Exercices

Exercice 1
Astérix et Obélix remontent la Tamise à bord d'un canot, à une vitesse v constante par rapport à l'eau dont la vitesse du courant est v_0. Ils transportent un tonneau de potion magique. A un instant donné, le tonneau tombe à l'eau. Après une heure, Astérix s'aperçoit de la disparition du tonneau. Ils font demi-tour. Combien de temps leur faut-il pour rejoindre le tonneau ?

Exercice 2
Un vélo est décoré de petites lampes sur l'un des rayons de l'une de ses roues. Il roule à une vitesse constante v sans glisser.
On considères 3 lampes : (1) sur le moyeux de la roue, (2) à mi-distance entre le moyeux et la périphérie, (3) à la périphérie.

1. Quelle est la vitesse scalaire instantanée de la lampe (3) lorsqu'elle est :
   (a) en contact avec le sol ?
   (b) diamétralement opposée au point de contact avec le sol ?
2. Dessiner l'allure de la trajectoire des 3 lampes dans le référentiel terrestre.

Exercice 3
Un vacancier en Normandie part pour une séance de natation alors qu'il y a un fort courant de marée. Ce courant est parallèle au rivage*. Il parcourt une distance L le long du rivage exactement dans le sens du courant, puis de nouveau L mesuré le long du rivage, à contre courant. La vitesse du nageur par rapport à l'eau est v_n, celle du courant v_c. Calculer le temps mis par le nageur en fonction du rapport $\frac{v_c}{v_n}$. Discuter la solution selon les valeurs de $\frac{v_c}{v_n}$.

(*) c'est un courant qui correspond au remplissage de la Manche à marée montante et au fait qu'elle se vide à marée descendante.

Exercice 4
Calculez la force de Coriolis (grandeur et direction) qui s'exerce en Utah (40° de latitude Nord) sur une voiture de course de 1200 kg lancée vers le Nord à 500 km/h.

Exercice 5
Une plongeuse saute de l'extrémité d'un tremplin haut de 5.0 m et pénètre dans l'eau 1.3 s plus tard, à 3 m en avant de son point de départ. En considérant cette plongeuse comme une particule, déterminez :

1. sa vitesse initiale $\vec{v}_0$;
2. la hauteur maximale qu'elle atteint ;
3. la vitesse $\vec{v}_f$ avec laquelle elle rentre dans l'eau.

Solutions

Solution 1
On se place dans le référentiel de la Tamise. Le tonneau ne bouge donc pas. Astérix et Obélix vont à la même vitesse dans les deux sens. Il leur faudra donc 1 h pour récupérer le tonneau.
On peut aussi se mettre dans le référentiel fixe et arriver au même résultat par un calcul bien plus pénible.
Soit v' la vitesse du bateau dans le référentiel terrestre. $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{v}_0$
On place l'origine du repère à l'endroit où le tonneau tombe (donc à $t = 0$) avec le sens positif en direction de l'amont
Durant l'aller, $v' = v - v_0$. La position du bateau après le temps t_1 est donc

$$L_B = v' t_1 = (v - v_0) t_1$$

Au retour, le bateau va dans le sens du courant et donc $v' = v + v_0$. Posons t_2 le temps écoulé depuis le demi-tour. On trouve,

$$x_B = L_B - (v + v_0) t_2$$

Pendant ce temps, le tonneau sera arrivé au point

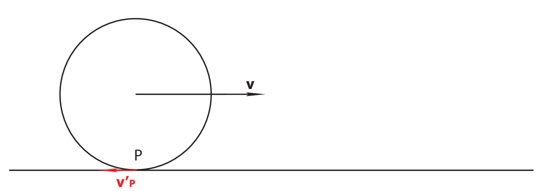
$$x_T = -v_0(t_1 + t_2)$$

La récupération du tonneau a lieu quand $x_B = x_T$. C'est à dire quand

$$(v - v_0)t_1 - (v + v_0)t_2 = -v_0(t_1 + t_2) \Rightarrow vt_1 - vt_2 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2$$

On retrouve effectivement qu'il faut le même temps pour récupérer le tonneau.

Solution 2
Le mouvement est la superposition d'un mouvement général de translation du vélo dans le référentiel terrestre et d'un mouvement de rotation de la roue autour de son axe.
Le vélo va à la vitesse v.
Soit R le rayon de la roue.
Le point clé est de comprendre que si le vélo roule sans glisser, alors le point de la roue en contact avec le sol a une vitesse nulle. Si ça n'était pas le cas, le vélo glisserait !
Considérons ce point de contact.



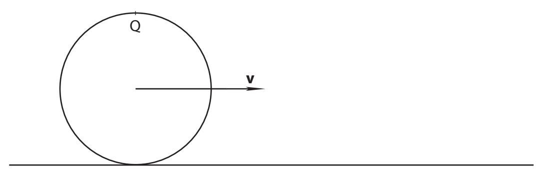
Le point de contact P a la vitesse $\vec{v}'_P$ dans le référentiel de la roue et $\vec{v}_P$ dans le référentiel terrestre.

$$\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}$$

Or nous avons vu que $\vec{v}_P = \vec{0}$. Donc $\vec{v}'_P = -\vec{v}$, et donc en norme : $v'_P = v$.
Soit ω la vitesse angulaire de la roue. $v'_P = R\omega$, donc

$$\boxed{R\omega = v}$$

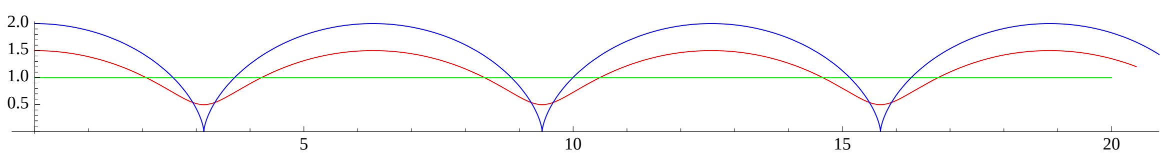
Cela donne le lien entre la vitesse angulaire et la vitesse de translation d'une roue qui roule sans glisser. Soit le point diamétralement opposé au point de contact : point Q.



Il a la même vitesse scalaire que P dans le référentiel de la roue : $v'_Q = v'_P = v$, mais dans la direction opposée. Donc $\vec{v}'_Q = \vec{v}$.

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_{Q'} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{v} = 2\vec{v}$$

Le point Q a une vitesse scalaire $2v$ dans le référentiel terrestre.
Allure des trajectoires (lampe (1) en vert, (2) en rouge et (3) en bleu, le rayon R valant 1) :



Solution 3
Définissons les vitesses suivantes

- Vitesse du nageur par rapport au courant : v_n.
- Vitesse du courant : v_c.

Il faut commencer par prendre un référentiel est un repère. Nous choisissons le référentiel terrestre et un repère lié au référentiel.
À l'aller, la vitesse du nageur est $v_n\vec{e}_x$ et au retour $-v_n\vec{e}_x$
Le courant a une vitesse $v_c\vec{e}_x$ avec v_n et $v_c > 0$

La loi de la composition des vitesses donne la vitesse par rapport à la Terre : vitesse du nageur par rapport au courant plus vitesse du courant par rapport à la Terre.

$$\text{Aller} : \vec{v} = v_c\vec{e}_x + v_n\vec{e}_x = (v_c + v_n)\vec{e}_x$$
$$\text{Retour} : \vec{v} = v_c\vec{e}_x - v_n\vec{e}_x = (v_c - v_n)\vec{e}_x$$

Le temps pour le trajet donne :

$$\text{Aller} : t_1 = \frac{L}{v_n + v_c} \qquad \text{Retour} : t_2 = \frac{-L}{v_c - v_n}$$

Dans le cas du retour, $\vec{r} = -L\vec{e}_x$, $\vec{v}\Delta t = (v_c - v_n)\vec{e}_x(t_2 - 0)$, donc $-L\vec{e}_x = (v_c - v_n)\vec{e}_x t_2$

$$t_2 = \frac{-L}{v_c - v_n} \Rightarrow t_2 = \frac{L}{v_n - v_c}$$

Le temps total donne : $t = t_1 + t_2 = \frac{L}{v_n+v_c} + \frac{L}{v_n-v_c}$
C'est un résultat juste, mais sur lequel on ne peut pas dire grand chose. Il faut donc travailler l'expression pour pouvoir en tirer des conclusions.

$$t = \frac{L(v_n - v_c) + L(v_n + v_c)}{(v_n + v_c)(v_n - v_c)} = \frac{2Lv_n}{v_n^2 - v_c^2} = \frac{\frac{2L}{v_n}}{1 - \left(\frac{v_c}{v_n}\right)^2} = \frac{t_0}{1 - \left(\frac{v_c}{v_n}\right)^2}$$

Avec t_0 le temps mis en l'absence de courant. On peut donc exprimer

$$\frac{t}{t_0} = \frac{1}{1 - \left(\frac{v_c}{v_n}\right)^2}$$

Il est intéressant de se demander l'allure de la fonction obtenue...
Pour $v_c = 0$, on trouve 1 (logique).
Quand v_c augmente, $\left(\frac{v_c}{v_n}\right)^2$ augmente, donc $1 - \left(\frac{v_c}{v_n}\right)^2$ diminue, et donc $\frac{1}{1-\left(\frac{v_c}{v_n}\right)^2}$ augmente quand v_c se rapproche de v_n :

$$v_c \to v_n \Rightarrow \left(\frac{v_c}{v_n}\right)^2 \to 1 \Rightarrow 1 - \left(\frac{v_c}{v_n}\right)^2 \to 0 \Rightarrow \frac{t}{t_0} = \frac{1}{1 - \left(\frac{v_c}{v_n}\right)^2} \to \infty!$$

Le nageur met un temps infini. C'est normal, il ne peut pas remonter le courant s'il ne nage pas plus vite.

Solution 4

La force de Coriolis (exercée dans le sens contraire de l'accélération du même nom) est donnée par

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

où $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$ est la rotation de la Terre et $\vec{v}_r = -v\vec{e}_\theta$ la vitesse de la voiture. Le problème consiste à traduire ces deux grandeurs dans le même référentiel. Puisque la Terre tourne autour de son axe Nord-Sud (en première approximation), nous utiliserons le système de coordonnées cylindriques, dont l'axe (Oz) est confondu avec celui de rotation de la Terre. Ainsi, en Utah (latitude $\alpha = 40^c irc$ N), la vitesse de la voiture sera

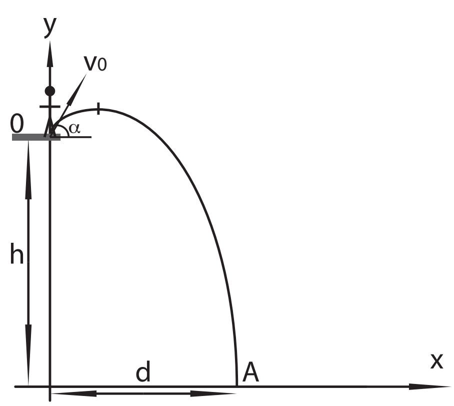
$$\vec{v}_r = -v_r\vec{e}_\theta = -v_r(\sin\alpha\,\vec{e}_\rho - \cos\alpha\,\vec{e}_z)$$

La force de Coriolis est donc donnée par

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r = 2mv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} = 2mv\Omega\sin\alpha\,\vec{e}_\varphi$$

La force de Coriolis s'exerce vers l'est.
A.N. : $F_C = 2 \cdot 1200 \cdot \frac{500}{3.6} \cdot \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}\sin 40^\circ = 15.58$ N.

Solution 5



1. La vitesse initiale de la plongeuse est donn ?e par :

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0,x} \\ v_{0,y} \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_{0,x} \\ -gt + v_{0,y} \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} v_{0,x}t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0,y}t \end{pmatrix}$$

La plongeuse entre dans l'eau à t_1 en $A = \begin{pmatrix} d \\ -h \end{pmatrix}$.

On connaît d, h et t, mais on ne connaît pas $v_{0,x}$ ni $v_{0,y}$.

$$r(t_1) = \begin{pmatrix} v_{0,x}t_1 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0,y}t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -h \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{v_{0,x} = \frac{d}{t_1}} \text{ et } \boxed{v_{0,y} = \frac{1}{2}gt_1 - \frac{h}{t_1}}$$

La vitesse initiale est donc donnée par :

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} \frac{d}{t_1} \\ \frac{1}{2}gt_1 - \frac{h}{t_1} \end{pmatrix}$$

A.N. : $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 2.3 \\ 2.5 \end{pmatrix}$ m·s^{-1}

2. La hauteur maximale est atteinte au temps où $v_y = 0$:

$$v_y = -gt + v_{0,y} = -gt + \frac{1}{2}gt_1 - \frac{h}{t_1}$$

On cherche t_2 tel que

$$v_y(t_2) = -gt_2 + \frac{1}{2}gt_1 - \frac{h}{t_1} = 0$$

Il vient :

$$t_2 = \frac{1}{2}t_1 - \frac{h}{gt_1 2}$$

A ce moment-là, la hauteur est :

$$\boxed{h_{max} = -\frac{1}{2}gt_2^2 + v_{0,y}t_2 = -\frac{\left(gt_1^2 - 2h\right)^2}{8gt_1^2}}$$

A.N. : $h_{max} = 5.3$ m

3. La vitesse finale est donnée par $\vec{v}_f = \vec{v}(t_1)$, soit

$$\boxed{\vec{v}_f = \begin{pmatrix} \frac{d}{t_1} \\ -\frac{1}{2}gt_1 - \frac{h}{t_1} \end{pmatrix}}$$

A.N. : $\vec{v}_f = \begin{pmatrix} 2.3 \\ -10.2 \end{pmatrix}$ m·s^{-1}