Les seuls objets autorisés sont:
- une feuille A4 manuscrite recto-verso
- stylos, etc.
Les réponses finales à chaque question ainsi que la justification de la réponse doivent être reportées sur l'énoncé dans les cases prévues à cet effet.

Seul le cahier de réponse est ramassé et corrigé. Pas de feuilles volantes.

L'examen comporte 3 exercices, numérotés de 1 à 3
Le nombre de points maximum pour cet examen est de 34 points + 3.5 points de bonus

Ne pas retourner avant le début de l'épreuve

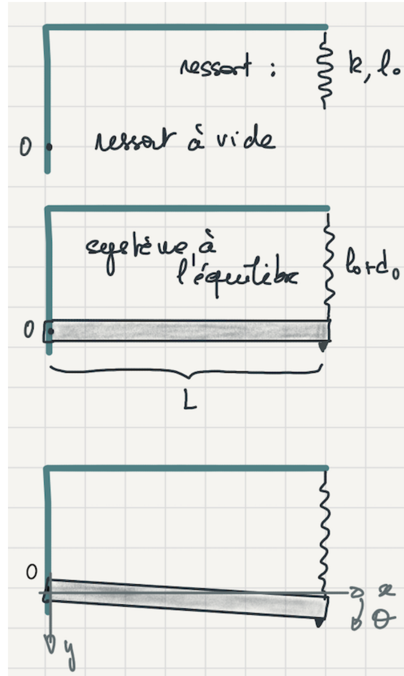
Exercice 1 Microscope à force atomique (12 points)

Le microscope à force atomique (AFM) permet d'observer la surface d'échantillons à l'échelle du nanomètre, voire de l'atome. Pour ce faire, on balaye une pointe, fixée à l'extrémité d'une barre très fine, au dessus de l'échantillon et on mesure la déviation de la barre qui donne une information sur la force entre la pointe et l'échantillon, qui peut être attractive ou répulsive.

Dans un mode particulier, dit mode dynamique, bien adapté à la matière molle, la barre est mise à osciller par une force périodique et on regarde la variation de l'amplitude des oscillations en fonction de l'endroit où se trouve la pointe.

Nous allons modéliser une pointe d'AFM de la manière suivante:

Une barre de longueur L et de masse m est fixée à une extrémité par un pivot et à l'autre à un ressort de longueur au repos l_0 et de raideur k. Les paramètres sont tels que à l'équilibre, la barre est horizontale, le ressort allongé de d_0. On néglige la masse de la pointe devant celle de la barre. Lorsque la barre est en mouvement, l'angle θ mesuré entre Ox et la barre reste faible si bien qu'on peut considérer que le ressort reste vertical, aligné avec l'axe (Oy) et $\cos\theta \simeq 1$ et $\sin\theta \simeq \theta$.



a. Faire l'inventaire des forces appliquées sur la barre et les représenter sur un schéma.

☞ On étudie d'abord le système à l'équilibre.

b. Calculer l'allongement d_0 du ressort à l'équilibre en fonction de m, g et k.

☞ On considère maintenant des petites oscillations autour de la position d'équilibre. On commence par négliger les frottements.

c. Montrer que l'allongement du ressort s'exprime $(l - l_0) = \frac{mg}{2k} + \theta L$

d. On suppose que la barre est en mouvement. Calculer l'énergie mécanique du système en fonction de l'angle θ et de sa dérivée.

e. Établir l'équation différentielle du mouvement de la barre en fonction de l'angle θ.

f. On écarte la barre de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 et on la lâche sans vitesse initiale. Donner l'expression de $\theta(t)$, ainsi que la période T_0 des oscillations.

☞ On suppose maintenant que le système subit un frottement fluide, qui crée un moment de force par rapport au pivot de la forme $\vec{M}_O^{\vec{F}} = -b\dot{\theta}\vec{e}_z$. Par ailleurs, on utilise le support, maintenant mobile, pour imprimer à la barre une force de la forme $\vec{F}_e = F_e \cos(\omega_e t)\vec{e}_y$, appliquée au point d'attache du ressort.

g. Etablir l'équation différentielle du mouvement dans le cas θ faible.

h. Donner l'expression de $\theta(t)$ en régime permanent. Rappeler l'expression de l'amplitude des oscillations obtenues en fonction de la pulsation d'excitation ω_e.

i. Quelle est la valeur de ω_e pour laquelle l'amplitude est maximale ? On l'exprimera en fonction de k, m, L et b.

☞ Lorsqu'on promène la pointe au dessus de l'échantillon à observer, la matière de l'échantillon exerce sur la pointe une force d'autant plus grande que la pointe est proche de la surface.

j. expliquer qualitativement pourquoi la mesure de l'amplitude des oscillations de la pointe permet d'obtenir une information sur la distance entre la pointe et l'échantillon.

Exercice 2 Mission DART (12 points + 1.5 points de bonus)

En septembre 2022, la mission DART a testé la capacité d'une mission humaine à dévier la trajectoire d'un astéroide, dans le but de pouvoir éventuellement dévier un "gécroiseur", c'est à dire un astéroide qui pourrait intercepter la trajectoire de la Terre. Nous allons étudier certains aspects de cette mission.

Le système choisi pour le test est un système double avec un astéroide principal, Didymos, appelé D1, de forme sphérique, et de rayon $R_1 = 400$m et de masse M_1, autour duquel tourne un plus petit objet Dimorphos, appelé D2, de forme sphérique, de rayon $R_2 = 80$m et de masse M_2. D2 tourne autour de D1 sur une orbite circulaire de rayon $r_0 = 1200$m. R_1, R_2 et r_0 ont été mesuré depuis la Terre par radar. La période $T_0 = 12$ heures de D2 autour de D1 est aussi mesurée depuis la Terre. On fera les calculs dans le référentiel $\mathcal{R}$ de D1 (origine au centre de D1).
On donne la constate de gravitation, $G = 6.67.10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$. On approximera $4\pi^2/6.67 = 6$

a. Déterminer la masse M_1 à l'aide des données.

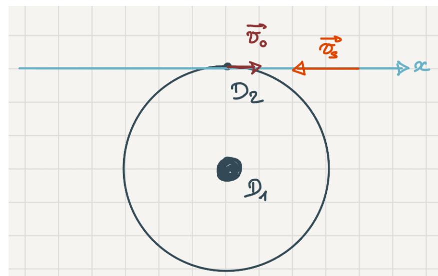
b. Déterminer la masse M_2 à partir $M1$ et des rayons de D1 et D2, en supposant que la masse volumique des deux corps est identique.

c. Application numérique, calculer M_1 et M_2.

d. Déterminer v_0 la vitesse orbitale de $D2$ dans $\mathcal{R}$; faire l'application numérique.

☞ Dans la suite on supposera M_1 et M_2 connus (peuvent être pris comme données).

☞ Un satellite de masse $m_s = 500$kg, envoyé depuis la Terre doit entrer en collision avec D2. Il arrive dans $\mathcal{R}$ avec une vitesse de norme $v_s = 6.10^3\text{m.s}^{-1}$, et de vecteur tangent à l'orbite de $D2$. On suppose le choc parfaitement frontal, et les deux vecteurs vitesses de sens opposé.



e. Calculer v_1, la nouvelle vitesse de D_2 après le choc, supposé ici parfaitement inélastique.

f. Shématiser sur un même dessin l'orbite de D_2 avant le choc et la trajectoire après le choc.

g. *Question bonus: 1.5pt* Calculer analytiquement, puis numériquement $\Delta v_1 = v_1$-v_0. On fera les approximations adéquates pour simplifier l'expression obtenue.

☞ En fait, une hypothèse raisonable est de penser qu'une certaine quantité de matière est éjectée par le choc. On suppose que la masse m_e est éjectée à la vitesse $\vec{v}_e$ dans une direction parfaitement opposée à $\vec{v}_s$.

h. Calculer v_2 la nouvelle vitesse de D_2 après le choc dans ce cas.

i. v_2 est-elle plus petite ou plus grande que v_1 ? Justifier.

☞ Le défi suivant pour la mission DART est de réussir à obtenir v_2. Cela permettra à l'équipe scientifique d'en déduire les caractéristiques du choc. Depuis la Terre, il est possible de mesurer la nouvelle période orbitale T_2, de l'orbite devenue maintenant elliptique. On appelle r_2 la plus petite distance entre D_2 et D_1 sur cette orbite. On rappelle la 3 ème loi de Kepler: le carré des périodes est proportionnel au cube des demis grands axes.

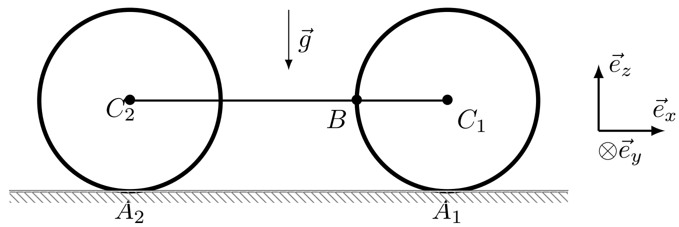
j. Calculer r_2 en fonction de r_0, T_0 et T_2.

k. Déterminer v_2 en fontion de r_0, r_2, M_1 et G.

l. Représenter sur un même schéma les diagrammes d'énergie potentielle effectives dans la trajectoire avant et après le choc.

Exercice 3 Modèle de vélo (10 points + 2 points de bonus)

On souhaite étudier le freinage d'un vélo. On modélise les roues du vélo par des cylindres creux minces, identiques, de masse m et de rayon R. Une tige rigide, sans masse et de longueur $L > 2R$ relie les deux cercles par leurs centres, C_1 et C_2, comme indiqué sur le dessin. La roue arrière est de centre C_2 et la roue avant de centre C_1. Le vélo reste dans le plan (O, x, z).



Le vélo est équipé seulement d'un frein avant, en B. Quand le vélo est en train de freiner, la tige exerce en B une force constante sur la roue avant $\vec{F}_B = -F_B\vec{e}_z$, avec $F_B > 0$. On considère d'abord que les deux roues reposent sur le sol et roulent sans glisser sur celui-ci. Le sol est horizontal.

a. Le vélo est en train de freiner, énumérer les forces externes appliquées sur le système total {tige + deux roues}, avec leurs points d'application, en faisant attention à leur sens, et les représenter sur un dessin.

☞ Le cycliste a une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$. À partir de l'instant $t = 0$, il freine, avec la force $\vec{F}_B$ décrite plus haut. Le freinage produit une accélération du velo $\vec{a}_0 = -a_0\vec{e}_x$,

b. En prenant comme système la roue avant seule, exprimer vectoriellement la force de frottement entre la roue avant et le sol en fonction de a_0 et F_B et m.

c. En prenant comme système la roue arrière seule, exprimer vectoriellement la force de frottement entre la roue arrière et le sol en fonction de a_0 et m.

d. Trouver une relation liant les deux forces de frottement entre les roues et le sol, m, et a_0.

e. Calculer chacune des deux forces de frottement entre les roues et le sol, ainsi que F_B en fonction de a_0 et m.

f. Calculer la distance D parcourue avant l'arrêt en fonction de a_0 et v_0.

g. Calculer l'énergie mécanique totale du système {tige + deux roues} en fonction de la vitesse $v(t)$ du vélo.

h. *Question bonus: 2 points* Calculer le travail de la force F_B durant le freinage, en fonction de F_B, v_0 et a_0 ; en déduire F_B. Comparer avec le résultat obtenu en e.

☞ On suppose maintenant que le vélo a aussi un frein arrière. Le cycliste freine maintenant fortement et bloque les deux roues: les deux roues sont donc reliées rigidement à la tige, formant un unique solide indéformable. Les roues glissent sur le sol, avec un coefficient de frottement cinétique identique pour les deux roues, noté μ_c. Ce freinage produit une accélération $\vec{a}_1 = -a_1\vec{e}_x$.

i. Exprimer a_1 en fonction de μ_c et des données du problème.

j. Donner la valeur de a_1 pour laquelle la roue arrière décolle du sol sous l'effet du freinage.