**Questions**

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|

**Surname, First name** sciper : 990002

| 1 | 7 | 2 | 0 | 2 | 0 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|

**Mécanique**
Physique générale STI I & STI II
*17 January 2020 08:15 - 11:15*

**Dans tous les problèmes, sauf indication contraire, les résultats sont à exprimer en fonction des données fournies et des constantes physiques connues.**

**Chaque réponse doit être justifiée dans le cadre prévu à cet effet.**

**Le sujet de l'examen comprend 4 exercices.**

**Le cahier ne doit pas être dégraffé, les pages ne doivent pas être séparées. Seul le cahier est ramassé et corrigé.**

**Seul document autorisé: une page A4 recto/verso. Pas de calculatrice; pas de téléphone.**

This page is left blank intentionally

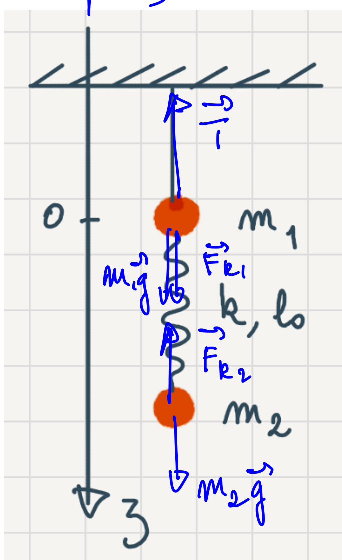
**Chute d'un ressort avec deux masses (1,3 points).** ( 1,3 pts)

On dispose de deux masses $m_1$ et $m_2$ reliées entre elles par un ressort sans masse, de raideur $k$ et de longueur au repos $l_0$.

$m_1$ est fixée au plafond par une ficelle inextensible et sans masse.

On note $z_1$ et $z_2$ les positions de $m_1$ et $m_2$ sur le repère indiqué sur la figure ci-contre. L'origine est telle que $z_1 = 0$ quand l'ensemble est immobile.

On appelle $G$ le centre de masse de $m_1$ et $m_2$. Il est repéré par la position $z_G$.




Pour commencer, les masses sont immobiles.

**1a** Faire le bilan des forces sur $m_1$ et sur $m_2$ et les indiquer sur le dessin.

1

$m_1$ : $\vec{T}$ tension $\quad \vec{F}_{k1} = -\vec{F}_{k2} \quad m_1\vec{g}$

$m_2$ : $m_2\vec{g} \quad \vec{F}_{k2}$

**1b** Trouver l'expression de $z_{2,0}$, position d'équilibre de la masse $m_2$.

$z_{2,0} = \dfrac{m_2 g}{k} + l_0$

1

Sur $m_2$ $\quad \sum \vec{F} = \vec{0} \quad\quad \vec{F}_{k2} + m_2\vec{g} = \vec{0}$

$\vec{F}_{k2} = -k x_2 \vec{e}_z$ avec $x_2$ allongement

$-k x_2 \vec{e}_z + m_2 g \vec{e}_z = \vec{0} \Rightarrow \quad m_2 g = k x_2$ (projection)

$z_{2,0} = x_2 + l_0 \quad\quad \Rightarrow \quad z_{2,0} = \dfrac{m_2 g}{k} + l_0$ (résultat)

**1c** Calculer la position $z_{G,0}$ du centre de masse $G$ des deux masses.

$z_{G,0} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{m_2 g}{k} + l_0\right)$

1

$$z_{G,0} = \frac{m_1 z_{1,0} + m_2 z_{2,0}}{m_1 + m_2} \qquad z_{1,0} = 0$$

$$\Rightarrow z_{G,0} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(z_{2,0}) \qquad \Rightarrow z_{G,0} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{m_2 g}{k} + l_0\right)$$

On tire $m_2$ vers le bas d'une distance $d_2$ et on la lâche sans vitesse initiale.

**1d** Quelle est la condition sur $d_2$ pour que dans toute la suite du mouvement de $m_2$ la ficelle reste tendue ($m_1$ fixe) ?

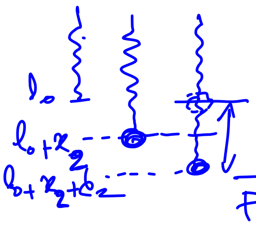
Condition sur $d_2$ : $d_2 < \frac{(m_1+m_2)g}{k}$

1,5

Il faut que $\vec{T}$ reste dirigée vers le haut dans $\Sigma \vec{F}$ sur $m_1$
$\Rightarrow$ le ressort ne doit jamais "pousser" trop fort. La limite se trouve quand le ressort est au max de compression et à $\vec{T} = \vec{0}$
$\Rightarrow |\vec{F}_{k\,max}| = |m_1 \vec{g}| \Rightarrow x_{max} = \frac{m_1 g}{k}$ compression max du ressort
la comp max est $d_2 - x_0 = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow d_2 = \frac{m_1 g}{k} + x_0 = \frac{m_1 g}{k} + \frac{m_2 g}{k}$

Autre approche : la limite est quand le ressort est en comp max et recommence à se détendre

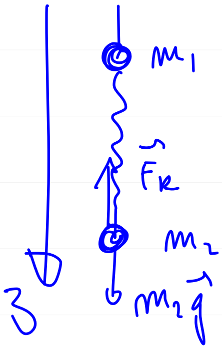
Sur $m_1$ : $\Sigma \vec{F}^{m_1} = m_1 \vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{k_1}$ fil tendu $\Rightarrow m_1$ immobile $\Rightarrow \Sigma \vec{F}^{m_1} = \vec{0}$
limite $\vec{T} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ limite : $\vec{F}_{k_1} = -m_1 \vec{g}$ or $\vec{F}_{k_1} = -\vec{F}_{k_2}$




Oscillation d'amplitude $d_2$ autour de la position d'équilibre
$l_0 + x_2 - d_2 \Rightarrow$ la compression max du ressort est $x_2 - d_2$
positive $\Rightarrow$ ressort comprimé négative ressort étiré
$\vec{F}_{k_{2,lim}} = -k(x_2-d_2)\vec{e}_z \Rightarrow \vec{F}_{k_{1,lim}} = k(x_2-d_2)\vec{e}_z = -m_1 g \vec{e}_z \Rightarrow m_1 g = k(d_2 - x_2)$
$\Rightarrow d_{2,lim} = \frac{m_1 g}{k} + x_2 = \frac{m_1 g}{k} + \frac{m_2 g}{k}$

**1e** On suppose la condition de 1d remplie. Etablir l'équation différentielle du mouvement de $m_2$.

Equation: $\ddot{z}_2 + \frac{k}{m_2} z_2 = g + \frac{k l_0}{m_2}$ / $\ddot{z}_2 + \frac{k}{m_2} z_2 = 0$




$m_1$ immobile

sur $m_2$ Newton $\Rightarrow$ $m_2 \vec{g} + \vec{F}_{k_2} = m \vec{a}_2$

$\vec{a}_2 = \ddot{z}_2 \vec{e}_z$ $\qquad$ $\vec{F}_{k_2} = -k x_2 \vec{e}_z$ $\qquad$ 2

$m_2 g \vec{e}_z - k x_2 \vec{e}_z = m_2 \ddot{z}_2 \vec{e}_z$ $\qquad$ $z_2 = l_0 + x_2$

sans changement repère

$m_2 g - k(z_2 - l_0) = m_2 \ddot{z}_2$

$\ddot{z}_2 + \frac{k}{m_2} z_2 = g + \frac{k l_0}{m_2}$

avec changement repère

$Z_2 = z_2 - z_{2,0}$

$\Rightarrow \ddot{Z}_2 + \frac{k}{m_2} Z_2 = 0$

alternative $E_{pot} = -m_2 g z_2 + \frac{1}{2} k x_2^2 = -m_2 g z_2 + \frac{1}{2} k (z_2 - l_0)^2$ $\qquad$ $F = m_2 \ddot{z}_2 = -\frac{dE_p}{dz}$ $\qquad$ $a_2 = \ddot{z}_2 \vec{e}_z$

$+ m_2 g - \cancel{\frac{1}{2}} k \cancel{2} (z_2 - l_0) = m_2 \ddot{z}_2 \Rightarrow m_2 \ddot{z}_2 = -k(z_2 - l_0)$

**1f** Trouver sa solution $z_2(t)$.

$z_2(t) = d_2 \cos \Omega_0 t + \frac{m_2 g}{k} + l_0$

forme générale $z_2(t) = A \cos(\Omega_0 t + \varphi) + cte$ $\qquad$ avec $\Omega_0^2 = \frac{k}{m}$

ou $= A \cos \Omega_0 t + B \sin \Omega_0 t + cte$ $\qquad$ 1

Conditions initiales à $t=0$ $\dot{z}_2(0) = 0$ $\Rightarrow B = 0$

$z_2(0) = l_0 + x_2 + d_2$ ou $Z_2(0) = d_2$ (suivant choix)

cte vaut $\frac{m_2 g}{k} + l_0$ [équa diff 1] ou 0 [équa diff 2]

$z_2$ $\qquad$ ↳ dans ce cas rajouter $z_{2,0}$ pour résultat $z_2(t)$

Maintenant, on repart de la situation initiale avec les deux masses immobiles. On suppose de plus que $m_1 = m_2 = m$. À $t = 0$, on coupe la ficelle.

**1g** A partir du moment où on a coupé la ficelle, décrire qualitativement (sans calcul) le mouvement de chacune des deux masses:

– dans le référentiel du centre de masse

– dans le référentiel du laboratoire

1

∘ Ref c.d.m : les 2 masses se rapprochent l'une de l'autre puis s'éloignent → oscillant autour du c.d.m

∘ mouvement précédent combiné à la chute libre du c.d.m

au début $m_2$ ne bouge pas $m_1$ accélérée t.q. $a = g$

cdm accéléré avec g

**1h** Déterminer la position du centre de masse $G$ des deux masses en fonction du temps dans le référentiel du laboratoire.

$z_G(t) = \frac{1}{2} g t^2 + l_0/2 + \frac{mg}{2k}$

1

Sur G : $\vec{a} = \vec{g} = g\vec{z}$ $\quad v = gt + v_0 = gt$

$z_G = \frac{1}{2} g t^2 + z_{G,0}$ $\quad z_{G,0} = \frac{l_0 + \frac{mg}{k}}{2}$ car $m_1 = m_2$

$z_G = \frac{1}{2} g t^2 + \frac{l_0}{2} + \frac{mg}{2k}$

**1i** Le référentiel du centre de masse est-il galiléen ? Justifier.

☐Oui ☒Non

0,5

le cdm est accéléré

On appelle $z_1'$ et $z_2'$ les coordonnées de $m_1$ et $m_2$ dans le référentiel du centre de masse.

**1j** Etablir l'équation différentielle du mouvement de la masse $m_2$ dans le référentiel du centre de masse

Équation différentielle : $\ddot{z}_2' + \frac{2k}{m} z_2' = \frac{k l_0}{m}$

Comme le ref cdm est non galiléen ⇒ ref accéléré

$\mathcal{R}$ : ref labo $\mathcal{R}'$ ref centre de masse

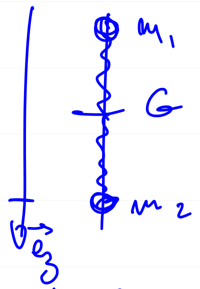
$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{a}_{\mathcal{R}}(G) + \dots$ ~~termes avec $\vec{\Omega}$~~ $\vec{0}$ car pas de rota°

2

$\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \frac{1}{m}\left[\sum \vec{f}\right] = \frac{1}{m}\left[m\vec{g} + \vec{F}_k\right] = \vec{g} + \frac{1}{m}\vec{F}_k$

$\vec{a}_{\mathcal{R}}(G) = \vec{g}$

$\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = \vec{F}_k = \ddot{z}_2' \vec{e}_z$




$\vec{F}_k = -kx\vec{e}_z$

$z_2' = \left(\frac{l_0 + x}{2}\right) \Rightarrow x = 2z_2' - l_0$ $\vec{F}_k = -k(2z_2' - l_0)\vec{e}_z$

$m\ddot{z}_2' \vec{e}_z = -k(2z_2' - l_0)\vec{e}_z$

$\ddot{z}_2' + \frac{2k}{m} z_2' = \frac{k l_0}{m}$

**1k** Donner la solution de cette équation différentielle pour obtenir la position de $m_2$ en fonction du temps dans le référentiel du centre de masse.

$z_2'(t) = \frac{m_2 g}{2k} \cos \Omega_1 t + \frac{l_0}{2}$ $\Omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

1

Solution générale $z_2'(t) = A\cos \Omega_1 t + B \sin \Omega_1 t + \frac{l_0}{2}$

à $t=0$ $\dot{z}_2'(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

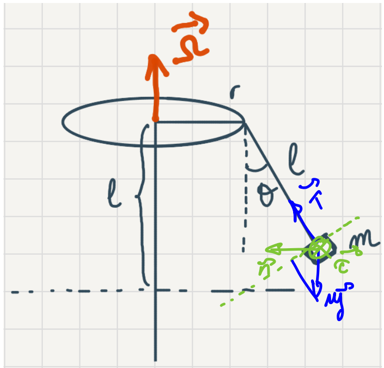
à $t=0$ $z_2'(0) = \frac{x_2}{2} = \frac{m_1 g}{2k} \Rightarrow A = \frac{m_2 g}{2k}$

$z_2'(t) = \frac{m_2 g}{2k} \cos \Omega_1 t + \frac{l_0}{2}$ avec $\Omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

**Manège chaises volantes (1,0 point).** (1,0)

On considère l'attraction de fête foraine suivante : une nacelle (masse $m$ avec son occupant) est fixée par une barre de longueur $l$ et de masse négligeable à un anneau qui peut être mis en rotation dans un plan horizontal à la vitesse angulaire $\Omega$. Après la mise en rotation, la nacelle se stabilise, la barre faisant un angle $\theta$ avec la verticale.

Le rayon de l'anneau est $r$ et il est à une hauteur $l$ au-dessus du sol.




**2a** Trouver la relation entre $\Omega$ et l'angle $\theta$ fait par la barre avec la verticale.

$\Omega = \sqrt{\dfrac{g \tan\theta}{r + l\sin\theta}}$

Sur la masse m $\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}_n + m\vec{a}_t$

mouvement circulaire uniforme $\vec{a}_t = 0$ $\vec{a}_n = \frac{v^2}{r}\vec{n}$

(aussi OK en cylindriques)

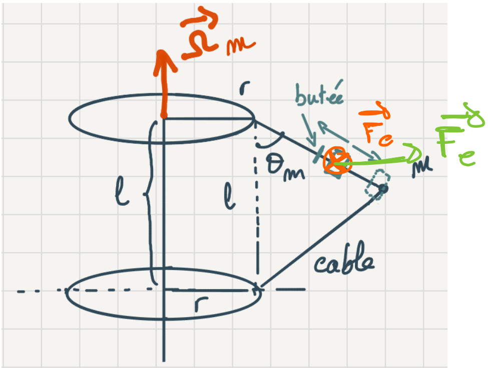
2 Forces : poids $m\vec{g}$ ; tension $\vec{T}$. Projection sur la normale à $\vec{T}$

$\vec{T} + m\vec{g} = m\frac{v^2}{R}\vec{n} \Rightarrow 0 + mg\sin\theta = m\frac{v^2}{R}\cos\theta$

$R = r + l\sin\theta$ ; $\cancel{m}g\sin\theta = \cancel{m} R\Omega^2\cos\theta = (r + l\sin\theta)\Omega^2\cos\theta$

$\Omega^2 = \dfrac{g\tan\theta}{r + l\sin\theta}$

Afin de limiter l'angle $\theta$ lorsque $\Omega$ augmente, l'extrémité de la tige est retenue par un cable de longueur $l$, de masse négligeable qui coulisse dans un autre anneau, de rayon $r$, fixé au sol.
De plus, la nacelle peut se déplacer le long de la barre, entre l'extrémité inférieure et son milieu, grâce à un moteur qui contrôle la vitesse de déplacement.




**2b** Quelle est la vitesse angulaire $\Omega_m$ minimale, telle que le cable soit tendu quelle que soit la position de la nacelle entre $l/2$ et $l$?

$\Omega_m = \sqrt{\dfrac{g \tan\theta_m}{r + l/2 \sin\theta_m}}$

Pour que le cable soit tendu, il faut que $\theta = \theta_m$

$\Omega = \sqrt{\dfrac{g \tan\theta}{r + l \sin\theta}}$ si la masse est en $\dfrac{l}{2}$

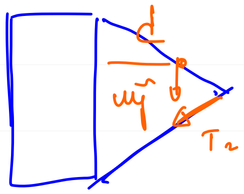
la vitesse angulaire minimale pour atteindre $\theta_m$ est plus grande

$\Omega_m = \sqrt{\dfrac{g \tan\theta_m}{r + \frac{l}{2}\sin\theta_m}}$

2

Résolution "compliquée" $\Rightarrow$ on rajoute la force $\vec{T_2}$

$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ sur la barre $= + m(r + d\sin\theta)\,\Omega^2 \vec{n}$



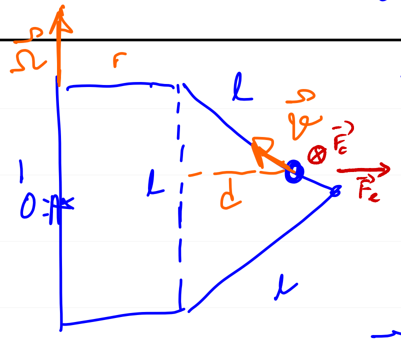
On suppose dans ce qui suit que le manège tourne à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}_m$ avec $\vec{\Omega}_m$ pointant vers le haut.

**2c** La nacelle part du bas de l'extrémité de la barre et remonte à la vitesse $v$ constante vers le milieu de la barre. Calculez les normes des forces fictives, entraînement et Coriolis, dans le référentiel de la barre. Représentez-les sur le dessin.

$F_{\text{Coriolis}} = m \Omega_m v \sqrt{3}$

$F_{\text{entrainement}} = m \Omega_m^2 (l-x) \frac{\sqrt{3}}{2}$

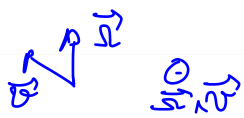
2




$\vec{F}_{\text{entraînement}} = -m\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{OP})$

$\vec{F}_{\text{coriolis}} = -2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_{R'}(P)$

$= -2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}$




$\vec{\Omega}\wedge\vec{OP}$ ⊗ $\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{OP})$

$|\vec{F}_{\text{coriolis}}| = 2m\,\Omega v \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\, m \Omega v$

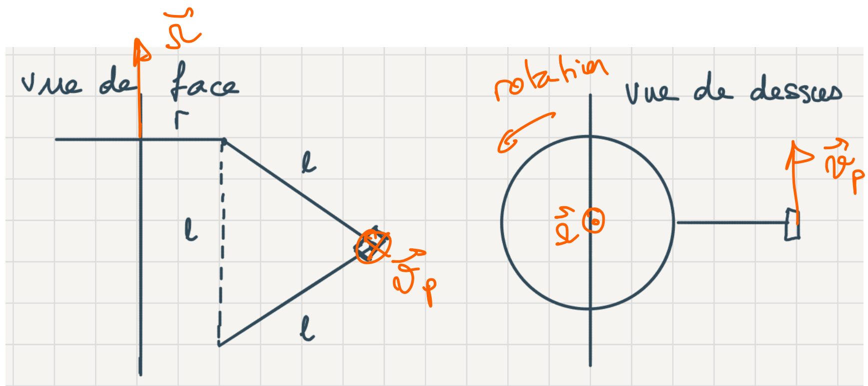
$|\vec{F}_{\text{entraîné}}| = m\Omega^2(r+d) = m\Omega^2(l-x)\frac{\sqrt{3}}{2}$

(oubli: $x$, ok)

La nacelle est de nouveau au bout de la barre et ne se déplace plus le long de celle-ci. Un occupant lâche son téléphone portable en voulant prendre une photo.

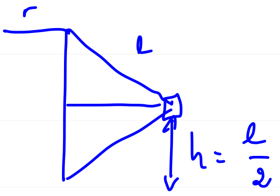
**2d** Représenter le vecteur vitesse du téléphone portable juste après que l'occupant de la nacelle l'a lâché

2

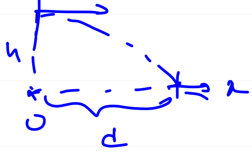


**2e** A quelle distance du centre de l'anneau le téléphone se retrouve-t-il au sol ?

$d = \left(r + \frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{1+\Omega^2\frac{\ell}{g}}$



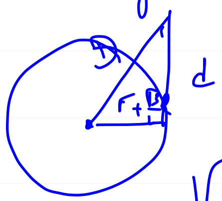

$v_0 = \left(r + \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right)\Omega$




$\vec{a}\begin{vmatrix} 0 \\ -g \end{vmatrix} \quad \vec{v}\begin{vmatrix} v_0 \\ -gt \end{vmatrix} \quad \vec{r}\begin{vmatrix} v_0 t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{\ell}{2} \end{vmatrix}$

2

$t_f : y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}g t_f^2 + \frac{\ell}{2} = 0 \qquad t_f^2 = \frac{\ell}{g} \qquad t_f = \sqrt{\frac{\ell}{g}}$




$d = v_0 t = \left(r + \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right)\Omega\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

$D = \sqrt{\left(r + \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right)^2 + d^2} = \sqrt{\left(r + \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right)^2 + \left(r + \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right)^2\Omega^2\frac{\ell}{g}}$

$D = \left(r + \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right)\left[1 + \Omega^2\frac{\ell}{g}\right]^{1/2}$

**Sonde lunaire (1,0 point).**
Une sonde de masse $m$ se dirige vers la Lune (rayon $R_L$, masse $M_L$). Dans un premier temps le vecteur vitesse pointe vers le centre de la Lune et la sonde s'écrase sur celle-ci. Au point A, la sonde a la vitesse $v_A$. Le point A est à la distance $d_A$ du centre de la Lune.


**3a** Calculer la variation d'énergie cinétique de la sonde au cours de l'impact, dans le référentiel de la Lune.

$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_A^2 - G M_L \left[\frac{1}{d_A} - \frac{1}{R_L}\right]$ Remarque les 2 signes sont OK

1,5 à l'impact la vitesse est $v_I$ au point d'impact, elle est perdue
$\Rightarrow \Delta E_c = \frac{1}{2} m v_I^2$ (ou $-\frac{1}{2} m v_I^2$)

$E_{mec}$ conservé entre A et I A: $\frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{G M_L m}{d_A}$

I: $\frac{1}{2} m v_I^2 - \frac{G M_L m}{R_L}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2} m v_I^2 = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v_A^2 - G M_L \left[\frac{1}{d_A} - \frac{1}{R_L}\right]$

Pour éviter ce scénario-catastrophe, la sonde s'approche de la Lune avec la condition représentée sur le dessin ci-dessous. Au point A, $v_A = 1000$ ms$^{-1}$. La distance OA vaut 500'000 km. La masse de la Lune vaut $7 \cdot 10^{22}$ kg et la constante de gravitation $G = 7 \cdot 10^{-11}$ SI.

**3b** Montrer qu'au point A, l'énergie potentielle de la sonde est, en norme, négligeable devant son énergie cinétique.

en A $E_{p,A} = \frac{-G M_L m}{d_{OA}} = -m \cdot \frac{7.10^{-11} \; 7.10^{22}}{5.10^{8}} = -m \frac{50 \cdot 10^{11}}{5 \cdot 10^{8}} = -m 10^{4}$ SI

0,5 $E_{c,A} = \frac{1}{2} m v_A^2 = m \cdot 0,5 \cdot 10^{6} = m \cdot 5 \cdot 10^{5}$

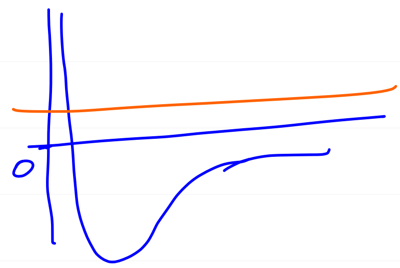
$|E_c| \sim 50 |E_p|$

**3c** La sonde est-elle en orbite autour de la Lune ? Justifier.

☐Oui ☒Non

1 Comme $E_c \gg E_p$

$E_{méc} > 0$




trajectoire ouverte

On suppose que la sonde suit la trajectoire représentée en pointillés. Au point B, sa vitesse est $v_B$, et le vecteur vitesse $\vec{v}_B$ est tangent à l'orbite circulaire de rayon $r_B$.

**3d** Calculer $d$ en fonction de $v_A$, $v_B$ et $r_B$.

$d = r_B \dfrac{v_B}{v_A}$

Conserva° moment cinétique

$\vec{OA} \wedge m\vec{v}_A = \vec{OB} \wedge (m\vec{v}_B)$

$d \cancel{m} v_A = r_B \cancel{m} v_B$ $\qquad d = r_B \dfrac{v_B}{v_A}$

1

**3e** Calculer $d$ en fonction de $r_B$, $G$, $M_L$ et $v_A$.

$d = \dfrac{r_B}{v_A} \sqrt{v_A^2 + \dfrac{2GM_L}{r_B}}$

Conserva° $E_{mec}$ entre A et B

$\underbrace{\frac{1}{2} m v_A^2}_{E_{c,A}} - \underbrace{\cancel{\frac{G M_L m}{OA}}}_{E_{p,A}} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{G M_L m}{r_B}$

négl (cf 3b)

1,5

$v_A^2 = v_B^2 - \dfrac{2GM_L}{r_B}$ $\qquad v_B^2 = v_A^2 + \dfrac{2GM_L}{r_B}$

$v_B = \sqrt{v_A^2 + \dfrac{2GM_L}{r_B}}$ $\quad \Rightarrow \quad d = \dfrac{r_B}{v_A} \sqrt{v_A^2 + \dfrac{2GM_L}{r_B}}$

**3f** En déduire la valeur minimale de $d$ telle que la sonde ne s'écrase pas sur la Lune.

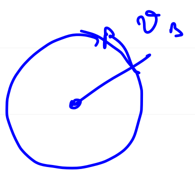
$d_{\text{min}} = \sqrt{R_L^2 + \dfrac{2GM_L R_L}{v_A^2}}$

$d = \sqrt{r_B^2 + \dfrac{2GM_L r_B}{v_A^2}}$ Comme on doit avoir $r_B > R_L$ 0,5

$d > d_{min} = \sqrt{R_L^2 + \dfrac{2GM_L R_L}{v_A^2}}$

**3g** Calculer la vitesse que devrait avoir la sonde en B pour avoir une orbite circulaire de rayon $r_B$.

$v_{B,\text{circ}} = \sqrt{\dfrac{GM_L}{r_B}}$




Sur une orbite circulaire $m a_n = m \dfrac{v^2}{R} = F_G = \dfrac{GM_L m}{R^2}$ 1

donc $m \dfrac{v_{B,circ}^2}{\cancel{r_B}} = \dfrac{GM_L m}{r_B^{\cancel{2}}}$

$v_{B,circ} = \sqrt{\dfrac{GM_L}{r_B}}$

**3h** Pour mettre la sonde sur une orbite circulaire en B faut-il diminuer ou augmenter sa vitesse ? Justifier.

☒ Diminuer ☐ Augmenter

La sonde est sur une trajectoire hyperbolique, son énergie méca. est trop élevée. On ne peut la diminuer qu'en diminuant $E_c$ donc $v$ 1

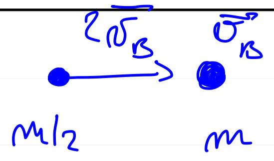
Une fois sur l'orbite circulaire, la sonde est percutée par derrière par un petit astéroide de masse $m/2$ et de vitesse $2v_B$. Le choc est parfaitement inélastique.

Autre approche $v_B = v_A \dfrac{d}{r_B}$ [3d] $\Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 + \underbrace{\dfrac{2GM_L}{r_B}}_{2 v_{B,circ}^2}}$

donc $v_B > v_{B,circ}$

**3i** Calculer la vitesse de la sonde juste après le choc en fonction de $v_B$

$v'_B = \frac{4}{3}\vec{v}_B$




choc inélastique : conservation de $\vec{p}$

2 particules collées

avant : $\vec{p} = \frac{m}{2} \cdot 2\vec{v}_B + m\vec{v}_B = 2m\vec{v}_B$

après $\vec{p}\,' = \left(\frac{3m}{2}\right)\vec{v}\,'_B$

$\frac{3m}{2}\vec{v}\,'_B = 2m\vec{v}_B$

$\vec{v}\,'_B = \frac{4}{3}\vec{v}_B$

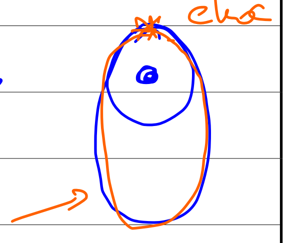
**3j** Quelle est la nouvelle trajectoire ? Justifier. Shématisez-la.

trajectoire circulaire $E_p = -\frac{GM m}{r_B} = -\frac{\cancel{GM} m \cdot v_B^2}{\cancel{GM}} = m v_B^2$

pour la sonde

$E_{m,\text{après}} = -m v_B^2 + \frac{1}{2} m v_B'^2 = -m v_B^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{4}{3} v_B\right)^2$

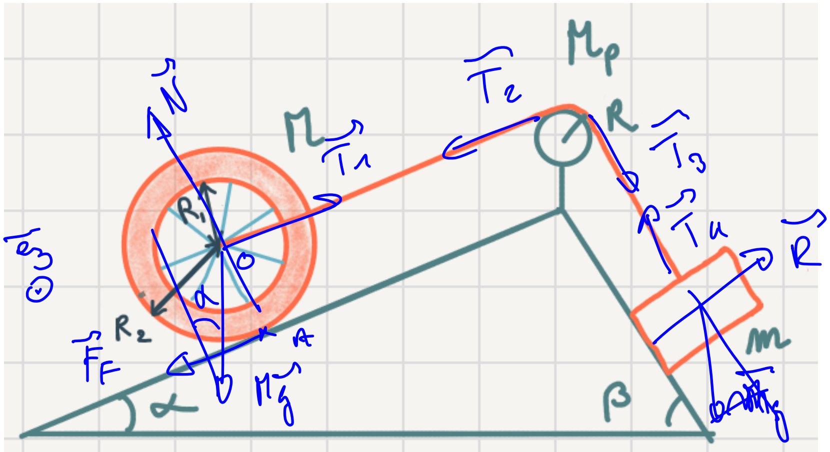
$= m v_B^2 \left(-1 + \frac{16}{18}\right) = -\frac{1}{9} m v_B^2 < 0 \Rightarrow$ ellipse



**Plan incliné (1,7 points).** (17)

Dans le montage suivant, on considère un double plan incliné. À gauche une roue, considérée comme un cylindre creux de rayon intérieur $R_1$ et extérieur $R_2$, de masse $M$, entièrement répartie, de façon homogène, dans le cylindre (on néglige la masse de l'axe et des rayons). On appelle $I_R$ le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe. Dans tout l'exercice, cette roue roule sans glisser. À droite, une masse $m$ glisse sur le plan. Dans un premier temps, on néglige les frottements entre la masse $m$ et le plan. Les deux objets sont reliés par une corde sans masse et inextensible qui passe sans glisser sur une poulie, de masse $M_P$, de rayon $R$, et de moment d'inertie $I_P$ par rapport à son axe, située au sommet du double plan.

On rappelle que le moment d'inertie par rapport à son axe d'un cylindre plein, homogène, de rayon $R$ et de masse $m$ est $\frac{1}{2}mR^2$




On lâche le système sans vitesse initiale et on le regarde évoluer.

**4a** Calculer $M_I$, valeur particulière de $M$, pour que le système reste immobile.

$M_I = m \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$

Forces : sur la roue $\vec N$, $\vec{T_1}$, $M\vec g$, $\vec{F_F}$

sur la masse $\vec{T_4}$, $\vec R$, $m\vec g$ (pas de frottements)

2 Sur la roue : $\sum \vec{\Gamma}_A = \vec 0$ permet de se débarasser de $\vec{F_F}$

$\underbrace{\vec{AA}\wedge\vec N}_{\vec 0} + \underbrace{\vec{AA}\wedge\vec{F_F}}_{\vec 0} + \vec{AO}\wedge M\vec g + \vec{AO}\wedge\vec{T_1} = \vec 0$

$R_2 Mg\sin\alpha\,\vec{e_3} - R_2 T_1\,\vec{e_3} = \vec 0 \Rightarrow T_1 = Mg\sin\alpha$

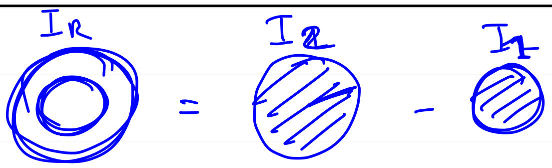
Sur $m$ : $\sum\vec F = \vec 0$ $\quad \vec{T_4} + \vec R + m\vec g = \vec 0$ projeté sur le plan

$T_4 - mg\sin\beta = 0$. $T_1 = T_4 \Rightarrow Mg\sin\alpha = mg\sin\beta \Rightarrow M_I = mg\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$

Remarque, on arrive au bon résultat en faisant $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ sur la masse et la roue, et en "oubliant" $f_F$ sur la roue. C'est un coup de bol

**4b** Calculer le moment d'inertie $I_R$ de la roue par rapport à son axe.

$I_R =$ $\frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2) = \frac{1}{2} M \frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^2 - R_1^2}$ (ok sans simplification)




Soit $\rho$ la masse volumique du matériau

$I_1 = \frac{1}{2} M_1 R_1^2 = \frac{1}{2} \rho . \pi R_1^2 R_1^2 = \frac{1}{2} \rho \pi R_1^4$ $\quad I_2 = \frac{1}{2} \rho \pi R_2^4$

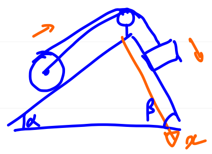
1,5 $I_R = \frac{1}{2} \rho \pi (R_2^4 - R_1^4)$ , $\rho = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi R_2^2 - \pi R_1^2}$

$I_R = \frac{1}{2} \cancel{\pi} (R_2^4 - R_1^4) . \frac{M}{\cancel{\pi} (R_2^2 - R_1^2)} = \frac{1}{2} M (R_2^2 + R_1^2)$

Dans la suite du problème, on exprimera les relations en utilisant $I_R$ et $I_P$. Par ailleurs $M$ n'a pas de valeur particulière et peut être inférieure ou supérieure à $M_I$.

**4c** Exprimer l'énergie mécanique du système en mouvement en fonction des données ainsi que de la vitesse $\dot{x}$ et de la position $x$ de la masse $m$ se déplaçant le long du plan de droite.

$E_m = g x \left[ M \sin\alpha - m \sin\beta \right] + \dot{x}^2 \left[ \frac{1}{2} \left( M + m + \frac{I_R}{R_2^2} + \frac{I_P}{R^2} \right) \right]$




$E_p^g = M g x \sin\alpha - m g x \sin\beta$

$E_c^{trans} = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (M+m) \dot{x}^2$

$E_c^{rot} = \frac{1}{2} I_R \omega_R^2 + \frac{1}{2} I_P \omega_P^2 = \frac{1}{2} I_R \frac{\dot{x}^2}{R_2^2} + \frac{1}{2} I_P \frac{\dot{x}^2}{R^2}$

3

Car $\omega_R = \frac{\dot{x}}{R_2}$ et $\omega_P = \frac{\dot{x}}{R}$

$E_m = M g x \sin\alpha - m g x \sin\beta + \dot{x}^2 \cdot \frac{1}{2} \left[ M + m + \frac{I_R}{R_2^2} + \frac{I_P}{R^2} \right]$

$= g x \left[ M \sin\alpha - m \sin\beta \right] + \dot{x}^2 \cdot \frac{1}{2} \left( M + m + \frac{I_R}{R_2^2} + \frac{I_P}{R^2} \right)$

**4d** Exprimer l'accélération de la masse $m$.

$a_m = g \dfrac{m \sin\beta - M \sin\alpha}{M + m + \frac{I_R}{R_2^2} + \frac{I_P}{R^2}}$

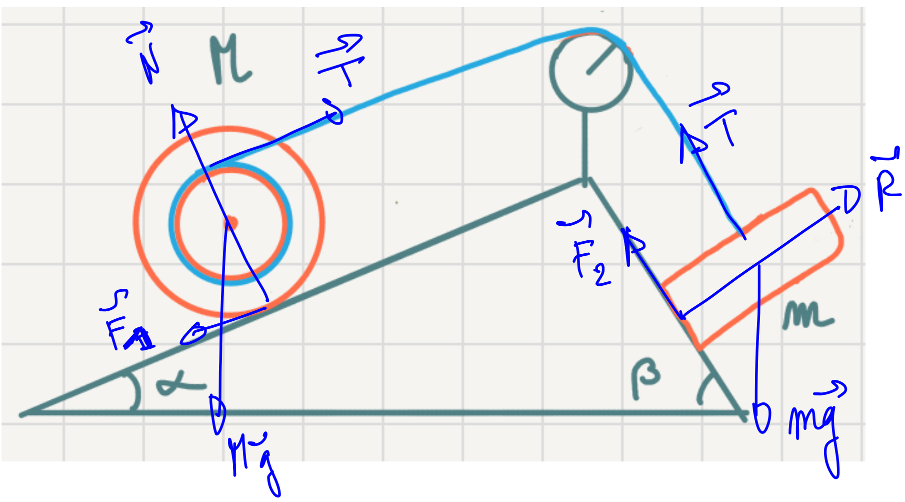
Forces conservatives $\Rightarrow E_m = cte$ $\quad \dfrac{dE_m}{dt} = 0$

$\cancel{\dot{x}}\, g \left[M \sin\alpha - m \sin\beta\right] + \cancel{2}\cancel{\dot{x}}\ddot{x}\, \cancel{\tfrac{1}{2}}\left[\left(M + m + \frac{I_R}{R_2^2} + \frac{I_P}{R^2}\right)\right] = 0$

2

$\ddot{x} = -g \dfrac{M \sin\alpha - m \sin\beta}{M + m + \frac{I_R}{R_2^2} + \frac{I_P}{R^2}}$

Maintenant, la roue est remplacée par un rouleau de fil sans masse qui a le même moment d'inertie $I$, la même masse $M$, et le même rayon externe $R_2$. le fil s'enroule comme indiqué sur le dessin autour du cylindre intérieur de diamètre $R_1$. De plus, la masse $m$ subit des frottements secs de coefficient statique $\mu_s$ et dynamique $\mu_c$ avec le plan incliné. On remplace la poulie en haut du plan incliné par une poulie de masse négligeable.



2

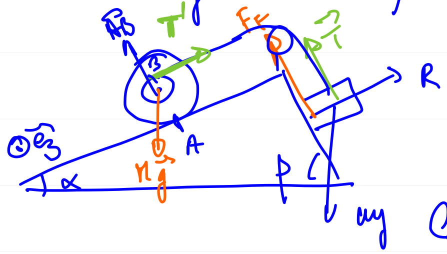
**4e** Représenter sur le schéma les forces s'appliquant sur le rouleau et sur la masse $m$.

**4f** Dans quel intervalle se trouve $M$ pour que le système lâché sans vitesse initiale reste immobile ?

Condition: $m\left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)\left(\frac{\sin\beta-\mu_s\cos\beta}{\sin\alpha}\right) < M < m\left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)\left(\frac{\sin\beta+\mu_s\cos\beta}{\sin\alpha}\right)$

Système immobile: $\Sigma\vec{F}=\vec{0}$. A la limite du décrochage $F_F=\mu_s R$

3




bloc immobile ⇒ $R = mg\cos\beta$

$F_F = \mu_s mg\cos\beta$

1° cas déplacement de m vers le bas ⇒ $F_F$ vers le haut

Cas limite $\mu_s mg\cos\beta + T = mg\sin\beta$ $\quad T = mg\sin\beta - \mu_s mg\cos\beta$

Déplacement de m vers le haut $T = F_F + mg\sin\beta = mg\sin\beta + \mu_s mg\cos\beta$

Sur M $\Sigma\vec{\sigma}_A = \vec{0} \Rightarrow \vec{AG}\wedge M\vec{g} + \vec{AB}\wedge\vec{T}' = (R_2)Mg\sin\alpha\,\vec{e}_3 - (R_1+R_2)T'\vec{e}_3 = \vec{0}$

$T' = \frac{R_2}{R_1+R_2}Mg\sin\alpha$ ⇒ immobilité $T = T'$

m vers la droite $M\cancel{g}\sin\alpha\,\frac{R_2}{R_1+R_2} = m\cancel{g}\sin\beta - \mu_s m\cancel{g}\cos\beta$ $\quad M_1 = m\,\frac{\sin\beta-\mu_s\cos\beta}{\sin\alpha}\,\frac{R_1+R_2}{R_2}$

m vers la gauche $M_2 = m\,\frac{\sin\beta+\mu_s\cos\beta}{\sin\alpha}\,\frac{R_1+R_2}{R_2}$

**4g** On suppose $M$ inférieure à la valeur minimale trouvée précédemment. Décrire qualitativement le mouvement du rouleau et celui de la masse $m$. Que pouvez-vous dire sur la vitesse de $m$ comparée à celle du rouleau?

m descend le long du plan avec un mouvement uniformément accéléré

1,5 le rouleau remonte en roulant

la masse descend plus vite que le rouleau ne monte (la ficelle se déroule)

**4h** Exprimer l'accélération de $m$

$a_m =$

bloc m $\quad ma = -T - mg\mu_c\cos\beta + mg\sin\beta$

$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\tau}_A = R_2 Mg\sin\alpha\,\vec{e}_3 - (R_1+R_2)T'\vec{e}_3 = -\frac{d}{dt}\left(I_A\,\omega\,\vec{e}_3\right)$

2 $\quad R_2 Mg\sin\alpha - (R_1+R_2)T' = -I_A R_2 a \qquad T = T'$

$T = -ma - mg\mu_c\cos\beta + mg\sin\beta$

$R_2 Mg\sin\alpha + (R_1+R_2)ma + (R_1+R_2)mg\mu_c\cos\beta - (R_1+R_2)mg\sin\beta = -I_A R_2 a$

$a\left[m(R_1+R_2) + I_A R_2\right] = (R_1+R_2)mg\sin\beta - (R_1+R_2)mg\mu_c\cos\beta - R_2 Mg\sin\alpha$

$a = g\cdot\frac{m([R_1+R_2][\sin\beta - \mu_c\cos\beta]) - R_2 M\sin\alpha}{m(R_1+R_2) + (MR_2^2 + I_R)R_2} \qquad I_A = I_R + MR_2^2$

This page is left blank intentionally