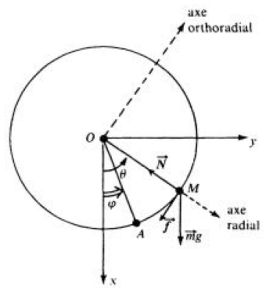
Exercices

Exercice 1



Une particule, assimilée à un point matériel M de masse m , se déplace sur la rainure intérieure d'un cerceau de centre O , de rayon R et d'axe horizontal Oz , avec une force de frottement visqueux $\vec{F_f} = -f\vec{v}' = -bm\vec{v}'$, où $\vec{v}'$ désigne la vitesse relative de la particule par rapport au cerceau, et b un coefficient positif constant. La particule est repérée par l'angle orienté $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ où $\overrightarrow{Ox}$ désigne la verticale descendante : on supposera θ petit dans tout le problème.

Le cerceau est animé d'un mouvement oscillatoire de rotation, de faible amplitude autour de son axe $\overrightarrow{Oz}$:$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega_e t$, où $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA})$, OA désignant un rayon fixe du cerceau.

1. Ecrire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $\theta(t)$.
2. Déterminer l'amplitude θ_m de l'élongation $\theta(t)$ en régime forcé, ainsi que le rayon R du cerceau qui permet d'obtenir la résonance d'amplitude. *Suggestion :* effectuer le changement de variable $\xi = \omega_e^2$.

Exercice 2

Nous allons montrer comment démontrer les 3 lois de Kepler à partir des relations fondamentales de la dynamique (lois de Newton) ainsi que de l'expression de la force de gravitation postulée par Newton aussi. La demonstration de la première loi est la plus difficile, nous allons commencer par la deuxième, puis pour les courageux (facultatif) vous pourrez essayer de démontrer la première, ce qui demande quelques "astuces" mathématiques. La troisième découle des deux premières.

Les lois de Kepler sont :

K1 Les planètes tournent autour du Soleil en décrivant des ellipses dont cet astre occupe un des foyers.

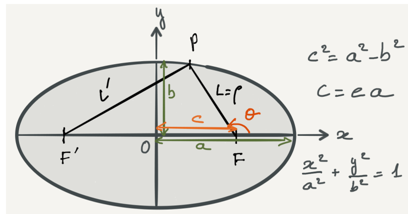
K2 Les aires des surfaces décrites par les rayons vecteurs sont proportionnelles aux temps employés à les balayer.

K3 Les carrés des temps des révolutions des planètes autour du Soleil sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites.

1) Démontrer la loi des aires (K2). Pour ceci, utilisez la conservation du moment cinétique, dans le mouvement à force centrale.

2) Difficile ! Le but de cette question est de démontrer que les trajectoires des planètes sont des ellipses (K1), puis d'utiliser (K1) et (K2) pour démontrer (K3).

On rappelle quelques propriétés des ellipses :



On peut tracer une ellipse en plantant 2 clous séparés d'une distance $2c$, et en utilisant une ficelle de longueur $2a > 2c$, fixée aux clous, et en traçant la courbe qui "tend" la ficelle. c'est donc le lieu des points P tels que $L+L' = 2a$. L'ellipse est caractérisée par son 1/2 grand axe de longueur a et son 1/2 petit axe de longueur b. Les clous occupent les foyers F et F'. La distance du centre au foyer est c.

$$a^2 - b^2 = c^2$$

On définit l'excentricité e, positive et < 1 :

$$c = ae$$

En coordonnées cartésiennes, dans le repère (O, x, y), elle a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En coordonnées cylindriques (polaires) (ρ, θ), dans le repère *d'origine* F, son équation est

$$\frac{p}{\rho} = 1 + e\cos\theta$$

e est l'excentricité. Pour une ellipse $0 \leq e < 1$, pour une parabole, $e = 1$ et pour une hyperbole $e > 1$. Dans le cas de l'ellipse $p = b^2/a$.

Comme la gravitation est une force centrale, c'est cette dernière équation qu'il faut chercher. Pour ce faire utilisez la 2ème loi de Newton et l'acceleration en coordonnées cylindriques (polaires) pour montrer que :

$$\ddot{\rho} = \frac{L_0^2}{m^2\rho^3} - \frac{GM}{\rho^2}$$

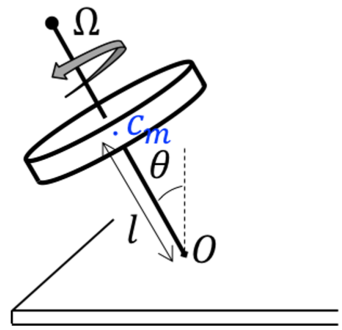
Puis utilisez l'astuce de chercher une équation différentielle sur la coordonnée $u = 1/\rho$ et de faire un changement de variable en exprimant la dérivée par rapport à θ et non t pour montrer que :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L_0^2}$$

Résoudre et conclure.

Exercice 3

Une toupie de masse m tourne sur le sol, à une vitesse angulaire Ω élevée. Son point de contact avec le sol O est fixe. L'axe de la toupie est animé d'un mouvement de précession, à la vitesse angulaire $\omega_p = \frac{mgl}{I\Omega}$ ou l est la distance entre O et le centre de masse c_m de la toupie et I son moment d'inertie autour de son axe. La toupie tourne dans le sens indiqué sur le schéma (les points de la toupie situés vers vous vont de haut en bas / de droite à gauche).

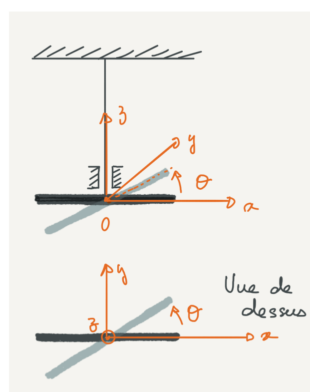


1. Quelles sont les forces appliquées à la toupie ?
2. Tracez le moment cinétique de la toupie sur le schéma.
3. Montrez dans quel sens a lieu le mouvement de précession.
4. Appliquez Newton au centre de masse et déduisez-en les composantes de la force de réaction du sol.

Exercice 4

Un barreau de masse M et longeur l est accroché par son milieu à un fil pendu au plafond et servant de pendule de torsion. Un guide autour du fil permet de le maintenir vertical (il ne peut donc pas se balancer comme un pendule simple).
On note θ l'angle entre (Ox) et la barre. À l'équilibre $\theta = 0$.
Le fil exerce sur le barreau un moment

$$\vec{M}_0 = -\kappa\theta\vec{e}_z$$



κ est une constante caractéristique du fil.

1. Etablir l'équation du mouvement puis la résoudre en supposant qu'à $t = 0$ on lâche le barreau sans vitesse angulaire à l'angle θ_0.
2. Le barreau est immobile à l'équilibre. On tire une balle de pistolet de masse m et vitesse v_0 qui arrive perpendiculairement au barreau et s'encastre dans son extrémité. Exprimer la déviation angulaire maximale du barreau en fonction des données du problème.

Solutions

Solution 1

1. Nous considérons $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ et $\vec{v}'$ la vitesse de la particule par rapport au cerceau. La force de frottements est donnée par $\vec{F}_f = -fv'\vec{\tau} = -mbv'\vec{\tau}$. Considérant la RFD, nous avons :
$$\sum \vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_f + \vec{N}$$
avec $m\vec{a}$ défini comme étant
$$m\vec{a} = ma_\tau\vec{\tau} + ma_n\vec{n} = mR\ddot{\theta}\vec{\tau} + mR\dot{\theta}^2\vec{n}$$
La RFD devient alors :
$$\sum \vec{F} = -mg\sin\theta\vec{\tau} - mg\cos\theta\vec{n} - mbv'\vec{\tau} + N\vec{n} = mR\ddot{\theta}\vec{\tau} + mR\dot{\theta}^2\vec{n}$$
La projection sur $\vec{\tau}$ nous donne $-mg\sin\theta - mbv' = mR\ddot{\theta}$ et donc l'équation differentielle :
$$\ddot{\theta} + \frac{b}{R}v' + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$
Le piège est qu'on travaille dans le référentiel $(O\vec{x}, \vec{y})$, qui est fixe pour avoir le droit d'appliquer la deuxième loi de Newton. En effet, le référentiel lié à l'anneau n'est pas galiléen (également dit d"'inertie")!
Il faut donc exprimer v' en fonction de θ et φ où θ et φ sont les angles par rapport à $(O\vec{x})$, donc au repère fixe :
$$v' = R(\dot{\theta} - \dot{\varphi})$$
avec $v' = R(\dot{\theta} - \dot{\varphi})$. Selon l'énoncé, nous avons $\varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega_e t)$ et donc $\dot{\varphi} = -\omega_e\varphi_0\sin(\omega_e t)$. L'équation peut donc se réécrire, en considérant l'approximation $\sin\theta \approx \theta$:
$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = -\omega_e b\varphi_0\sin(\omega_e t)$$
L'équation différentielle a la même forme que celle des oscillations amorties forcées vue au cours.

2. La solution du régime permanent va être de la forme $\theta(t) = \theta_m\cos(\omega_e t + \psi)$. Nous allons nous appliquer à chercher θ_m et ψ :
$$\left.\begin{aligned} \theta &= \theta_m\cos(\omega_e t + \psi) \\ \dot{\theta} &= -\theta_m\omega_e\sin(\omega_e t + \psi) \\ \ddot{\theta} &= -\theta_m\omega_e^2\cos(\omega_e t + \psi) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{dans l'équation différentielle du mouvement}$$

$$-\theta_m\omega_e^2\cos(\omega_e t+\psi)-b\theta_m\omega_e\sin(\omega_e t+\psi)+\frac{g}{R}\theta_m\cos(\omega_e t+\psi)=-\omega_e b\varphi_0\sin(\omega_e t)$$
$$\left[\frac{g}{R}\theta_m-\omega_e^2\theta_m\right]\cos(\omega_e t+\psi)-b\theta_m\omega_e\sin(\omega_e t+\psi)=-\omega_e b\varphi_0\sin(\omega_e t)$$
$$\theta_m\left[\frac{g}{R}-\omega_e^2\right](\cos\omega_e t\cos\psi-\sin\omega_e t\sin\psi)-$$
$$b\theta_m\omega_e(\sin\omega_e t\cos\psi+\cos\omega_e t\sin\psi)=-\omega_e b\varphi_0\sin(\omega_e t)$$

pour obtenir finalement :

$$\cos\omega_e t\left[\theta_m\left(\frac{g}{R}-\omega_e^2\right)\cos\psi-b\theta_m\omega_e\sin\psi\right]+$$
$$\sin\omega_e t\left[-\theta_m\left(\frac{g}{R}-\omega_e^2\right)\sin\psi-b\theta_m\omega_e\cos\psi+\omega_e b\varphi_0\right]=0$$

Les préfacteurs du cos et du sin doivent être nuls pour que l'équation soie vraie en tout temps. Nous obtenons alors :

$$\begin{cases}\theta_m\left(\frac{g}{R}-\omega_e^2\right)\cos\psi-b\theta_m\omega_e\sin\psi=0 & \text{(a)}\\ -\theta_m\left(\frac{g}{R}-\omega_e^2\right)\sin\psi-b\theta_m\omega_e\cos\psi+\omega_e b\varphi_0=0 & \text{(b)}\end{cases}$$

$$\text{(a)}\Rightarrow\left(\frac{g}{R}-\omega_e^2\right)\cos\psi=b\omega_e\sin\psi$$

et donc :

$$\tan\psi=\frac{\frac{g}{R}-\omega_e^2}{b\omega_e}$$

$$\text{(b)}\Rightarrow\theta_m\left(\frac{g}{R}-\omega_e^2\right)\tan\psi+b\theta_m\omega_e=\omega_e b\varphi_0\frac{1}{\cos\psi}$$

Des considérations trigonométriques nous donnent :

$$\tan^2\psi=\frac{\sin^2\psi}{\cos^2\psi}=\frac{1-\cos^2\psi}{\cos^2\psi}=\frac{1}{\cos^2\psi}-1\Rightarrow\frac{1}{\cos\psi}=\sqrt{\tan^2\psi+1}\qquad\text{(c)}$$

En combinant les résultats obtenus avec (a), (b) et (c), nous avons :

$$\theta_m\left(\frac{g}{R}-\omega_e^2\right)\frac{\frac{g}{R}-\omega_e^2}{b\omega_e}+b\theta_m\omega_e=\omega_e b\varphi_0\sqrt{\tan^2\psi+1}$$
$$\theta_m\left[\frac{\left(\frac{g}{R}-\omega_e^2\right)^2+b^2\omega_e^2}{b\omega_e}\right]=\cancel{\omega_e}b\varphi_0\sqrt{\frac{\left(\frac{g}{R}-\omega_e^2\right)^2+b^2\omega_e^2}{b^2\cancel{\omega_e^2}}}$$

De cette dernière équation, nous tirons :

$$\theta_m = \omega_e b \varphi_0 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{g}{R} - \omega_e^2\right)^2 + b^2\omega_e^2}}$$

On retrouve (évidemment !) une solution similaire à celle des oscillations forcées, mais cette fois ω_e apparaît au numérateur. Le calcul de la dérivée sera un peu différent. Pour quelle(s) valeur(s) de ω_e a-t-on θ_m maximal ? Soit $\xi = \omega_e^2$ (changement de variable). Alors

$$\theta_m^2 = \frac{b^2\varphi_0^2\xi}{\left(\frac{g}{R} - \xi\right)^2 + b^2\xi} = b^2\varphi_0^2 h(\xi)$$

avec $h(\xi) = \frac{\xi}{\left(\frac{g}{R}-\xi\right)^2+b^2\xi}$. En dérivant cette équation, nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}h(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = \frac{1}{\left(\frac{g}{R} - \xi\right)^2 + b^2\xi} - \frac{\xi\left(-2\left(\frac{g}{R} - \xi\right) + b^2\right)}{\left(\left(\frac{g}{R} - \xi\right)^2 + b^2\xi\right)^2} = \frac{\left(\frac{g}{R} - \xi\right)^2 + b^2\xi - \xi\left(-\frac{2g}{R} + 2\xi + b^2\right)}{\left(\left(\frac{g}{R} - \xi\right)^2 + b^2\xi\right)^2}$$

et en fixant la dérivée nulle (pour obtenir la valeur maximale)

$$\frac{\mathrm{d}h(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = 0 \Rightarrow \frac{g^2}{R^2} - 2\frac{g}{R}\xi + \xi^2 + b^2\xi + \frac{2g}{R}\xi - 2\xi^2 - b^2\xi = 0 \Rightarrow \frac{g^2}{R^2} - \xi^2 = 0 \Rightarrow \xi = \frac{g}{R} \Rightarrow \omega_e^2 = \frac{g}{R}$$

θ_m est donc maximal si nous avons la condition

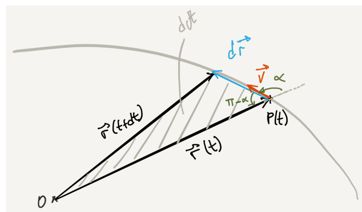
$$\omega_e = \sqrt{\frac{g}{R}} \to R_r = \frac{g}{\omega_e^2}$$

Solution 2

1. D'après Newton :

$$\vec{F}_G = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r$$

C'est un mouvement à force centrale (centre O), donc il y a conservation du moment cinétique de centre O.

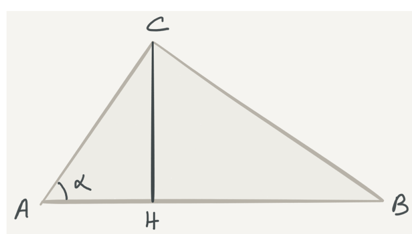


$$|\vec{L}_O| = |\vec{r} \wedge m\vec{v}| = rmv\sin\alpha = \text{cte} = L_O$$

$$rv\sin\alpha = \frac{L_O}{m} = \text{cte}$$

Prenons une trajectoire quelconque, la planète occupe le point $P(t)$ au temps t et parcourt $d\vec{r}$ pendant dt, l'aire balayée par le rayon vecteur $\vec{r}$ pendant dt est l'aire hachurée $d\mathcal{A}$.

Petit rappel sur l'aire d'un triangle



$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}AB.CH = \frac{1}{2}AB.AC\sin\alpha = \frac{1}{2}|\vec{AB} \wedge \vec{AC}|$$

donc

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2}|-\vec{r} \wedge d\vec{r}| = \frac{1}{2}rdr\sin(\pi - \alpha) = \frac{1}{2}rvdt\sin\alpha = \frac{L_O}{2m}dt$$

En intégrant entre t_1 et t_2 avec $\Delta t = t_2 - t_1$, l'aire balayée pendant Δt devient

$$\mathcal{A} = \frac{L_O}{2m}\Delta t$$

Les aires balayées pendant un Δt constant sont constantes.

2. D'après Newton :

$$\vec{F}_G = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_\rho = m\vec{a} = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e}_\rho + m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{\rho^2} \text{ (sur } \vec{e}_\rho\text{)}$$

pour éliminer $\dot{\theta}^2$ utilisons le moment cinétique

$$L_0^2 = m^2\rho^4\dot{\theta}^2 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{L_0^2}{m^2\rho^4}$$

$$\ddot{\rho} - \cancel{\rho}\frac{L_0^2}{m^2\rho^{\cancel{4}3}} = -\frac{GM}{\rho^2} \Rightarrow \ddot{\rho} = \frac{L_0^2}{m^2\rho^3} - \frac{GM}{\rho^2}$$

$u = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{1}{u}$ et $\rho^2\dot{\theta} = \frac{L_0}{m}$

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{d\rho}{d\theta}\frac{1}{\rho^2}\frac{L_0}{m} = \frac{L_0}{m}\frac{(d\rho/d\theta)}{\rho^2} = \frac{L_0}{m}\left[-\frac{d}{d\theta}(\frac{1}{\rho})\right] = -\frac{L_0}{m}\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{dt} = \frac{d\dot{\rho}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\left[-\frac{L_0}{m}\frac{du}{d\theta}\right] = -\dot{\theta}\frac{L_0}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{L_0}{m}\frac{L_0}{m}\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{L_0^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$-\frac{L_0^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{L_0^2}{m^2}u^3 - GMu^2$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L_0^2}$$

c'est le méme type d'équation différentielle que pour l'oscillateur harmonique avec la variable θ. Solution constante : $u = \frac{GMm^2}{L_0^2}$

$$u(\theta) = A\cos(\theta + \varphi) + \frac{GMm^2}{L_0^2} = \frac{1}{\rho}$$

on choisit la condition initale telle que $\varphi = 0$. (revient à prendre $\frac{1}{\rho}$ max donc ρ minimum pour $\theta = 0$).

$$\frac{1}{\rho} = A\cos\theta + \frac{GMm^2}{L_0^2} = \frac{GMm^2}{L_0^2}(1 + \frac{AL_0^2}{GMm^2}\cos\theta)$$

en utilisant $e = \frac{AL_0^2}{GMm^2}$, $\frac{GMm^2}{L_0^2}$ devient $\frac{A}{e} = \frac{1}{p}$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{A}{e}(1 + e\cos\theta) \Rightarrow \frac{p}{\rho} = 1 + e\cos\theta$$

On retrouve l'équation d'une cônique. Comme les trajectoires des planètes sont fermeés, cela ne peut pas être une parabole ou une hyperbole, donc forcément $e < 1$ et ce sont des ellipses.
Pour démontrer la loi des aires ⇒ aire balayeé pendant Δt : $\mathcal{A} = \frac{L_O}{2m}\Delta t$ devient pour 1 période $\Delta t = T$ avec $\mathcal{A} =$ aire ellipse $= \pi ab$:

$$\pi ab = \frac{L_O}{2m}T$$

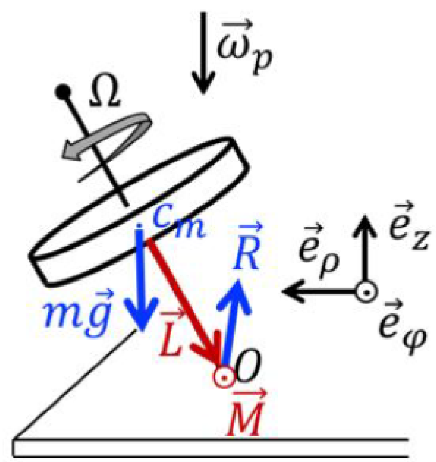
$$p = \frac{L_0^2}{GMm^2} = \frac{b^2}{a} \Rightarrow \frac{L_0^2}{GMm^2}a^3 = (ab)^2 = \frac{L_0^2}{4\pi^2 m^2}T^2 \Rightarrow ab = \frac{L_0}{2\pi m}T$$

$$\frac{\cancel{L_0^2}}{GM\cancel{m^2}}a^3 = \frac{\cancel{L_0^2}}{4\pi^2\cancel{m^2}}T^2 \Rightarrow T^2 = 4\pi^2\frac{a^3}{GM}$$

$$\text{et pour un cercle } T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Solution 3

1. La toupie est soumise à son poids $m\vec{g}$ appliqué au centre de masse et à la force de réaction du sol $\vec{R}$ appliquée en O. ($\vec{R}$ a une compossante horizontale, comme on le verra en d).
2. Le moment cinétique de la toupe est $\vec{L} = I\vec{\Omega}$. $\vec{L}$ a la même direction que $\vec{\Omega}$: il pointe vers le bas puisque la toupe tourne dans le sens horaire. *(Autre argument : règle du tire-bouchon)*
3. Le moment des forces en O est $\vec{M} = \vec{Oc_m} \times m\vec{g} + \underbrace{\vec{OO} \times \vec{R}}_{=0}$. C'est un vecteur perpendiculaire à la feuille dirigé vers nous, on le voit en faisant le produit vectoriel avec la main.



Note : le calcul dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ donne $\vec{M} = l(\sin\theta\vec{e}_\rho + \cos\theta\vec{e}_z) \times -mg\vec{e}_z = lmg\sin\theta\vec{e}_\varphi$. Mais nous n'avons besoin que de la direction de $\vec{M}$ pour répondre à la question , ce calcul n'est pas nécessaire.

Le théorème du moment cinétique en O est $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, soit un vecteur $\vec{L}$ qui pointe de plus en plus vers nous en tournant, ie la toupie s'éloigne de nous. Ceci correspond à un mouvement de précessions dans le sens horaire, $\vec{\omega_p}$ pointe vers le bas.

4. Le centre de masse de la toupie suit le mouvement de précession, c'est à dire qu'il a un mouvement circulaire uniforme autour de l'axe vertical passant par O à vitesse angulaire ω_p. Son accélération est donc l'accélération centripète

$$\vec{a} = -l \sin\theta\omega_p^2\vec{e}_\rho$$

et la deuxième loi de Newton s'écrit :

$$-ml\sin\theta\omega_p^2\vec{e}_\rho = -mg\vec{e}_z + \vec{R} \Rightarrow \vec{R} = mg\vec{e}_z - ml\sin\theta\omega_p^2\vec{e}_\rho = mg\vec{e}_z - \frac{m^3g^2l^3}{I^2\Omega^2}\sin\theta\vec{e}_\rho$$

On voit qu'outre la réaction normale apposée au poids, la force de réaction a une composante centripète. Notons tout de même que cette composante est faible : elle est proportionelle à $\frac{1}{\Omega^2}$ avec $\Omega >> 1$.

Solution 4

1. Moment d'inertie du barreau : $I_O = \frac{1}{12}Ml^2$
En O $\sum \vec{M_O^{ext}} = \frac{d\vec{L_O}}{dt}$.
Les forces sont le poids $\vec{P}$, la tension du fil $\vec{T}$ et le moment dû à la torsion.

$$\vec{M_O^P} = \vec{0},\ \ \vec{M_O^T} = \vec{0}\ \text{ donc }\ \sum \vec{M_O^{ext}} = -\kappa\theta\vec{e}_z$$

$$\vec{L_0} = I_O\vec{\omega} = I_{Oz}\dot{\theta}\vec{e}_z,\quad \frac{d\vec{L_O}}{dt} = I_{Oz}\ddot{\theta}\vec{e}_z$$

$$\sum \vec{M_O} = \frac{d\vec{L_O}}{dt} \Rightarrow -\kappa\theta\vec{e}_z = I_{Oz}\ddot{\theta}\vec{e}_z$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\kappa}{I_{Oz}}\theta = 0$$

donc $\theta(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$ avec $\Omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I_{Oz}}}$

$$\theta t = \theta_0 \ \ et \ \ \dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \ \ et \ \ A = \theta_0$$

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\Omega_0 t)$$

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I_{Oz}}} = \sqrt{\kappa\frac{12}{Ml^2}} = 2\sqrt{\frac{3\kappa}{Ml^2}}$$

2. Système : barreau + balle. à $t = 0$ la balle s'encastre dans le barreau. Les forces exterieurs sont le poids (négligé pour la balle) et poids du barreau et tension du fil pour la barre. Elles on un moment nul par rapport à O. On a donc conservation de moment cinétique avant et après le choc $\vec{L}_O^{avant} = \vec{L}_O^{après}$. Après le choc, le système

barre+balle se met à tourner avec une vitesse angulaire initiale ω_0. On détermine ω_0 par la conservation du moment cinétique lors du choc.

$$\vec{L}_O^{\text{avant}} = \vec{0} + \frac{l}{2} m v \vec{e}_z = \vec{L}_O^{\text{après}} = (I_{tot})\omega_0 \vec{e}_z$$

$$I_{\text{tot}} = I_{\text{barre}} + I_{\text{balle}} = \frac{1}{12} M l^2 + \frac{1}{4} m l^2 = I_{\text{tot}}$$

$$\omega_0 = \frac{mlv}{2I_{tot}} \quad I_{\text{tot}} = \frac{l^2}{4}(m + \frac{M}{3})$$

L'équation de mouvement est : $\theta(t) = A\cos(\Omega_1 t) + B\sin(\Omega_1 t)$. avec $\Omega_1 = \sqrt{(\kappa / I_{\text{tot}})}$ cette fois $\theta(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$$\dot{\theta}(0) = \omega_0 \quad \dot{\theta}(t) = B\Omega_1 \cos(\Omega_1 t) \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(0) = B\Omega_1 = \omega_0 \Rightarrow B = \frac{\omega_0}{\Omega_1}$$

$$\theta(t) = \frac{\omega_0}{\Omega_1} \sin(\Omega_1 t)$$

$$\Rightarrow \theta_{max} = \frac{mlv}{2I_{\text{tot}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\kappa}{I_{\text{tot}}}}} = \frac{mlv}{2\sqrt{\kappa I_{\text{tot}}}} = \frac{m\cancel{l}v}{\cancel{2}\sqrt{\kappa}\frac{\cancel{l}}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{M}{3} + m}} = \frac{mv}{\sqrt{\kappa(m + \frac{M}{3})}}$$