

Les seuls objets autorisés sont:

- une feuille A4 manuscrite recto-verso
- stylos, etc.

Les réponses finales à chaque question ainsi que la justification de la réponse doivent être reportées sur le cahier de réponse, dans les cases prévues à cet effet.

Seul le cahier de réponse est ramassé et corrigé. Pas de feuilles volantes.

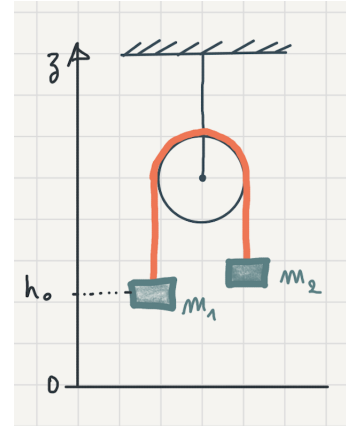
L'examen comporte 3 exercices, numérotés de 1 à 3

Le nombre de points maximum pour cet examen est de 33 points

Ne pas retourner avant le début de l'épreuve

Exercice 1 Machine(s) d'Atwood. (8 points)

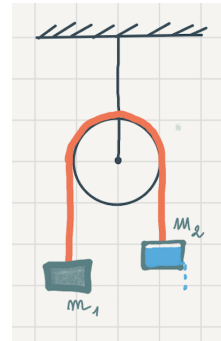
Une machine d'atwood est constituée d'une poulie sans masse accrochée au plafond par son axe. On passe une corde inextensible et sans masse et on accroche deux masses. m_1 et m_2 de part et d'autre. Les deux masses sont lâchées sans vitesse initiale, initialement m_1 est à une hauteur h_0 au dessus du sol. On commence avec $m_1 = 1,1 \cdot m$ et $m_2 = m$.



- Faire le bilan des forces sur chacune des masses et les représenter sur un schéma.
- Calculer l'accélération de chacune des masses dans le repère indiqué sur la figure.
- Exprimer le temps qu'il faut à m_1 pour toucher le sol en fonction de m , g et h_0 .
- Si on remplace la poulie sans masse par une poulie dont on ne peut pas négliger la masse, le temps sera-t-il plus court ou plus long ? Justifier avec ou sans calculs, au choix.

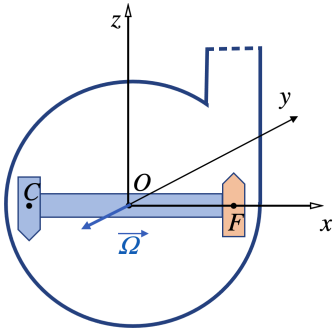
☞ On considère maintenant le système suivant, composé d'une masse $m_1 = m$, et d'un cylindre rempli d'eau. La masse m_2 du système cylindre + eau vaut initialement aussi m . Le cylindre a une légère fuite (l'eau sort à vitesse faible et latéralement). Le débit massique de l'eau qui sort est $\frac{dm}{dt} = -D$, D constante positive. On a donc $m_2(t) = m - Dt$. On lâche de nouveau le système sans vitesse initiale.

Si $f(x) = \frac{x}{a-x}$, sa primitive est $F(x) = x + a \ln(1 - \frac{x}{a})$



- Justifier que la fuite ne provoque pas de poussée verticale.
- Exprimer l'accélération de m_1 en fonction des données du problème et du temps.
- En déduire la vitesse de m_1 en fonction du temps.

Exercice 2 spinlaunch: lanceur de fusée rotatif. (13 points)



Dans une énorme enceinte, une fusée (F) de masse m est placée au bout d'une barre de masse $M = 9 \cdot m$ et de longueur L . Une contre-masse (C) de masse m équilibre le système autour du centre de rotation O .

Le système barre, fusée et contre masse est mis en rotation dans le plan vertical, autour de l'axe (Oy) avec un vecteur rotation $\vec{\Omega} = -\Omega \vec{e}_y$, ($\Omega > 0$). Une fois la vitesse angulaire maximale atteinte, la fusée est détachée du bras lorsqu'elle traverse l'axe (Ox). A.N. : $OF=OC=L/2$; $m=100\text{kg}$; $L=80\text{ m}$. Le dispositif peut arriver à $N_{\max}=10$ tours/s. On prendra $\pi \simeq 3$. On appellera R_T le rayon de la Terre et M_T la masse de la Terre.

- Exprimer le moment d'inertie I_O du système global [barre + fusée + contre-masse]. On supposera la fusée et sa contre-masse comme ponctuelles.
- Calculer la valeur numérique de I_O .
- Le système fait $N_{\max}$ tour par s. Calculer la vitesse angulaire $\Omega_{\max}$ et la vitesse $v_{\max}$ de la fusée.
- A.N. estimer numériquement $v_{\max}$.
- Exprimer l'énergie cinétique du système à pleine vitesse en fonction de I_O et $N_{\max}$.

☞ Pour mettre en mouvement le système, un moteur électrique applique un moment constant $\vec{M}_O = -M \vec{e}_y$ sur l'axe en O , avec M constante positive. La puissance moyenne du moteur lors de la phase de mise en rotation est $\langle P \rangle$.

- Quel est le temps nécessaire $T_{\max}$ pour que le système atteigne la vitesse angulaire $\Omega_{\max}$ à partir de l'état au repos en fonction de I_O , M et $N_{\max}$?
- Exprimer la puissance moyenne du moteur en fonction de M et $N_{\max}$.

☞ Le système tourne avec une vitesse uniforme $\Omega_{\max}$. A l'instant $t_0 = 0$ on libère de manière instantanée la fusée alors qu'elle croise l'axe (Ox). La fusée quitte l'enceinte.

- Déterminer l'altitude maximale $h_{\max}$ qui pourrait être atteinte par la fusée en fonction de $v_{\max}$, R_T , M_T et G .

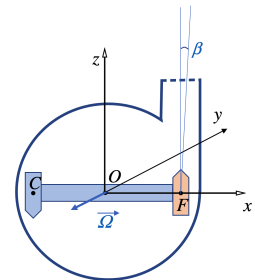
☞ En fait, la fusée n'arrive pas aussi haut à cause des frottements de l'air. La fusée atteint quand même $h_1 < h_{\max}$, ou elle a la vitesse résiduelle v_1 .

- Calculer le travail des forces de frottements de l'air lors du vol de la fusée.

☞ Lorsque la fusée est à l'altitude h_1 avec la vitesse v_1 , on allume les moteurs pour l'amener sur une orbite circulaire à l'altitude h_2 .

- calculer l'énergie que doivent fournir les moteurs, en fonction de v_1 , h_1 , h_2 , R_T , M_T , m et G .

☞ En fait le lancement se très passe mal. la fusée ne part pas verticalement, mais elle fait un angle β avec la verticale (en restant dans le plan (O, x, z). En plus la vitesse de lancement v_0 est beaucoup plus faible que prévu, et les moteurs ne s'allument pas.



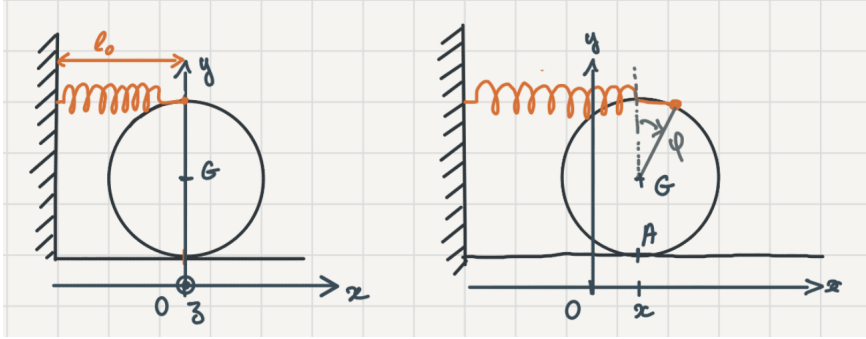
- Calculer la distance horizontale D à laquelle la fusée retombe au sol, mesurée depuis O .
- Le lanceur est à 30° de latitude Nord. L'axe (Ox) indique le nord. représenter $\vec{\Omega}_T$ vecteur rotation de la Terre dans le repère (O, x, y) et indiquer la direction et le sens de la déviation due à l'effet de Coriolis au début de la trajectoire.

Exercice 3 : Ressort attaché à un cylindre (12 points)

Un cylindre uniforme, de masse m et de rayon R est attaché en son point le plus haut à un ressort de constante k et de longueur au repos l_0 . L'autre extrémité du ressort est attachée à un mur fixe, comme décrit sur la figure. Le cylindre roule sur le sol sans glisser, en décrivant des oscillations de faible amplitude ($\sin \varphi \simeq \varphi$ et $\cos \varphi \simeq 1$). Pour simplifier, on considérera également que le ressort reste en position horizontale.

On notera x la variation de position du centre de masse du cylindre par rapport à sa position d'équilibre, et φ la variation angulaire du point d'attache du ressort.

Le coefficient de frottements statique entre le cylindre et la table est μ_s .
On exprimera les résultats en fonction des données: k , m , R , μ_s et g .



- Identifiez et représentez sur un dessin les forces qui agissent sur le cylindre.
- Montrer que $x = R\varphi$.
 ☞ On utilisera la variable φ et ses dérivées dans la suite du problème.
- A partir du théorème du moment cinétique par rapport à A , écrivez, sans la résoudre, l'équation différentielle du mouvement pour φ .
- Que vaut la pulsation Ω_0 des oscillations de faible amplitude ?
- Calculer l'expression vectorielle de la force de frottements en A sur le cylindre en fonction de R , k et φ .
- Calculer l'amplitude maximale des oscillations pour conserver la condition du roulement sans glisser en fonction de μ_s , m , g , k , et R .
- Ecrivez l'énergie mécanique du système formé par le cylindre et le ressort en fonction de φ et $\dot{\varphi}$.
- Retrouvez l'équation différentielle du mouvement pour φ en utilisant l'équation précédente.
- On considère maintenant que le cylindre est plongé dans un fluide, et que ce dernier exerce une force de frottement visqueux, qui s'applique en G et dont on suppose qu'elle est donnée par $\vec{F}_{\text{visc}} = -b\vec{v}_G$ où $\vec{v}_G$ est la vitesse du centre de masse du cylindre. Réécrivez l'équation différentielle du mouvement en tenant compte de cette nouvelle force.
- Quelle doit-être la valeur de b pour que le cylindre retrouve sa position initiale aussi vite que possible?
- En plus du frottement visqueux, on suppose que la paroi à laquelle est attaché le ressort vibre, pour imprimer à la barre une force de la forme $\vec{F}_e = F_e \cos(\omega_e t) \vec{e}_x$, appliquée au point d'attache du ressort.
 Ecrire l'équation du mouvement avec le terme d'oscillation forcée.
- Rappeler la solution en régime permanent de l'équation précédente, ainsi que l'expression de l'amplitude $A(\omega_e)$ des oscillations en fonction des données.