Surname, First name sciper : 990009

301. FAKE-9

2	1	1	2	3	5	9
1	[✓ 1]	[✓ 1]	1	1	1	1
[✓ 2]	2	2	[✓ 2]	2	2	2
3	3	3	3	[✓ 3]	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	[✓ 5]	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	[✓ 9]
0	0	0	0	0	0	0

Mécanique générale pour SV PH101(h)
Examen Final 15/01/2021 08:15 – 11:15

Dans tous les exercices, sauf indication contraire, les résultats sont à exprimer en fonction des données fournies et des constantes physiques connues.

Chaque réponse doit être justifiée dans le cadre prévu à cet effet (une page blanche supplémentaire est disponible à la fin de chaque exercice si nécessaire).

Le sujet de l'examen comprend 3 exercices.

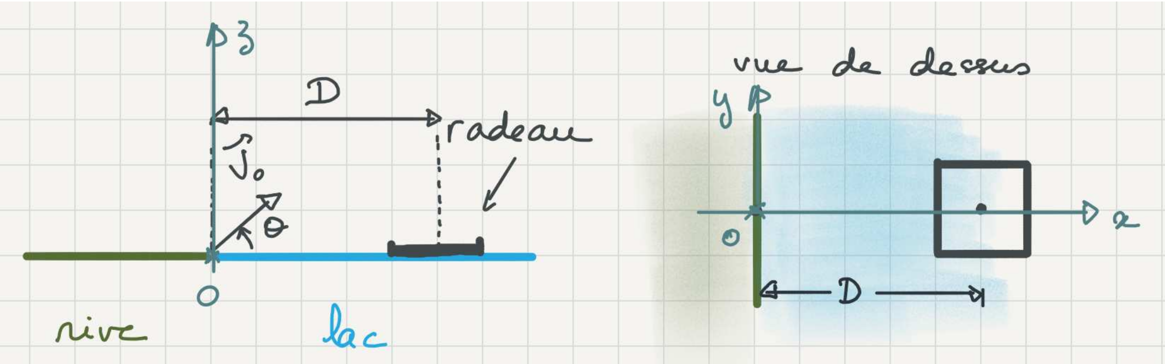
Seul document autorisé : une page A4 recto/verso. Pas de calculatrice; pas de téléphone.

Le cahier ne doit pas être dégraffé, les pages ne doivent pas être séparées. Seul le cahier est ramassé et corrigé.

$$\text{Note} = 1 + \frac{\text{points} * 5}{32}$$

Le radeau, le lac et l'enfant (8.5 points)

Un radeau de masse M flotte sur un lac. Son centre se trouve à la distance D de la rive. Un enfant de masse m décide de sauter sur le radeau. Il prend alors son élan et une fois au bord de la rive, donne une impulsion telle que sa vitesse $\vec{v}_0$ forme un angle θ avec l'horizontale, il arrive exactement au milieu du radeau, et se réceptionne parfaitement. Donc après l'atterrissage, l'enfant est immobile par rapport au radeau, et en son centre. On considèrera l'enfant et le radeau comme des masses ponctuelles.



1a En explicitant le calcul, trouver la norme de $\vec{v}_0$ telle que l'enfant arrive au milieu du radeau en fonction de g, D et θ.

1,5

$v_0 = \sqrt{\frac{gD}{2\cos\theta\sin\theta}} = \sqrt{\frac{gD}{\sin 2\theta}}$ (les 2 expressions OK)

balistique $\quad \vec{a}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{vmatrix} \quad \vec{v}\begin{vmatrix} V_0\cos\theta \\ 0 \\ -gt+V_0\sin\theta \end{vmatrix} \quad \vec{r}\begin{vmatrix} (V_0\cos\theta)t \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2+(V_0\sin\theta)t \end{vmatrix}$

à t_f en $x=D$ et $z=0$

$$-\frac{1}{2}gt_f^{\cancel{2}}+(V_0\sin\theta)\cancel{t_f}=0 \qquad t_f=\frac{2V_0\sin\theta}{g}$$

$$D=(V_0\cos\theta)t_f=(V_0\cos\theta)\cdot\frac{2V_0\sin\theta}{g}=V_0^2\,\frac{2\cos\theta\sin\theta}{g}$$

$$V_0^2=\frac{gD}{2\cos\theta\sin\theta}=\frac{gD}{\sin 2\theta}$$

0.1 reconnaître balistique 0.2 $\vec{a}$ 0.2 $\vec{v}$
0.2 $\vec{r}$ 0.2 à t_f $x=D$ et $z=0$
0.2 insérer dans $\vec{r}$ 0.2 éliminer t_f
0.2 expression OK

1,5

1b On appelle $\vec{v}_1(t)$ le vecteur vitesse du système radeau et enfant après l'arrivée de l'enfant. Calculer les composantes de $\vec{v}_1$ à $t = 0$ donc juste après l'arrivée de l'enfant en fonction de v_0, θ, m et M.

$v_{1,x}(0) = \frac{m}{m+M} v_0 \cos\theta$

$v_{1,y}(0) = 0$

$v_{1,z}(0) = -\frac{m}{m+M} v_0 \sin\theta$

Choc inélastique radeau - enfant

enfant arrive avec $\vec{v}_0' \left| \begin{array}{l} v_0 \cos\theta \\ 0 \\ -v_0 \sin\theta \end{array} \right.$

Conserva° $\vec{p}$ $\quad m\vec{v}_0' + \vec{0} = (m+M)\vec{v}_1$

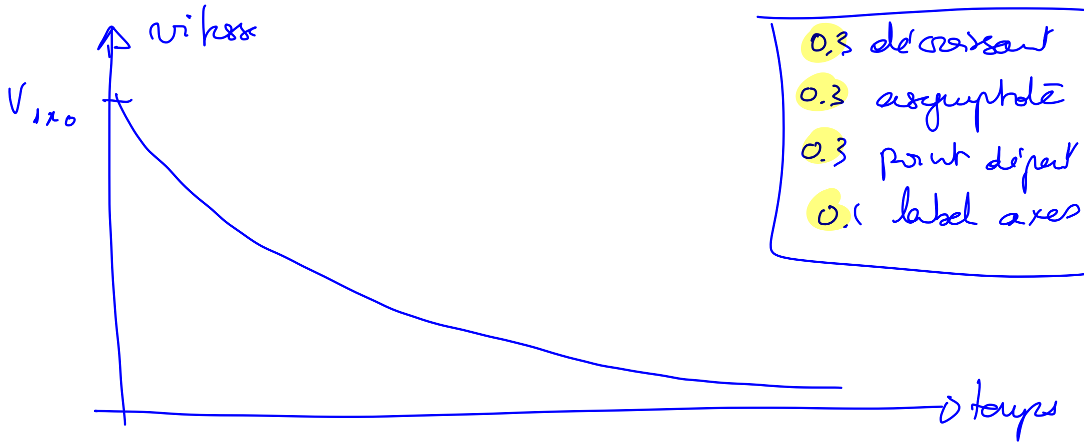
$\vec{v}_1 = \frac{m}{m+M} \vec{v}_0'$

0,3 inélastique 0,3 $\vec{v}_0'$ 0,3 cons° $\vec{p}$
0,3 expression de cons° $\vec{p}$
0.1 v_{1x0} 0,1 v_{1y0} 0,1 v_{1z0}

Le radeau subit une force de frottement fluide, en régime laminaire, de coefficient de frottement b_l. Dans la suite du problème, on ne s'intéresse pas au mouvement vertical (selon Oz).

1

1c Tracer, en fonction du temps, l'allure de la courbe de la vitesse selon x, $v_{1,x}(t)$.



0,3 décroissant
0.3 asymptote
0.3 point départ
0.1 label axes

1d Déterminer l'équation différentielle sur $v_{1,x}$ régissant le mouvement du radeau selon (Ox).

Equation différentielle :

Sur le radeau selon x $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ projeté sur (Ox)

$F_x = -b_l v_{1x} = (m+M) a_x = (m+M) \dot{v}_{1x}$

$\dot{v}_{1x} + \frac{b_l}{m+M} v_{1x} = 0$

0.2 Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$
0.2 projec° sur Ox
0.2 expression force frottement $F_f = -b_l v_{1x}$
0.2 projection Newton
0.2 résultat final

si masse fausse ce critère à 0 ←

1e Donner la solution $v_{1,x}(t)$ de cette équation en fonction de b_l, v_0, m, M et θ .
On rappelle qu'une équation différentielle de la forme $f'(x) + kf(x) = 0$ a comme solution $f_0 e^{-kx}$.

$v_{1,x}(t) = v_0 \cos\theta \frac{m}{m+M} e^{-\frac{b_l}{m+M}t}$

ici $k = \frac{b_l}{m+M}$ 0,2 $v_{1x} = C e^{-\frac{b_l}{m+M}t}$ 0,2

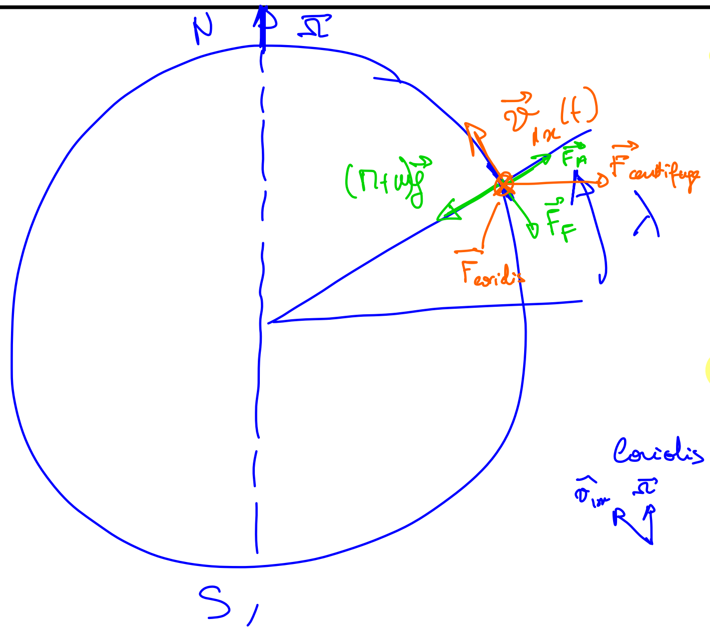
trouver C avec conditions initiales 0,2

$v_{1x}(0) = C = \frac{m}{m+M} v_0 \cos\theta \Rightarrow C = \frac{m}{m+M} v_0 \cos\theta$ 0.2

$v_{1x}(t) = v_0 \cos\theta \frac{m}{m+M} e^{-\frac{b_l}{m+M}t}$ 0.2

On prend maintenant en compte l'effet de la rotation de la Terre. Le radeau se trouve à la lattitude λ dans l'hémisphère Nord et l'axe $(0x)$ est orienté du Sud vers le Nord.

1f Faire un schéma de la situation et représenter toutes les forces réelles ainsi que les forces fictives de Coriolis et d'entrainement liées à la rotation de la Terre.



0.2 Terre & radeau
0.1 $\vec\Omega$
0.2 poids
0.2 frottements
0.2 Archimède /radeau
0.3 Centrifuge
0.3 Coriolis

Coriolis $-(M+m)\vec\Omega \wedge \vec v_{1x}$

$\times\ \vec F_{cor}$

1g Calculer la force de Coriolis, en fonction du temps et des données du problème, exprimée dans le système de coordonnées indiqué au début (O,x,y,z).

$\vec F_c = -2(m+M)\Omega\sin\lambda\, v_0 \frac{\cos\theta}{m+M} e^{-\frac{k}{m+M}t}$

$\vec F_c = -2(m+M)\vec\Omega \wedge \vec v$ 0.4

mise en place 0.2

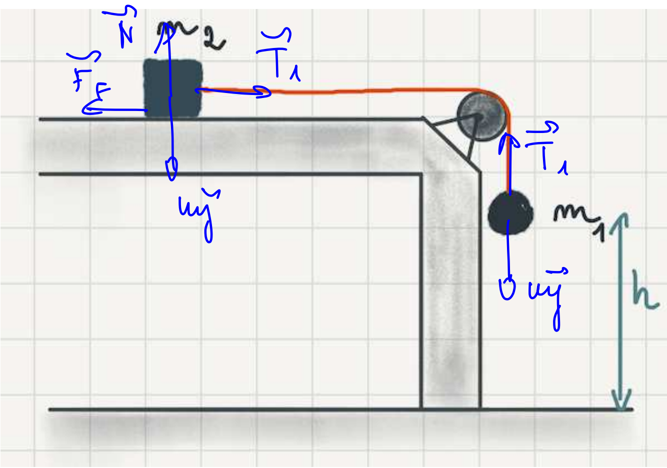
$= -2(m+M)\Omega v \sin\lambda\, \vec e_y$ 0.2

$= -2(m+M)\Omega\sin\lambda\, v_0 \frac{\cos\theta}{m+M} e^{-\frac{k}{m+M}t}\ \vec e_y$ 0.2

1h Place de secours pour l’exercie 1

Expériences avec des poulies et des objets (14 points)

On dispose d'une table à laquelle est accrochée une poulie sans masse sur laquelle passe une corde sans masse, reliée à une masse m_1 qui pend librement au dessus du sol. (voir dessin).
On pose sur la table une deuxième masse m_2 et on souhaite déterminer le coefficient de frottement dynamique entre m_2 et la table.



Dans tout le problème $m_1 = m_2 = m$.

2a Faire le bilan des forces sur m_1 et sur m_2 et les représenter sur le dessin.

Sur m_1 : poids et tension
Sur m_2 poids réaction tension frottants

force listée : 0,1 /force
force ok s/dessin : 0,1 /force
⇒ total max 1,2 pt

2b Quelle est la valeur maximale que peut avoir le coefficient de frottement statique μ_s pour que si on lâche le dispositif sans vitesse initiale, il commence à bouger?

$\mu_{s,max}$ = 1 (1,3 pt)

Immobile $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ 0,1

Sur m_1 $\vec{T}_1 + m\vec{g} = \vec{0}$ 0,2 projection $T_1 = mg$ 0,2

Sur m_2 $\vec{N} + m_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{F}_F = \vec{0}$ 0,2 projection $T_2 - F_F = 0$ 0,2

Cas limite $F_F = \mu_s mg$ 0,1 $T_2 = T_1$ 0,1

On combine 0,2 $T_2 = F_F = \mu_s mg = T_1 = mg \Rightarrow \mu_s = 1$ 0,1

2c On suppose que les coefficients de frottement statique et dynamique μ_s et μ_c sont inférieurs à la valeure limite. Le système se met en mouvement quand on le lâche.

1.5

Calculer l'accélération de la masse m_1 en fonction de μ_c et g

$a_1 = \frac{1}{2} g (1 - \mu_c)$

Sur m_1 $\Sigma \vec{F} = m \vec{a}_1$ $m\vec{a}_1 = \vec{T}_1 + m\vec{g}$ 0.1

Sur m_2 $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_2$ $m\vec{a}_2 = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_F + \vec{T}_2$ 0.1

Repères m_1 ↓ z m_2 → x : Indiquer les repères utilisés soit là soit sur schéma | ⚠ autres repères ok si cohérent ! 0.2

projec° m_1 dans le repère $ma_1 = mg - T_1$ 0.2

projec° m_2 dans le repère $ma_2 = T_2 - F_F$ 0.2

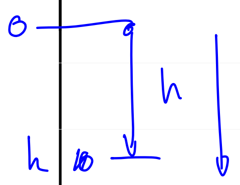
$F_F = \mu_c mg$ 0.1 $a_1 = a_2$ 0.1 $T_1 = T_2$ 0.1

Combinaison $ma_1 = T_1 - \mu_c mg$ $T_1 = ma_1 + \mu_c mg$ 0.2

$\cancel{m} a_1 = \cancel{m}g - \cancel{m}a_1 - \mu_c \cancel{m}g$ $a_1 = \frac{1}{2} g (1 - \mu_c)$ 0.2

2d On mesure un temps de chute t_c pour la hauteur h. En déduire μ_c en fonction de h et t_c

$\mu_c = 1 - \frac{4h}{g t_c^2}$



accelaration de z_c a_1 0.1 $\Rightarrow v_1 = a_1 t$ 0,1 $z_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2$ 0,1

à t_1 $z_1 = h$ 0,2 $\Rightarrow h = \frac{1}{2} a_1 t_c^2$ 0,2

$h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} g (1 - \mu_c) t_c^2$ 0,2

$\frac{4h}{g t_1^2} = 1 - \mu_c$ $\mu_c = 1 - \frac{4h}{g t_c^2}$ 0,1

On change un peu le dispositif et on remplace la poulie sans masse par une poulie cylindrique homogène, de masse m et de rayon r. La corde entraine la poulie sans glisser.

1,5

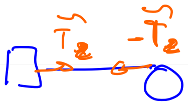
2e Le dispositif est immobile, corde tendue, et on lâche m_1 de nouveau qui parcourt une hauteur h. Calculer sa vitesse lorsqu'elle arrive au sol en fonction de h, r et μ_c et g.

$v_1 = \sqrt{\frac{4}{5} g h (1-\mu_c)}$

Bonne approche : énergie (sinon grave pédaste) 0,2

Système : 2 masses + poulie   A : lâché sans vit initiale
B : arrivée au sol 0,1

Tensions :



) même déplacement, Tensions opposées $W = 0$ 0,2

) ne travaille pas (même déplacements, tensions opposées)

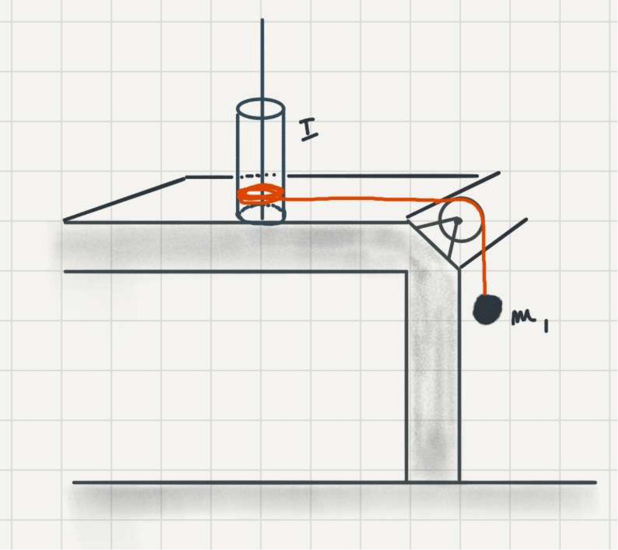
$$W_{AB}^{tot} = \underbrace{E_{cB} + E_{rotB} - E_{cA} - E_{rotA}}_{0,2} = \underbrace{2\times\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_1^2 - 0 - 0}_{0,2}$$

$$= \cancel{W_{AB}^{tensions}} + W_{AB}^{\vec{P_1}} + \underset{0}{\cancel{W_{AB}^{\vec{P_2}}}} + \underset{0}{\cancel{W_{AB}^{\vec{N}}}} + W_{AB}^{\vec{F_F}} = mgh - hF_F \quad 0,2$$

$$\Rightarrow \cancel{m}v_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cancel{m}\cancel{r^2} + \frac{v_1^2}{\cancel{r^2}} = \cancel{m}gh - \mu_c\cancel{m}gh \quad 0,2$$

$$v_1^2\left(1+\frac{1}{4}\right) = gh(1-\mu_c) \Rightarrow v_1^2 = \frac{4}{5}gh(1-\mu_c) \quad 0,2$$

On remet la poulie sans masse et on remplace maintenant la masse m_2 par un cylindre qui peut tourner sans frottements autour d'un axe vertical fixé à la table. Le cylindre a un rayon r et une masse inconnue. On appelle I_G son moment d'inertie par rapport à G, qu'on cherche à déterminer. Pour cela on lâche m_1 sans vitesse initiale et on mesure le temps de chute t_2 pour la hauteur h.

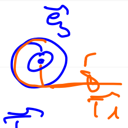


2f Déterminer l'accélération de m_1 en fonction de m, r, I_G et g

$a'_1 = g \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{I_G}{mr^2}}$

Sur m_1 : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ 0,1 $\Rightarrow m_1 a_1 = mg - T_1$ projection : 0,2

Sur cylindre dessus



$\sum \vec{\mathcal{M}}_G = \dfrac{d\vec{L}_G}{dt}$ 0,1

seule force avec moment : $\vec{T_1}$ $\Rightarrow$ $\vec{\mathcal{M}}_G = rT_1\vec{e_3}$ 0,2

$\vec{L}_G = I_G \vec{\omega} = I_G\,\omega\,\vec{e_3} = I_G \dfrac{v_1}{r}\vec{e_3}$

0,2 0,1

$\Big\{\; rT_1\vec{e_3} = I_G \dfrac{a_1}{r}\vec{e_3}$ 0,1

Lien $T_1 = T_2$ 0,1

Combinaison $T_1 = mg - ma_1$

$T_1 = \dfrac{I_G}{r^2} a_1 = mg - ma_1$ 0,2

$a'_1\left(m + \dfrac{I_G}{r^2}\right) = mg \Rightarrow a'_1 = \dfrac{mg}{m + \frac{I_G}{r^2}} = g \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{I_G}{mr^2}}$ 0,2

2g En déduire I_G en fonction de m, r, t_2, h et g

$I_G = mr^2 \left[\dfrac{gt_2^2}{2h} - 1\right]$

a'_1 accélération de m_1 a $v'_1 = a'_1 t$ $r'_1 = \frac{1}{2} a'_1 t^2$

0,1 0,1

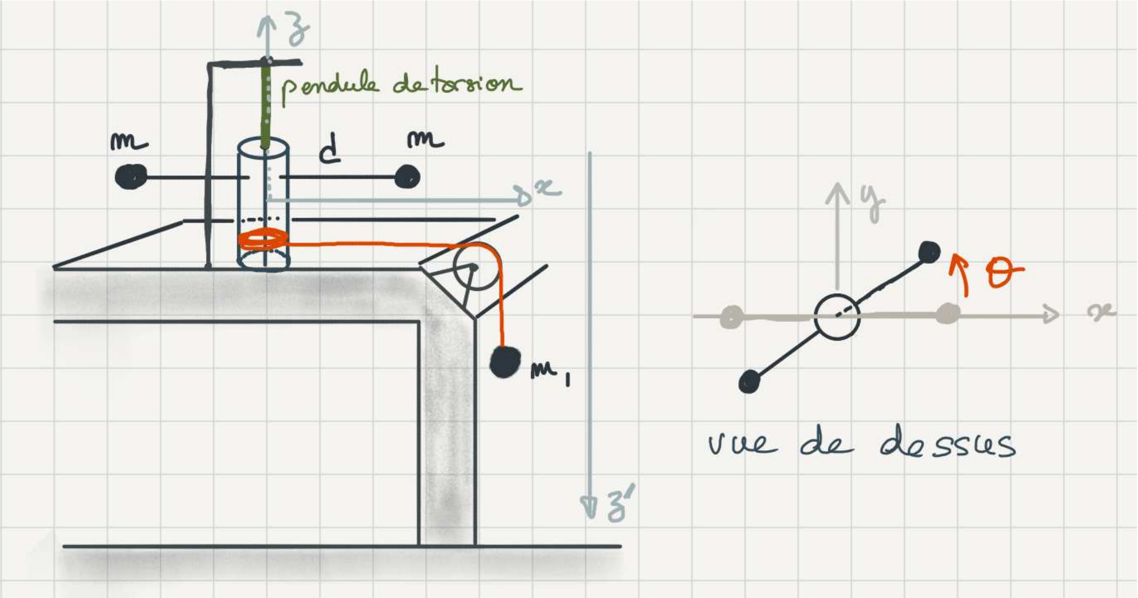
La masse met t_2 pour parcourir h $\Rightarrow h = \frac{1}{2} a'_1 t_2$ 0,2

$a'_1 = \dfrac{2h}{t_2^2} = g \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{I_G}{mr^2}}$ (combiner avec résultat précédent) 0,2

$\dfrac{2h}{gt_2^2} = \dfrac{1}{1 + \frac{I_G}{mr^2}} \Rightarrow 1 + \dfrac{I_G}{mr^2} = \dfrac{gt_2^2}{2h}$ $I_G = mr^2\left[\dfrac{gt_2^2}{2h} - 1\right]$ 0,2

0,2

Dans la suite, on suppose I_G connu. On fixe sur le cylindre deux masses m accrochées symétriquement de part et d'autre par deux tiges sans masse de longueur d. On repère la position de la tige par l'angle θ. L'axe du cylindre est relié à un fil vertical jouant le rôle de pendule de torsion lui même fixé à son autre extrémité. Ce fil exerce sur le cylindre un moment de la forme $\vec{M}_G = -k\theta\,\vec{e}_z$



2h Calculer I'_G le moment d'inertie de l'ensemble cylindre et masses par rapport à son centre de masse, en fonction de I_G, d et m

$I'_G = I_G + 2md^2$

$I_G' = I_G + I_{2masses}$ 0,3 $I_{2masses} = 2md^2$ 0,1

$I_G' = I_G + 2md^2$ 0,1

2i Sans la masse m_1, l'angle θ vaut 0. On accroche m_1, on la lâche doucement et on la laisse atteindre une position d'équilibre. Calculer θ_e à l'équilibre en fonction de m, k, r et g.

θ_e = $\frac{rmg}{k}$

Immobile ⇒ $\sum \vec{F} = \vec{0}$ sur m_1 et $\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0}$ sur cylindre
0,1 0,1

⇒ $mg = T_1$ 0, 2 $-k\theta_{eq} + rT_2 = 0$ 0,2

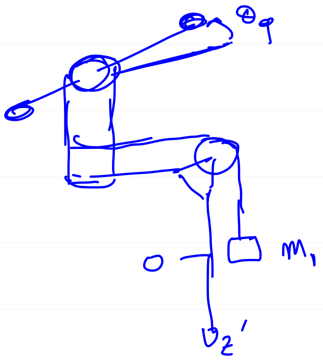
$T_1 = T_2$ 0,1 $T_2 = mg$ $k\theta_{eq} = rT_2 = rmg$ $\theta_{eq} = \frac{rmg}{k}$ 0,1 vers [illegible]

combinaison 0,2

On place l'origine de l'axe z' qui repère la position de m_1 à la position d'équilibre atteinte précédemment. On prend m_1 et on la tire vers le bas d'une distance z'_0 puis on la lâche sans vitesse initiale.

2j Etablir l'équation différentielle du mouvement de m_1 en fonction de I', k, m et r

Equation différentielle: $\ddot{z}' + \frac{k}{I'_G + mr^2} z' = 0$



Quand $z' = 0$ $\theta = \theta_{eq}$ ⇒ $\theta = \theta_{eq} + \frac{z'}{r}$
0,2

Sur cylindre $\sum \vec{\mathcal{M}}_G = \frac{d\vec{L}_G}{dt}$ 0,1

$-k\theta\vec{e}_3 + rT_2\vec{e}_3$ 0,1 $\frac{d}{dt}(I'_G \vec{\omega})$
0,1

$\vec{\omega} = \frac{v}{r}\vec{e}_3 = \frac{\dot{z}'}{r}\vec{e}_3$ 0,1

Combinaison : $-k\theta\vec{e}_3 + rT_2\vec{e}_3 = I'_G \frac{\ddot{z}'}{r}\vec{e}_3$ 0,2

Sur m_1 $\sum \vec{F} = m\vec{a}_1$ 0,1 ⇒ $ma_1 = mg - T_1$ 0,1 $T_1 = T_2$ 0,1

Combinons $-k(\theta_{eq} + \frac{z'}{r}) + r(mg - m\ddot{z}') = I'_G \frac{\ddot{z}'}{r}$ 0,2

$-kr\theta_{eq} - kz' + r^2mg - mr^2\ddot{z}' - I'_G\ddot{z}' = 0$

$(I'_G + mr^2)\ddot{z}' + kz' = r(~~rmg - k\theta_{eq}~~) = 0$ 0,2

2k On suppose que la corde reste tendue, quelle est la nature du mouvement ? Sa période ?

nature du mouvement : Oscillateur harmonique / sinusoïdal

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I'_G + mr^2}{k}}$

Mouvement oscillateur harmonique 0,5

$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I'_G + mr^2}}$ $T = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I'_G + mr^2}{k}}$

0,3 0,1 0,1

2l Quelle est la condition sur z'_0 pour que la corde reste toujours tendue ?

condition : $z'_0 < g \cdot \frac{I'_G + mr^2}{k}$

$m a_1 = mg - T_1 \Rightarrow T_1 = m(g - a_1) > 0 \Rightarrow a_1 < g$ 0,5

valeur max de a_1 : $z'_0 \Omega_0^2 < g$ $z'_0 < \frac{g}{\Omega_0^2}$

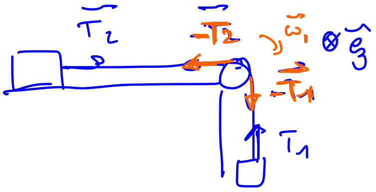
0,3 0,1

$z'_0 < g \cdot \frac{I'_G + mr^2}{k}$ 0,1

2m Place de secours exercice 2

Question 2e approche Newton (pas recommandé)

Sur m_1 $\sum\vec{F} = m\vec{a_1}$ $m_1 a_1 = mg - T_1$



Sur poulie $\sum\vec{\mathcal{M}}_G = \frac{d\vec{L_G}}{dt}$

$+T_1 r\vec{e_3} - T_2 r\vec{e_3} = I\frac{\dot{v}_1}{r}\vec{e_3}$

⚠ $T_1 \neq T_2$ $T_1 - T_2 = \frac{1}{2}m\cancel{r^2}\frac{\dot{v}_1}{\cancel{r^2}} = \frac{1}{2}m\dot{v}_1 = \frac{1}{2}ma_1$

Sur m_2 $\sum\vec{F} = m\vec{a_2}$ $ma_2 = T_2 - \mu_c mg$

$a_1 = a_2$

$ma_1 = T_2 - \mu_c mg$ $T_2 = ma_1 + \mu_c mg$

$T_1 - T_2 = \frac{1}{2}ma_1$ $T_1 = mg - ma_1$

$mg - T_1 = ma_1$

$T_1 - T_2 = \frac{1}{2}ma_1 = mg - ma_1 - ma_1 - \mu_c mg$

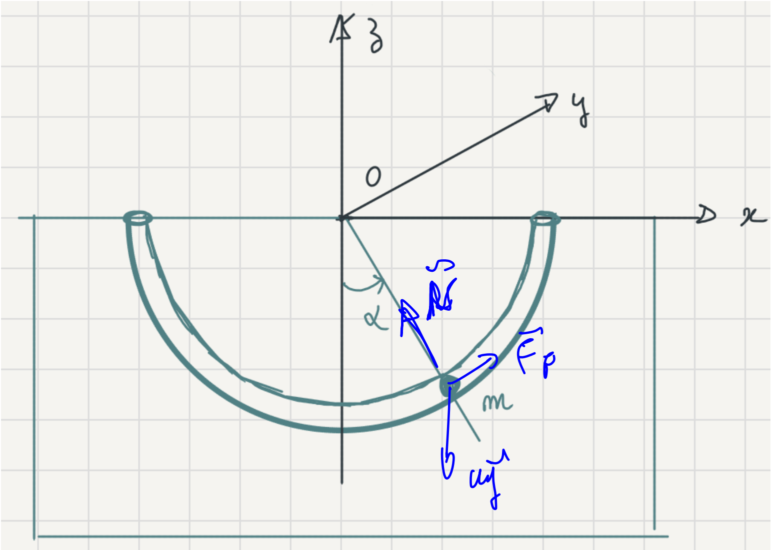
$\Rightarrow (\frac{1}{2}+2)\cancel{m}a_1 = \cancel{m}g(1-\mu_c)$ $a_1 = \frac{2}{5}g(1-\mu_c)$

$v_1 = a_1 t$ $z_1 = \frac{1}{2}a_1 t^2$ $\Rightarrow h = \frac{1}{2}a_1 t_c^2$ $t_c = \sqrt{\frac{2h}{a_1}}$

$v_1 = a_1\sqrt{\frac{2h}{a_1}} = \sqrt{2ha_1} = \underline{\sqrt{\frac{4}{5}gh(1-\mu_c}}$

Billes dans une glissière (9.5 points)

Pour faire quelques expériences d'auditoire, on dispose d'une glissière en forme de demi-cercle de rayon R et de centre O, et de deux billes sphériques, homogènes, une de masse m et une de masse $2m$. La glissière est fixée dans un plan vertical et un mécanisme permet de la mettre en rotation autour de l'axe (Oz).



On repère la position des billes par l'angle α mesuré depuis la verticale.

On commence par des expériences avec la bille de masse m qui est une sphère de rayon r et de moment d'inertie par rapport à G $I_G = 2/5mr^2$. On considère qu'elle roule sans glisser dans la glissière.

3a Faire le bilan des forces appliquées à la bille et les représenter sur le dessin.

poids , réaction, frottements

0,1 + 0,2 0,1 + 0,2 0,2 + 0,2

5

(identifier/ représenter)

3b On lâche la bille sans vitesse initiale depuis un angle α_1. Calculer la vitesse de la bille lorsqu'elle arrive en $\alpha = 0$.

$v_1 = \sqrt{\frac{10}{7} g R (1 - \cos\alpha)}$

Conserva° Emec 0,1 [frottements ne travaillent pas]

A : lacher 0,2 B : en bas 0,2

$mgh + 0 + 0 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_1^2 + 0$

$I = \frac{2}{5} m r^2$ et $\omega_1 = \frac{v_1}{r}$ 0,1 $\Big\} \frac{1}{2} I \omega_1^2 = \frac{1}{2} m \cancel{r^2} \cdot \frac{2}{5} \frac{v_1^2}{\cancel{r^2}}$

$mgh = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{5} m v_1^2 = \frac{7}{10} m v_1^2$ 0,1

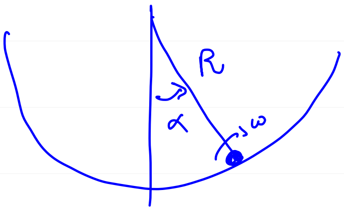
$h = R(1 - \cos\alpha)$ 0,1

$v_1^2 = \frac{10}{7} g h$

Résultat : 0,2

3c Calculer l'énergie mécanique de la bille en fonction de l'angle alpha et des données de l'ennoné.

$E_M = mgR(1-\cos\alpha) + \frac{7}{10} m R \dot{\alpha}^2$



Bille rayon r glissière R

$v = r\omega$ rotation 0,1 $v = R\dot{\alpha}$ glissière 0,1

$E_m = E_p + E_c + E_{rot}$ 0,1 $E_p = mgh = mgR(1-\cos\alpha)$ 0,1

$E_c = \frac{1}{2} m v^2$ 0,1 $= \frac{1}{2} m R^2 \dot{\alpha}^2$ 0,1

$E_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2$ 0,1 $= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{5} m \cancel{r^2} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r^2}} = \frac{1}{5} m R^2 \dot{\alpha}^2$ 0,1

$E_m = mgR(1-\cos\alpha) + \frac{7}{10} m R^2 \dot{\alpha}^2$ 0,2

3d En dérivant l'équation précédente, déterminer l'équation différentielle du mouvement de la bille.

Equation différentielle : $\ddot{\alpha} + \frac{5}{7}\frac{g}{R}\sin\alpha = 0$

$E_M = cte$ 0,4 $\Rightarrow$ $0 = \cancel{m} g \cancel{R}[-(-\dot{\alpha}\sin\alpha)] + \frac{7}{10}\cancel{m} R^{2}\, 2\dot{\alpha}\ddot{\alpha}$

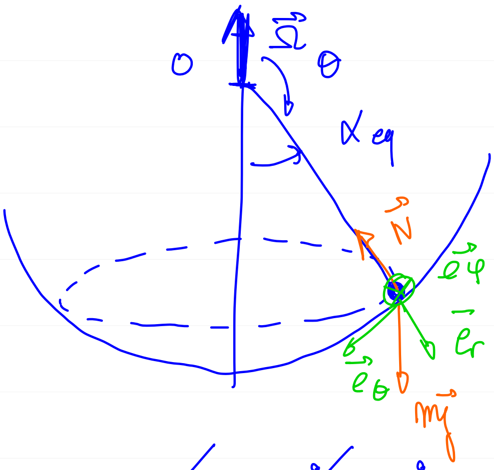
$g\cancel{\dot{\alpha}}\sin\alpha + \frac{7}{5} R \cancel{\dot{\alpha}}\ddot{\alpha} = 0$ 0,2+0,2

$\ddot{\alpha} + \frac{5}{7}\frac{g}{R}\sin\alpha = 0$ 0,2

Dans la suite du problème, on considérera **toutes les billes comme des points matériels** qui glissent sans frottements dans la glissière.

3e On place la bille de masse m dans la glissière. On met la glissière en rotation autour de l'axe (Oz) avec le vecteur rotation $\Omega\vec{e}_z$. On attend que la bille s'équilibre à l'angle α_{eq}. Calculer l'angle α_{eq}.

$\alpha_{eq} = \arccos\left(\frac{g}{R\Omega^2}\right)$



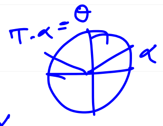
Sphériques $r = R = cte$

$\theta = cte$

$\dot\varphi = \Omega = cte$

On utilise $\sum\vec F = m\vec a$ sur $\vec e_\theta$ car $\vec N\cdot\vec e_\theta = \vec 0$

$a_\theta = r\cancel{\ddot\theta} + 2\dot r\cancel{\dot\theta} - r\dot\varphi^2\cos\theta\sin\theta = -R\Omega^2\cos\theta\sin\theta$



$m\vec g\cdot\vec e_\theta = mg\sin\alpha$ $\quad \sin\theta = \sin\alpha \quad \cos\theta = -\cos\alpha$

$m a_\theta = +\cancel{m}R\Omega^2\cos\alpha\cancel{\sin\alpha} = \cancel{m}g\cancel{\sin\alpha}$ $\quad \cos\alpha = \frac{g}{R\Omega^2}$

<u>Autre approche</u>

Mouvement circulaire uniforme rayon $R\sin\alpha = \rho$

$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \rho\Omega^2 = R\sin\alpha\,\Omega^2$

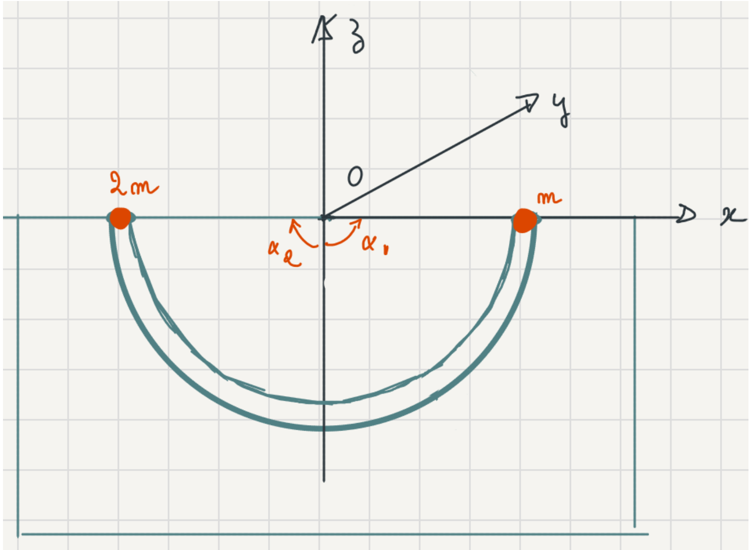
sur Oz $\quad a_z = 0 \quad \sum\vec F\cdot\vec e_z = N\cos\alpha - mg = 0 \quad N = \frac{mg}{\cos\alpha}$

Sur $\vec n$: $\vec N\cdot\vec n + m\vec g\cdot\vec n = mR\sin\alpha\,\Omega^2$

$N\sin\alpha + \overbrace{0} = \cancel{m}R\cancel{\sin\alpha}\,\Omega^2 = \frac{\cancel{mg}}{\cos\alpha}\cancel{\sin\alpha}$

$\cos\alpha = \frac{g}{R\Omega^2}$

On arrête la rotation, et on prend maintenant la deuxième bille de masse $2m$. On lâche les deux billes dans la glissière exactement en même temps; la bille de masse m à $\alpha_1 = \pi/2$ et la bille de masse $2m$ à $\alpha_2 = -\pi/2$. Lorsqu'elles se rencontrent, les billes ont un choc parfaitement élastique.



3f Exprimer le vecteur vitesse de chacune des billes dans le repère (O, x, y, z), juste avant le choc. $\vec{v}_1$ pour m_1 et $\vec{v}_2$ pour m_2.

$\vec{v}_1 =$ $-\sqrt{2gR}\;\vec{e_x}$ (m)

$\vec{v}_2 =$ $\sqrt{2gR}\;\vec{e_x}$ (2m)

Conservation Emec $mgh = \frac{1}{2} m v^2$ 0,3

$h = R \Rightarrow v^2 = 2gR$ 0,3

m_1 ← $\Rightarrow \vec{v}_1 = -\sqrt{2gR}\;\vec{e_x}$ 0,2

m_2 → $\Rightarrow \vec{v}_2 = \sqrt{2gR}\;\vec{e_x}$ 0,2

3g Exprimer le vecteur vitesse de chacune des billes juste après le choc

$\vec{v}_1' = \frac{5}{3}\sqrt{2gR}\,\vec{e_x}$

$\vec{v}_2' = -\frac{1}{3}\sqrt{2gR}\,\vec{e_x}$

Choc élastique et frontal ⇒ utilisation des formules

$m_1 = m \quad m_2 = 2m$

$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{(m-2m)(-\sqrt{2gR}\,\vec{e_x}) + 4m\sqrt{2gR}\,\vec{e_x}}{3m}$$

$$= \frac{5}{3}\sqrt{2gR}\,\vec{e_x} \qquad |\vec{v}_1'| > |\vec{v}_1|$$

$$\vec{v}_2' = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1+m_2} = \frac{m\sqrt{2gR}\,\vec{e_x} + 2m(-\sqrt{2gR}\,\vec{e_x})}{3m}$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{2gR}\,\vec{e_x} \qquad |\vec{v}_2'| < |\vec{v}_2|$$

3h Décrire qualitativement l'ensemble du mouvement de chacune des billes après le choc.

m_2 repart avec une vitesse en norme < la vitesse d'arrivée elle va remonter à un angle $\alpha_2' < \frac{\pi}{2}$

m_1 repart avec une vitesse + grande, elle va sortir de la glissière / se cogner dans le boudin

si on en a mis un

0,5 pour m_1 0,5 pour m_2

3i Place de secours pour l’exercice 3

Place supplémentaire de secours pour tous les exercices

4a Page 1

4b Page 2

This page is left blank intentionally