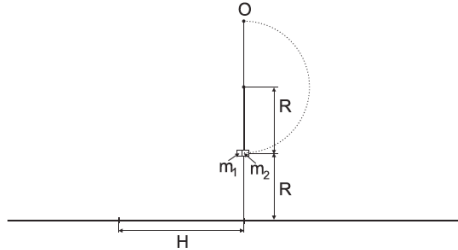


Exercices

Exercice 1



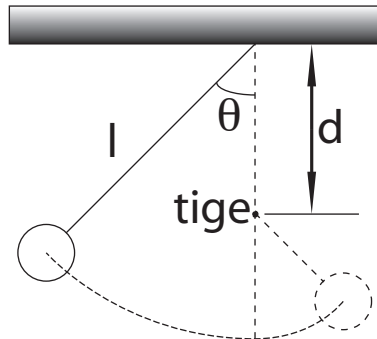
Soit un corps composé de deux masses ponctuelles m_1 et m_2 reliées entre elles par un explosif (de masse nulle). Le corps est suspendu à un fil souple de longueur R (voir schéma), attaché à la masse m_2 . Le système étant initialement au repos, la masse m_1 est éjectée horizontalement à vitesse v_1 par l'explosion pour atterrir à une distance H du point de départ.

La masse m_2 est entraînée par le fil avec une vitesse v_2 juste après l'explosion sur une trajectoire circulaire. Lorsque m_2 atteint le point O , le fil se décroche et m_2 atteint le sol au même endroit que m_1 . On considère que la masse m_2 a une vitesse juste suffisante pour atteindre O .

Calculez les rapports $\frac{v_1}{v_2}$ et $\frac{m_1}{m_2}$, ainsi que la valeur de H .

Exercice 2

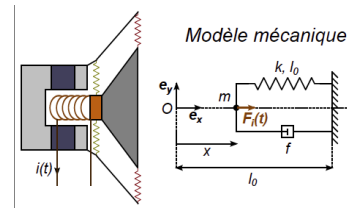
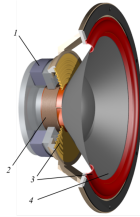
Un pendule simple est formé d'une petite sphère de masse $m = 3$ kg attachée à un fil inextensible de longueur $l = 3$ m. Le pendule est lâché sans vitesse initiale avec un angle $\theta_0 = -8^\circ$ par rapport à la verticale. À $t = 0$, lorsque le fil est vertical, il heurte une tige horizontale située à une distance $d = 1.30$ m sous le point de suspension. La sphère continue son mouvement sur une trajectoire circulaire de rayon $r = l - d$. Utilisez l'approximation des oscillations de faible amplitude.



1. Calculer la vitesse v de la sphère et la tension $T_<$ dans le fil juste avant le choc.
2. Calculer la tension $T_>$ dans le fil juste après le choc.
3. Calculer l'angle $\theta_M > 0$ d'écartement maximal que le fil fait par rapport à la verticale.
4. Calculer la période P du mouvement de la sphère.

Exercice 3 Cet exercice a été donné à l'examen de physique générale I de 2013

On se propose d'étudier le fonctionnement mécanique d'un haut-parleur électrodynamique. Celui-ci présenté sur la figure ci-dessous est constitué d'un aimant (1), d'une bobine (2), de suspensions (3) et d'une membrane ou cône (4). Quand un courant électrique circule dans la bobine, une force de Laplace s'applique axialement sur celle-ci déplaçant avec elle la membrane. Les suspension permettent de maintenir le mouvement de la membrane dans l'axe et assurent une force de rappel.



On modélise la partie mécanique du haut-parleur à l'aide d'une masse ponctuelle m , se déplaçant horizontalement sans frottement le long de l'axe $(O, \vec{e}_x)$. Cette masse est reliée à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k , ainsi qu'à un amortisseur fluide de constante f . Elle est soumise à une force $\vec{F}_i(t) = Ki(t)\vec{e}_x$, imposée par le courant sinusoïdal $i(t) = I \cos(\omega_e t)$ entrant dans le haut-parleur. On travaille dans le référentiel terrestre considéré galiléen $R_g(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

Données : $m = 0.02 \text{ kg}$, $k = 20\,000 \text{ N m}^{-1}$, $K = 200 \text{ N A}^{-1}$, $I = 1 \text{ A}$, $Q = 2$.

1. A l'aide de l'analyse des forces, écrire l'équation différentielle vérifiée par la masse m en fonction de la pulsation propre Ω_0 , du facteur de qualité Q du système, K , I et m . Expliciter Ω_0 en fonction des données du problème et donner sa valeur numérique.

.....
 $\Omega_0 =$

2. Exprimer le coefficient de frottement f en fonction de Q , k et m et donner sa valeur numérique.

$f =$

3. Schématiser l'évolution de l'amplitude des vibrations du membrane lorsque le haut parleur est mis en marche sur une fréquence ω_e . Quelle est la condition pour que le rendu sonore soit le plus fidèle possible à la fréquence ω_e ?

.....

4. La réponse forcée en régime permanent est de la forme $x(t) = A \sin(\omega_e t + \varphi)$. Donner l'amplitude $A(X)$ en fonction de Q , K , I , k , et de la pulsation réduite $X = \frac{\omega_e^2}{\Omega_0^2}$.

$A(X) =$

5. Que vaut l'amplitude A^0 pour $\omega_e = 0$? Exprimer l'amplitude maximale A^{max} et la pulsation ω_e^{max} correspondante en fonction de Q , Ω_0 , K , I et k . Tracer l'allure de $A(X)$. Que se passe t-il quand $f \rightarrow 0$?

$$A^0 = \dots\dots\dots$$

$$A^{max} = \dots\dots\dots$$

$$\omega_e^{max} = \dots\dots\dots$$

6. La bande passante à -3 dB du système correspond à la gamme de fréquences pour lesquelles $A(X) \geq \frac{A^{max}}{\sqrt{2}}$. Exprimer les fréquences de coupures ω_c^1 et ω_c^2 en fonction de Q et Ω_0 et tracer les sur le graphe $A(X)$ de la question précédente. On ne cherchera pas à faire l'application numérique.

$$\omega_c^1 = \dots\dots\dots$$

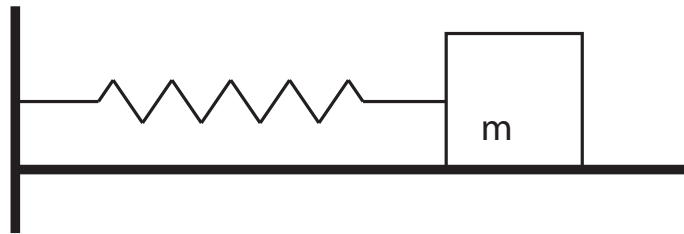
$$\omega_c^2 = \dots\dots\dots$$

7. Calculer la puissance moyenne dissipée $\langle P^{diss} \rangle(X)$ et trouver la puissance maximale dissipée P^{max} en fonction de Q , K , I , k , et m . Donner la valeur numérique de P^{max} .

$$\langle P^{diss} \rangle(X) = \dots\dots\dots P^{max} = \dots\dots\dots$$

Exercice 4

On considère le montage suivant :



Cette fois-ci, et contrairement à la situation du cours où les frottements fluides étaient considérés, on considère des frottements secs. Le coefficient de frottement est $\mu_c = \mu_s$. On suppose qu'on écarte la masse d'une distance x_0 vers la droite, de sorte que la force de rappel du ressort soit égale à 4 fois la force de frottement. On lâche la masse sans vitesse initiale.

Quelle sera la nature du mouvement? Tracer x en fonction du temps.

Solutions

Solution 1 Nous définissons le système de coordonnées de telle sorte que la gravitation soit antiparallèle à l'axe y . La masse m_1 subit après l'explosion la loi de la chute libre, avec une vitesse selon $\vec{e}_x$ juste après l'explosion. Donc :

$$\vec{e}_x : v = cte = v_1 \Rightarrow x(t) = v_1 t$$

$$\vec{e}_y : a = cte = -g; \quad v(t=0) = 0 \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + R$$

Au temps t_1 , la masse m_1 atteint le sol (soit $y = 0$) :

$$y(t_1) = 0 = -\frac{1}{2}gt_1^2 + R \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

De plus,

$$x(t_1) = H = v_1 t_1 \Rightarrow H = v_1 \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

Lors de l'explosion, la conservation de la quantité de mouvement est applicable :

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 \quad (1)$$

La masse m_2 ne subit aucune force de la part du fil au point O . Donc :

$$-m_2 g + \frac{m_2 \hat{v}_2^2}{R} = 0 \Rightarrow \hat{v}_2 = \sqrt{gR} \quad (2)$$

avec $\hat{v}_2$ la vitesse de la masse m_2 au point O . Cette vitesse est liée à celle de la masse m_2 juste après l'explosion par la conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2}m_2 v_2^2 + m_2 g R = \frac{1}{2}m_2 \hat{v}_2^2 + 3m_2 g R$$

et donc :

$$v_2^2 = \hat{v}_2^2 + 4gR$$

Ainsi, avec (2), on obtient

$$v_2^2 = 5gR \Rightarrow v_2 = \sqrt{5gR} \quad (3)$$

Après que le fil se soit décroché, la masse décrit également un mouvement de chute libre, avec :

$$\vec{e}_x : v = cte = \hat{v}_2 \Rightarrow x(t) = \hat{v}_2 t$$

$$\vec{e}_y : a = cte = -g; \quad v(t=0) = 0 \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2}gt_2^2 + 3R$$

Le temps auquel la masse m_2 touche le sol est donné par :

$$y(t_2) = 0 = -\frac{1}{2}gt_2^2 + 3R \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{6R}{g}}$$

Puisque la masse m_2 atteint le sol au même endroit que la masse m_1 , on a :

$$x(t_2) = H = \hat{v}_2 t_2 \Rightarrow H = \hat{v}_2 \sqrt{\frac{6R}{g}}$$

Finalement,

$$H = \hat{v}_2 \sqrt{\frac{6R}{g}} = \sqrt{gR} \sqrt{\frac{6R}{g}} = \sqrt{6R}$$

et donc

$$v_1 = H \sqrt{\frac{g}{2R}} = \sqrt{6R} \sqrt{\frac{g}{2R}} = \sqrt{3gR} \quad (4)$$

Le rapport des vitesses est obtenu avec (3) et (4) :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{3gR}}{\sqrt{5gR}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

et, par conséquent, celui des masses avec (1) :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

Solution 2 La tension dans le fil est perpendiculaire au déplacement et donc n'effectue pas de travail. La variation d'énergie cinétique de la sphère est égale au travail effectué par le poids (force conservative).

1.

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl(1 - \cos \theta_0) \Rightarrow v^2 = 2gl(1 - \cos \theta_0)$$

A la verticale, la composante normale de la résultante des forces est égale au produit de la masse fois l'accélération centripète :

$$T_{<} - mg = \frac{mv^2}{l} \Rightarrow T_{<} = mg(3 - 2 \cos \theta_0)$$

A.N. : $v = 0.76 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $T_{<} = 30 \text{ N}$.

2. Juste après le choc avec la tige, le rayon de courbure devient $r = l - d = 1.7 \text{ m}$.
Alors :

$$T_{>} = mg + \frac{mv^2}{r} = mg \left[1 + \frac{2l(1 - \cos \theta_0)}{l - d} \right]$$

A.N. : $T_{>} = 30.4 \text{ N}$.

3. Le théorème de la conservation de l'énergie mécanique nous dit que les deux points de rebroussement du mouvement de la sphère ont la même hauteur. Donc :

$$l(1 - \cos \theta_0) = r(1 - \cos \theta_M) \Rightarrow \cos \theta_M = 1 - \frac{l}{r}(1 - \cos \theta_0)$$

A.N. : $\theta_M = 10.6^\circ$.

4. Dans l'approximation des petites oscillations, la période d'oscillation d'un pendule de longueur λ est donnée par $2\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$. La période du mouvement de la sphère est donnée par une demi-période d'oscillation avec longueur l plus une demi-période d'oscillation avec longueur r :

$$P = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} + \pi\sqrt{\frac{l-d}{g}}$$

A.N. : $P = 3.045$ s.

Solution 3 1. (1.5 pts). La masse est soumise aux forces suivantes :

$$\vec{F}_k = -kx\vec{e}_x$$

$$\vec{F}_f = -f\dot{x}\vec{e}_x$$

$$\vec{F}_i = KI \cos(\omega_e t) \vec{e}_x$$

L'application de la relation fondamentale de la dynamique nous donne :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{x}\vec{e}_x = -kx\vec{e}_x - f\dot{x}\vec{e}_x + KI \cos(\omega_e t) \vec{e}_x,$$

soit projetée sur l'axe (O, $\vec{e}_x$)

$$\ddot{x} + \frac{f}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{KI}{m} \cos(\omega_e t)$$

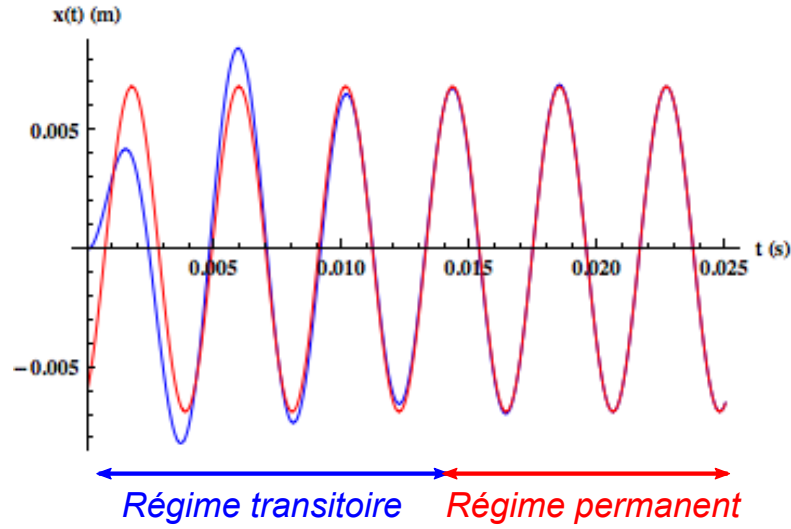
L'équation différentielle s'écrit finalement en fonction de la pulsation Ω_0 et du facteur de qualité Q de la façon suivante :

$$\ddot{x} + \frac{\Omega_0}{Q}\dot{x} + \Omega_0^2 x = \frac{KI}{m} \cos(\omega_e t)$$

avec $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{m\Omega_0}{f}$.

A.N. : $\Omega_0 = 1 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}$.

2. (0.5 pts). $f = \frac{\sqrt{km}}{Q} = 10 \text{ N s m}^{-1} = 10 \text{ kg s}^{-1}$.
3. (1 pt). La solution de l'équation différentielle est la superposition d'une solution décroissante (solution amortie) de la solution en régime permanent.



Pour que le rendu sonore soit bon, l'établissement du régime permanent doit se faire rapidement.

4. (1 pt). En régime permanent, $x(t) = A \sin(\omega_e t + \varphi)$.

$$A(\omega_e) = \frac{(KI/m)}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}}$$

soit

$$A(X) = \frac{KI}{k} \frac{Q}{\sqrt{Q^2(1-X)^2 + X}}$$

5. (2.5 pts). Pour $X = 0$, $A^0 = \frac{KI}{k}$.

L'amplitude maximale A^{max} se trouve quand $g(X) = Q^2(1-X)^2 + X$ est minimum :

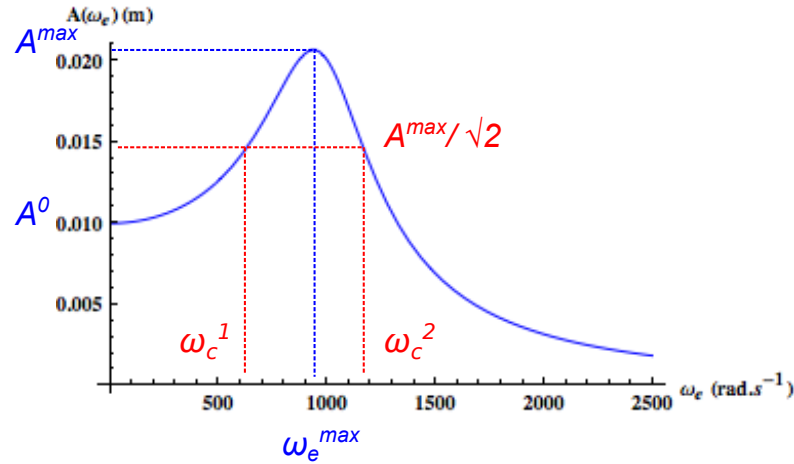
$$\frac{dg(X)}{dX} = -2Q^2(1-X) + 1 = 0 \Rightarrow X^{max} = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

soit

$$\omega_e^{max} = \Omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

et

$$A^{max} = A(X^{max}) = \frac{KI}{k} \frac{Q^2}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}}$$



6. (1.5 pts). On trouve les fréquences de coupure en posant :

$$A(X) = \frac{A(X^{max})}{\sqrt{2}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{Kf}{k} \frac{\emptyset}{\sqrt{Q^2(1-X)^2 + X}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{Kf}{k} \frac{Q^2}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}}.$$

Ce qui est équivalent à résoudre l'équation du second degré suivante :

$$Q^2(Q^2(1-X)^2 + X) = 2(Q^2 - \frac{1}{4})$$

c'est à dire,

$$X^2 + \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)X + 1 - \frac{2}{Q^2} + \frac{1}{2Q^4} = 0.$$

On trouve alors

$$X_c = 1 - \frac{1}{2Q^2} \pm \frac{1}{Q} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

soit

$$\omega_c^1 = \Omega_0 \sqrt{X_c^-}$$

et

$$\omega_c^2 = \Omega_0 \sqrt{X_c^+}$$

7. (2 pts). $\langle P^{diss} \rangle (X)$ est la puissance moyenne dissipée à cause des forces de frottements. On la calcule sur une période d'oscillation T :

$$\langle P^{diss} \rangle (X) = \frac{E^{diss}}{T} = \frac{-1}{T} \int_0^T \vec{F}_f \cdot d\vec{x} = \frac{-1}{T} \int_0^T (-f \dot{x} \vec{e}_x) \cdot (\dot{x} dt \vec{e}_x) = \frac{f}{T} \int_0^T \dot{x}^2 dt.$$

On a $x(t) = A \sin(\omega_e t + \varphi)$ et $\dot{x}(t) = A\omega_e \cos(\omega_e t + \varphi)$, d'où

$$\langle P^{diss} \rangle (X) = \frac{f A^2 \omega_e^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega_e t + \varphi) dt .$$

On fait le changement de variable $u = \omega_e t + \varphi$ et $du = \omega_e dt$. Comme $\int_0^{2\pi} \cos^2(u) du = \pi$ et $T = \frac{2\pi}{\omega_e}$, on trouve finalement

$$\langle P^{diss} \rangle (X) = \frac{f A^2 \omega_e^2}{2} = \frac{K^2 I^2 Q}{2\sqrt{km}} \frac{X}{Q^2(1-X)^2 + X} .$$

$\langle P^{diss} \rangle (X)$ est maximale pour

$$\frac{d \left(\frac{X}{Q^2(1-X)^2 + X} \right)}{dX} = 0 \Rightarrow X = 1 .$$

On trouve finalement

$$P^{max} = \frac{K^2 I^2 Q}{2\sqrt{km}} .$$

A.N : $P^{max} = 2000 \text{ W}$.

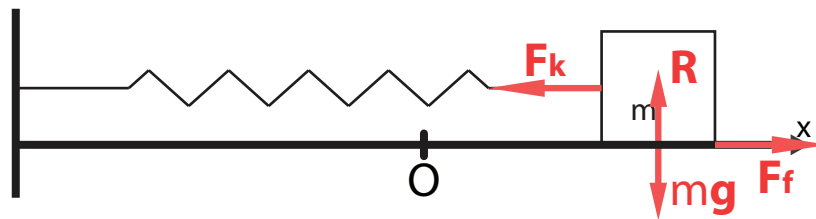
Solution 4

Qualitativement :

La force de frottement va dissiper de l'énergie. Les oscillations vont s'affaiblir. Il arrivera un moment où la masse s'arrêtera ; la force de rappel ne sera plus suffisante pour vaincre les frottements statiques. La masse va alors s'arrêter.

Il faudra considérer les cas où la masse se déplace de gauche à droite séparément du cas où la masse se déplace de droite à gauche. En effet, la force de frottement a la même intensité, mais elle va changer de signe.

Conditions initiales : (Mouvement de droite à gauche)



La RFD nous donne :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{R} + \vec{mg} + \vec{F}_k + \vec{F}_f = m\vec{a}$$

avec les forces de rappel du ressort et de frottement suivantes :

$$\vec{F}_k = -kx\vec{e}_x \qquad \vec{F}_f = \mu_c mg \vec{e}_x$$

Initialement, on a x_0 tel que $|\vec{F}_f| = \frac{1}{4}|\vec{F}_k|$, et donc

$$\mu_c mg = \frac{1}{4}kx_0 \Rightarrow x_0 = \frac{4\mu_c mg}{k}$$

En projetant la RFD sur l'axe (Ox) , on obtient :

$$-kx\vec{e}_x + \mu_c mg \vec{e}_x = m\ddot{x}\vec{e}_x$$

c'est-à-dire

$$m\ddot{x} + kx = \mu_c mg \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \mu_c g$$

Il s'agit d'une équation différentielle de type M-1 avec second membre...

solution sans second membre :

$$x_1(t) = A \cos \Omega_0 t + B \sin \Omega_0 t \qquad \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

solution particulière : $x_2(t) = cte$

$$\frac{k}{m}x_2 = \mu_c g \Rightarrow x_2 = \frac{m}{k}\mu_c g$$

solution complète

$$x(t) = A \cos \Omega_0 t + B \sin \Omega_0 t + \frac{m\mu_c g}{k}$$

recherche des constantes : (CI : $\dot{x}(t=0) = 0$; $x(t=0) = x_0$)

$$\dot{x}(t=0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B = 0$$

$$x(t=0) = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad A + \frac{m\mu_c g}{k} = x_0 = \frac{4\mu_c mg}{k} \Rightarrow A = \frac{3\mu_c mg}{k}$$

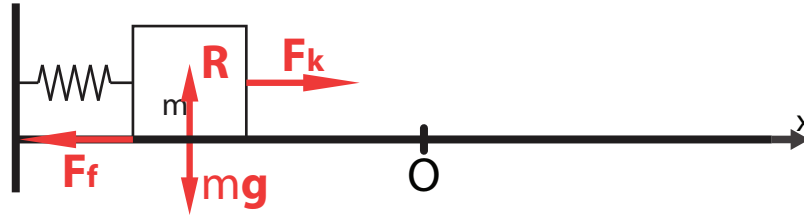
On en tire :

$$\boxed{x(t) = \frac{3\mu_c mg}{k} \cos \Omega_0 t + \frac{\mu_c mg}{k}} \qquad 0 < t < t_1$$

Au bout d'une $\frac{1}{2}$ période, $\Omega_0 t_1 = \pi$, alors $\dot{x}(t) = 0$: la vitesse s'annule. Si la masse repart, elle se déplace alors de gauche à droite.

$$x(t_1) = \frac{3\mu_c mg}{k}(-1) + \frac{\mu_c mg}{k} = -2\frac{\mu_c mg}{k}$$

On a alors $|F_k| = 2\mu_c mg$, suffisant pour faire repartir la masse.



On reprend la RFD :

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= \vec{R} + \vec{mg} + \vec{F}_k + \vec{F}_f = m\vec{a} \\ -\mu_c mg \vec{e}_x - kx \vec{e}_x &= m\ddot{x} \vec{e}_x \\ m\ddot{x} + kx &= -\mu_c mg \\ \ddot{x} + \frac{k}{m}x &= -\mu_c g\end{aligned}$$

et on résout :

$$x_1(t) = A \cos \Omega_0 t + B \sin \Omega_0 t$$

$$x_2(t) = cte$$

$$\frac{k}{m}x_2 = -\mu_c g \Rightarrow x_2 = -\frac{\mu_c mg}{k}$$

$$x(t) = A \cos \Omega_0 t + B \sin \Omega_0 t - \frac{\mu_c mg}{k}$$

On est à $t_1 = \frac{\pi}{\Omega_0}$:

$$\dot{x}(t_1) = 0 = -A\Omega_0 \sin \Omega_0 t_1 + B\Omega_0 \cos \Omega_0 t_1$$

donc, $B = 0$ et on obtient :

$$x(t) = A \cos \Omega_0 t - \frac{\mu_c mg}{k}$$

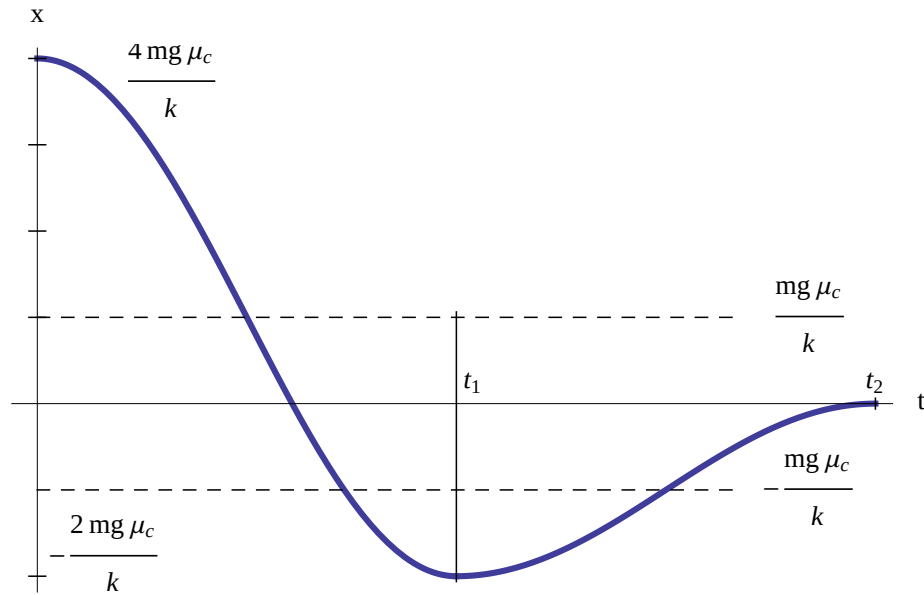
Or, à $t = t_1$,

$$x(t_1) = -\frac{2\mu_c mg}{k} = -A - \frac{\mu_c mg}{k} \Rightarrow A = \frac{\mu_c mg}{k}$$

et donc, finalement

$$\boxed{x(t) = \frac{\mu_c mg}{k} \cos \Omega_0 t - \frac{\mu_c mg}{k}} \quad t_1 < t < t_2$$

La masse s'arrête à nouveau pour $\Omega_0 t_2 = 2\pi \Rightarrow x(t_2) = 0$. La masse s'arrête alors là.



La première partie du mouvement est une demi-sinusoïde d'amplitude $\frac{3\mu_c mg}{k}$, décalée de $\frac{\mu_c mg}{k}$ vers le haut. Après une demi-période ($t_1 = \frac{\pi}{\Omega_0}$), cela devient une sinusoïde d'amplitude $\frac{\mu_c mg}{k}$.