corde :

La loi de Newton donne $\sum \vec{F}_{corde}^{ext} = m_{corde} \vec{a}_{G,corde}$. Comme la corde est de masse négligeable, $m_{corde} = 0$; on a donc $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$, soit $F = \|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_2\|$. Ce résultat (intuitivement évident) peut aussi s'obtenir en considérant le système global, pour lequel les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sont des forces internes, la résultante des forces internes étant nulle.

Sous-système seau :

La loi de Newton donne $m\ddot{x}\vec{e}_1 = m\vec{g} + \vec{F}_2$. Ainsi,

$$\ddot{x} = g - \frac{F}{m} \quad (2)$$

Sous-système poulie :

On utilise la loi du moment cinétique : $\sum \vec{M}_0^{ext} = \frac{d}{dt} \vec{L}_0$. La somme des moments des forces extérieures est $\sum \vec{M}_0^{ext} = \vec{OP} \wedge \vec{F}_1 = -RF\vec{e}_3$. D'autre part, on sait que $\vec{L}_0 = \frac{1}{2}MR^2\vec{\omega}$, donc $\frac{d}{dt} \vec{L}_0 = \frac{d}{dt} \frac{1}{2}MR^2\vec{\omega} = -\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta}\vec{e}_3$. Le théorème du moment cinétique nous donne donc :

$$\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} = RF \quad (3)$$

Mais comme x et θ sont liés par la relation (1), on peut réécrire (3) comme $\frac{1}{2}MR\ddot{x} = RF$, autrement dit :

$$F = \frac{1}{2}M\ddot{x} \quad (4)$$

Les équations (2) et (4) contiennent les deux inconnues F et $\ddot{x}$. En introduisant (4) dans (2), nous obtenons d'abord l'évolution

$$\ddot{x} = \frac{2mg}{2m + M}$$

puis, en intégrant deux fois :

$$x(t) = \frac{mg}{2m+M}t^2$$

2. Traitement par l'énergie

On considère l'énergie mécanique totale du système seau + poulie (la corde ayant une masse négligeable ne contribue pas). On travaille entre le moment où on lâche le seau sans vitesse initiale (a) et le moment où il a parcouru une distance x , atteint une vitesse $v = \dot{x}$ et où la poulie a une vitesse angulaire $\omega = \frac{\dot{x}}{R}$ (b).

L'énergie potentielle de la poulie ne change pas puisqu'elle ne change pas d'altitude.

$$\begin{aligned} mgx + 0 + 0 &= 0 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_z\omega^2 \\ I_z &= \frac{1}{2}MR^2 & \omega &= \frac{v}{R} & v &= \dot{x} \\ mgx &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\frac{\dot{x}^2}{R^2} \end{aligned}$$

qui donne :

$$mgx = \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{4}M\right)\dot{x}^2 \quad (5)$$

En dérivant (5) par rapport au temps, on obtient :

$$mg\dot{x} = 2\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{4}M\right)\dot{x}\ddot{x}$$

c'est-à-dire :

$$\ddot{x} = \left(\frac{2m}{M+2m}\right)g$$

3. Traitement par le théorème du moment cinétique

Le système est l'ensemble masse + poulie.

$$\sum \vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

Les forces extérieures sont le poids de la masse, celui de la poulie et la réaction du support de la poulie $\vec{N}$. Le théorème du moment cinétique est valable pour n'importe quel point de référence (il faut juste prendre le même pour le calcul des moments des forces et celui du moment cinétique!). Nous pouvons en choisir un qui nous simplifiera la vie : en prenant O , les moments du poids de la poulie et de la réaction du support seront nuls. C'est un avantage car on ne connaît pas $\vec{N}$!

$$\sum \vec{M}_O = \vec{M}_O^{\vec{N}} + \vec{M}_O^{M\vec{g}} + \vec{M}_O^{m\vec{g}} = \overrightarrow{OO} \wedge \vec{N} + \overrightarrow{OO} \wedge (M\vec{g}) + \overrightarrow{OP} \wedge (m\vec{g}) = \vec{0} + \vec{0} + (x\vec{e}_1 + R\vec{e}_2) \wedge (mg\vec{e}_1)$$

c'est-à-dire

$$\sum \vec{M}_O = -mgR\vec{e}_3$$

De plus,

$$\vec{L}_O = I_z \dot{\vec{\theta}} + \overrightarrow{OP} \wedge (m\vec{v})$$

Quand le seau tombe, la poulie tourne dans le sens des aiguilles d'une montre sur le schéma. La vitesse angulaire est donc dirigée à l'opposé de $\vec{e}_3$ donc $\dot{\vec{\theta}} = -\omega\vec{e}_3$ avec ω la vitesse angulaire scalaire.

$$\vec{L}_O = -I_z\omega\vec{e}_3 + (x\vec{e}_1 + R\vec{e}_2) \wedge (m\dot{x}\vec{e}_1) = -\frac{1}{2}MR^2\frac{\dot{x}}{R}\vec{e}_3 - mR\dot{x}\vec{e}_3 = -(\frac{M}{2} + m)R\dot{x}\vec{e}_3$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = -(\frac{M}{2} + m)R\ddot{x}\vec{e}_3 = \sum \vec{M}_O = -mgR\vec{e}_3$$

On retrouve donc encore une fois la même chose (heureusement !)

Cet exercice est l'illustration qu'en règle générale, traiter un problème par les énergies ou encore par le théorème du moment cinétique est plus rapide que par les forces.

Solution 4 Nous avons 3 cylindres identiques de masse m , rayon R et moment d'inertie $I_z = \frac{1}{2}mR^2$.

Visiblement :

- le cylindre 1 va rouler (E_c , E_{rot})
- le cylindre 2 va tourner (E_{rot})
- le cylindre 3 va juste descendre (E_c , E_p)

Le lien entre la vitesse de rotation et de déplacement du cylindre 1 est donné par $v = \omega R$. La corde qui fait tourner le cylindre 2 avance à v , donc le cylindre 2 tourne à une vitesse angulaire ω et le cylindre 3 avance de v .

Nous pouvons appliquer le théorème de la conservation de l'énergie :

- Avant de lâcher le système :

$$E_m = \underbrace{E_{c1}^{(1)} + E_{c2}^{(1)} + E_{c3}^{(1)} + E_{rot1}^{(1)} + E_{rot2}^{(1)} + E_{rot3}^{(1)}}_0 + E_{p3}^{(1)}$$

- juste avant que le cylindre 3 ne touche le sol :

$$E_m = E_{p3}^{(1)} = \underbrace{E_{c1}^{(2)}}_{\frac{1}{2}mv^2} + \underbrace{E_{rot1}^{(2)}}_{\frac{1}{2}I\omega^2} + \underbrace{E_{c2}^{(2)}}_0 + \underbrace{E_{rot2}^{(2)}}_{\frac{1}{2}I\omega^2} + \underbrace{E_{c3}^{(2)}}_{\frac{1}{2}mv^2} + \underbrace{E_{rot3}^{(2)}}_0 + \underbrace{E_{p3}^{(2)}}_0$$

Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned} I\omega^2 + mv^2 &= mgh \\ \frac{1}{2}mR^2\frac{v^2}{R^2} + mv^2 &= mgh \\ \frac{v^2}{2} + \frac{2v^2}{2} &= gh \end{aligned}$$

On en tire :

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{3}}$$

A.N. : $v = 3.23 \text{ m/s}$