Barème utilisé : note $= 1 + \frac{(\text{points élève}) \cdot 5}{35}$

Les seuls objets autorisés sont:
- une feuille A4 manuscrite recto-verso
- stylos, etc.

Les réponses finales à chaque question doivent être reportées sur l'énoncé dans les cases prévues à cet effet. La justification détaillée et propre est à rendre sur le papier quadrillé fourni.

Un feuillet par exercice

Inscrivez votre nom sur chacun des feuillets!

L'examen comporte 4 exercices, numérotés de 1 à 4

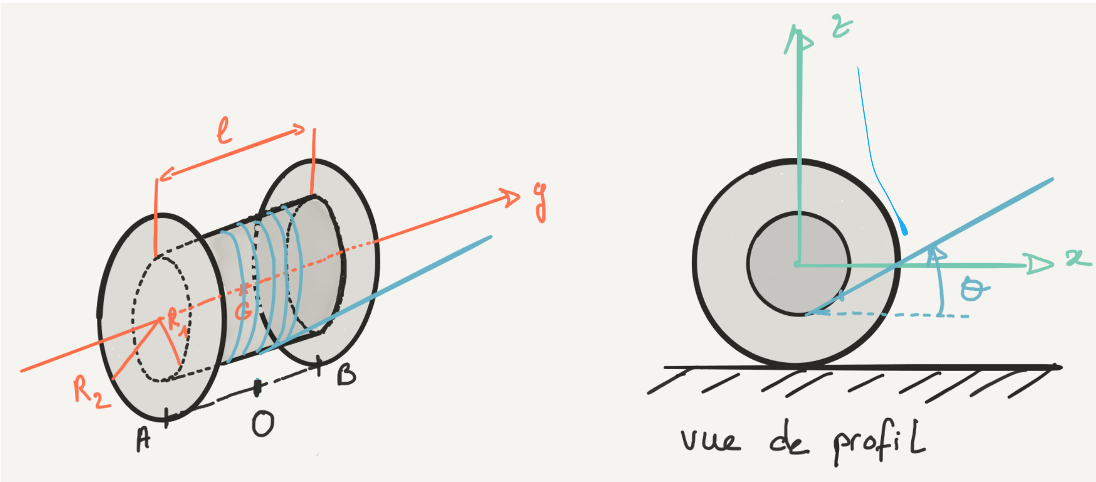
Le nombre de points maximum pour cet examen est de 40 points

Ne pas retourner avant le début de l'épreuve

Nom : .... Prénom : .... Section : .... No : ......

Exercice 1 La bobine de câble (12 points)

Nous allons étudier en détail le comportement d'une bobine de câble lorsque l'on tire sur le câble (manip vue en amphi).



Nous considérons la bobine comme faite d'un cylindre de diamètre R_1 et longueur l et de deux disques de diamètre R_2 disposés symétriquement de part et d'autre tels qu'ils ont le même axe de symétrie. Chacun des deux disques a une masse m et le cylindre une masse M.

On néglige la masse du câble.

1. Calculer I_G, moment d'inertie de la bobine par rapport à son axe de symétrie (Gy). On pourra utiliser les formules des moments d'inertie des solides usuels.

1

$$I_G = I_{cyl} + 2\, I_{disques} = \frac{1}{2} M R_1^2 + m R_2^2$$

2. Calculer I_A, moment d'inertie de la bobine par rapport à l'axe (Ay) parallèle à (Gy) passant par les points de contacts avec le sol.

1

$$I_A = I_G + (M+2m) R_2^2 = \frac{1}{2} M R_1^2 + M R_2^2 + 3 m R_2^2$$

On pose la bobine sur un plan horizontal et on la tire par le câble. Le câble se déroule depuis le bas et on appelle θ l'angle entre le câble et l'horizontale. $\theta < 90°$. On considère que la force exercée par le câble agit dans le plan (Gxz), donc dans le plan de symétrie de la bobine.

3. On néglige les frottements entre les deux disques et le sol. Faire le bilan des forces et décrire le mouvement de la bobine en justifiant.

1,5

La bobine se déplace vers la droite et elle tourne dans le sens anti horaire

Dans la suite du problème on ne néglige plus les frottements entre les disques et le sol.

On suppose que les forces de frottements en A et B, $\vec{F}_A$ resp. $\vec{F}_B$ sont identiques et valent $F\vec{e}_x$; F pouvant être positif ou négatif.

4. Calculer le vecteur moment des forces de frottements par rapport à O milieu du segment $[AB]$.

1

$$\vec{M}_0^{F_A} = \frac{L}{2} F \vec{e_3}$$
$$\vec{M}_0^{F_B} = -\frac{L}{2} F \vec{e_3}$$

5. En déduire que pour l'analyse du mouvement du cylindre, il est équivalent de considérer une seule force de frottements $\vec{F}_{\text{tot}}$ appliquée en O et exprimer $\vec{F}_{\text{tot}}$ en fonction de $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$.

1,5

$$\vec{F}_{\text{tot}} = 2F\vec{e_x} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$$

Maintenant on exerce une tension constante sur le câble.

6. Calculer l'accélération angulaire de la bobine en fonction de R_1, R_2, T et I_A

2,5

$$\alpha_1 = \frac{T}{I_A}(R_2\cos\theta - R_1)$$

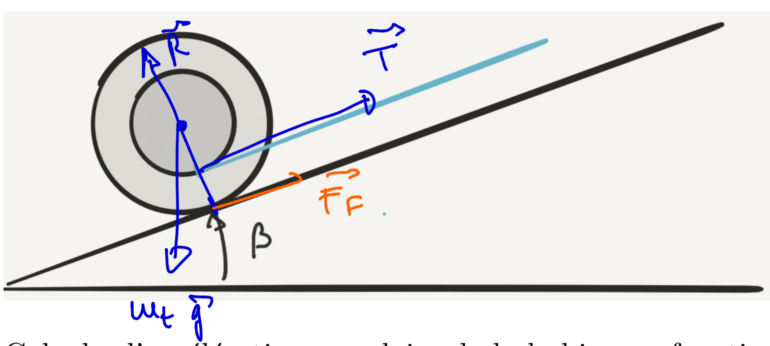
7. Décrire le mouvement de la bobine en fonction de θ. On utilisera une condition liant θ, R_1 et R_2. Vérifier qu'il correspond à ce qu'on attend (justifier).

1

$\theta < \mathrm{Arccos}\frac{R_1}{R_2}$ $\alpha_1 > 0$ θ petit → bobine part à droite

$\theta > \mathrm{Arccos}\frac{R_1}{R_2}$ $\alpha_1 < 0$ θ grand ← - - - - - - gauche

On place maintenant la bobine sur un plan incliné d'un angle β avec l'horizontale et on maintient la ficelle parallèle au plan. On exerce une tension $\vec{T} = T\vec{e}_x$. On suppose que la bobine ne glisse pas.



8. Calculer l'accélération angulaire de la bobine en fonction de m, M, R_1, R_2 et I_A.

1,5

$$\alpha_2 = \frac{T(R_2-R_1) - (2m+M)gR_2\sin\beta}{I_A}$$

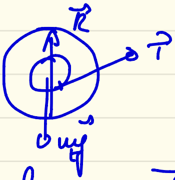
9. Soit μ le coefficient de frottement statique. Calculer la tension maximale que l'on peut exercer pour que la bobine ne se mette pas à glisser. Exprimer T en fonction de μ, β, m, M, R_1, R_2 et I_A

1

$$F_{lim} = \mu_s m_t g \cos\beta$$

$$T = \quad T_{lim} = \frac{F_{lim} + m_t g \sin\beta\left[\frac{m_t R_2^2}{I_A} - 1\right]}{\frac{m_t R_2(R_2-1)}{I_A} - 1}$$

3 _ Bilan des forces : Réaction du sol ; poids ; Tension du fil



$\sum \vec{F} = m_t \vec{a}_G$ $\sum \vec{F}$ a une composante vers la droite ⇒ le rouleau se déplace vers la droite.

De plus $\sum \vec{\mathcal{M}}_G^{ext} = \frac{d\vec{L}_G}{dt}$ ⇒ le moment de T fait tourner le rouleau ↺ dans le sens anti horaire

Comme il n'y a pas de frottements, les 2 mouvements sont découplés

4. $\vec{OA} = -\frac{L}{2}\vec{e_y}$ $\vec{F_A} = F\vec{e_x}$ $\vec{\mathcal{M}}_O^{F_A} = \vec{OA}\wedge\vec{F_A} = -\frac{L}{2}F\underbrace{\vec{e_y}\wedge\vec{e_x}}_{-\vec{e_z}} = \frac{L}{2}F\vec{e_z}$

$\vec{OB} = \frac{L}{2}\vec{e_y}$ $\vec{F_B} = F\vec{e_x}$ $\vec{\mathcal{M}}_O^{F_B} = -\frac{L}{2}F\vec{e_z}$

5 - { Si on prend $\vec{F_{tot}}$ appliquée en O $\vec{\mathcal{M}}_O^{F_{tot}} = \vec{0}$
Si on répart $\vec{F_A}$ & $\vec{F_B}$ $\vec{\mathcal{M}}_O^{F_A} + \vec{\mathcal{M}}_O^{F_B} = \vec{0}$ car ils sont opposés

donc les 2 résultats sont identiques

De plus par $\sum \vec{F}^{ext} = m\vec{a}_G$ on peut grouper $\vec{F_A} + \vec{F_B}$ en $\vec{F_{tot}}$

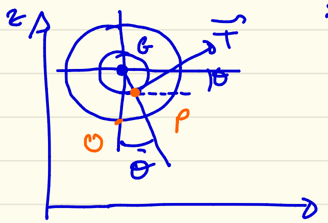
donc pour $\sum \vec{\mathcal{M}}_O$ et $\sum \vec{F}_{ext}$ on peut considérer 1 seule force mais il faut calculer le moment par rapport à O

6 - La question 5 montre que appliquer le th. du mt cinétique en O est la bonne solution ⇒ les frottements disparaîtront

$\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$

$\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \cancel{\vec{OO}\wedge\vec{F_{tot}}} + \cancel{\vec{OG}\wedge(M+2m)\vec{g}} + \vec{OP}\wedge\vec{T} + \cancel{(\vec{OA}+\vec{OB})}\wedge\left(\frac{\vec{R}}{2}\right)$

Seul le moment de $\vec{T}$ reste



$\vec{T}$ s'applique en P ! repère de centre G

$O \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_2 \end{vmatrix}$ $\quad P \begin{vmatrix} R_1 \sin\theta \\ 0 \\ -R_1\cos\theta \end{vmatrix}$ $\quad \vec{OP} \begin{vmatrix} R_1 \sin\theta \\ 0 \\ R_2 - R_1\cos\theta \end{vmatrix}$

$\vec{T} \begin{vmatrix} T\cos\theta \\ 0 \\ T\sin\theta \end{vmatrix}$

$$\vec{OP} \wedge \vec{T} = \begin{vmatrix} R_1 \sin\theta \\ 0 \\ R_2 - R_1\cos\theta \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} T\cos\theta \\ 0 \\ T\sin\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -TR_1\sin^2\theta + TR_2\cos\theta - TR_1\cos^2\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= (TR_2\cos\theta - TR_1\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1})\vec{e_y} = (TR_2\cos\theta - TR_1)\vec{e_y}$$

$$\vec{L_O} = I_O \omega \vec{e_y} \qquad \frac{d\vec{L_O}}{dt} = I_O \dot{\omega} \vec{e_y}$$

Comme O et A sont sur le même axe $I_O = I_A$

$$I_A \dot{\omega} \vec{e_y} = (TR_2\cos\theta - TR_1)\vec{e_y} \qquad \alpha = \dot{\omega} = \frac{TR_2\cos\theta - TR_1}{I_A}$$

7 - Si $R_2\cos\theta - R_1 > 0$ $\quad \cos\theta > \frac{R_1}{R_2}$ $\quad \alpha > 0$

Si $R_2\cos\theta - R_1 < 0$ $\quad \cos\theta < \frac{R_1}{R_2}$ $\quad \alpha_1 < 0$

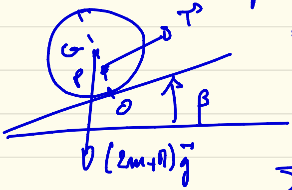
Attention entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ $\cos\theta$ décroissante !

$\cos\theta > \frac{R_1}{R_2} \Leftrightarrow \theta < \operatorname{Arccos}\frac{R_1}{R_2}$ $\quad \alpha_1 > 0$

$\theta > \operatorname{Arccos}\frac{R_1}{R_2}$ $\quad \alpha_1 < 0$

8 $\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \underbrace{\cancel{\vec{OO}\wedge\vec{F}_{tot}}}_{\vec{0}} + \overbrace{\vec{OA}\wedge\vec{R}_A + \vec{OB}\wedge\vec{R}_B}^{\vec{0}} + \vec{OG}\wedge(2m+M)\vec{g} + \vec{OP}\wedge\vec{T}$

Cette fois ci le moment de $\vec{T}$ est + simple mais le moment du poids est non nul

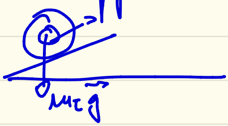


$\sum \vec{\mathcal{M}}_O = (R_2 - R_1)T\,\vec{e_y} - R_2(2m+M)g\underbrace{\sin(\pi-\beta)}_{\sin\beta}\vec{e_y}$

$\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \left[T(R_1-R_2) - (2m+M)gR_2\sin\beta\right]\vec{e_y}$

$= I_A\,\alpha_2\,\vec{e_y} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{T(R_2-R_1) - (2m+M)gR_2\sin\beta}{I_A}$

9 - La limite de glissement est donnée par $F_f = \mu_s R$ dès que la force de frottements atteint cette limite le corps commence à glisser avant il roule sans glisser
on doit donc avoir $F_F < \mu_s R$ $\quad \mu_s R = \mu_s(2m+M)g\cos\beta$
Appelons $m_t = 2m+M$
Supposons que l'on peut conserver la bobine immobile ($\alpha_2=0$) sans qu'elle glisse et on augmente $T \Rightarrow \alpha_2>0$
si elle glisse la bobine va tourner "plus vite" qu'elle ne roule $\vec{F}_F = F\vec{e_x}$
$F>0$



$\sum \vec{F}_{ext} = m_t\vec{a}_G = m_t\vec{g} + \vec{F}_F + \vec{T} + \vec{R}$

projeté sur (Ox) $m_t a_G = -m_t g\sin\beta + F + T + 0 = R_2\alpha_2 m_t$

$T - m_t g\sin\beta + F = m_t\frac{R_2}{I_A}\left[T(R_2-R_1) - m_t g R_2\sin\beta\right]$

$$T - m_t g \sin\beta + F = m_t \frac{R_2}{I_A}\left[T(R_2 - R_1) - m_t g R_2 \sin\beta\right]$$

$$T - m_t g \sin\beta + F = \frac{m_t R_2 (R_2 - R_1)}{I_A} T - \frac{m_t^2 R_2^2}{I_A} g \sin\beta$$

$$T\left[\frac{m_t R_2 (R_2 - R_1)}{I_A} - 1\right] = F + \frac{m_t^2 R_2^2}{I_A} g \sin\beta - m_t g \sin\beta$$

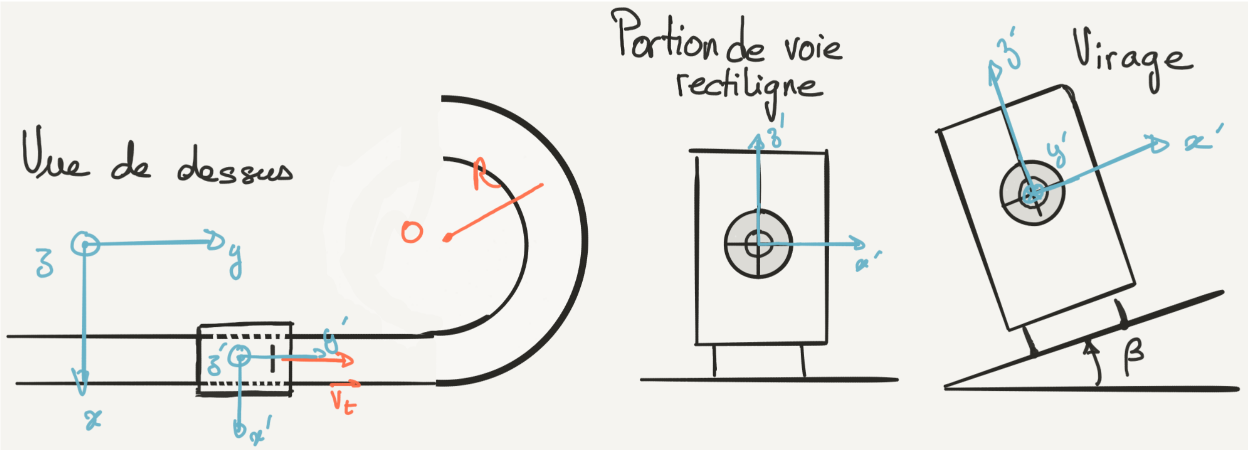
$$F_{lim} = \mu_s m_t g \cos\beta$$

$$T_{lim} = \frac{F_{lim} + m_t g \sin\beta \left[\frac{m_t R_2^2}{I_A} - 1\right]}{\frac{m_t R_2 (R_2 - 1)}{I_A} - 1}$$

Nom : .... **Prénom :** .... **Section :** .... **No :** ......

Exercice 2 . Jeux de fléchettes dans le TGV (11 points)

Un joueur de fléchettes professionnel profite de son voyage en train à grande vitesse pour s'entrainer. La cible de masse m est fixée au plafond du wagon avec un fil inextensible de masse négligeable. Le train se déplace à la vitesse $v_t = 100$ m.s^{-1} durant tout le trajet. Le train avance en ligne droite puis aborde un virage circulaire de rayon $R = 10$ km et de centre O. Pour le confort des passagers, dans le virage, la voie ferrée est inclinée d'un angle β par rapport à l'horizontale.



Le joueur lance les fléchettes, considérées comme des points matériels de masse m_f, à la vitesse $v_f = 20$ m.s^{-1} dans le référentiel du train. La cible est placée à la distance $l = 2$ m de la ligne de tir et son centre est à la même hauteur que le point de lancer. Le point de lancer est O'. On appelle α l'angle du lancer par rapport à l'horizontale. On néglige les frottements de l'air.

On considère dans cet exercice la Terre comme un référentiel galiléen.

1 1. Pour quelle raison peut-on considérer dans ce problème la Terre comme un référentiel galiléen ? La durée de l'expérience est courte devant la période de la Terre

Le joueur commence à s'entrainer alors que le train est sur la portion de voie rectiligne.

1 2. Quel est le type de mouvement effectué par une fléchette ?

Mouvement parabolique

1,5 3. Calculer les composantes du vecteur position de la fléchette dans le référentiel du train en utilisant le repère (O', x', y', z') fixe dans le train.

$x' =$ 0

$y' =$ $(v_f \cos\alpha)t$

$z' =$ $-\frac{1}{2}gt^2 + (v_f \sin\alpha)t$

4. Exprimez α en fonction des données du problème sachant que la fléchette touche toujours le centre de la cible.

$\alpha =$ $\frac{1}{2} \arcsin \frac{gl}{v_f^2}$

5. A.N.évaluez l'ordre de grandeur de α

0,5

$$\alpha = 1{,}5^\circ \text{ ou } 0{,}025 \text{ rad}$$

Maintenant, le train est dans le virage, l'angle β d'inclinaison de la voie est tel que le fil de la cible est parallèle aux murs du wagon.

1

6. Faites un schéma présentant toutes les forces (réelles et d'inerties, en les distinguant) appliquées à la cible dans le référentiel du train.

1

7. Exprimez β en fonction des données du problème.

$$\beta = \arctan \frac{v_t^2}{Rg}$$

0,5

8. Estimez numériquement β en degrés.

$$\beta = 0{,}1 \text{ rad} \text{ ou } 6^\circ$$

Le joueur continue à tirer de la même manière que lorsque le train était sur la portion rectiligne

1

9. Schématiser sur la cible le point d'impact des fléchettes – Justifiez.

On note $\vec{\Omega}$ la vitesse angulaire du train.

1

10. Exprimez les composantes de $\vec{\Omega}$ dans le repère (O', x', y', z').

$$\vec{\Omega} = \Omega \sin\beta \, \vec{e}_{x'} + \Omega \cos\beta \, \vec{e}_{z'}$$

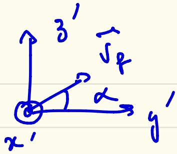
Pour cette partie, on négligera l'angle de tir α et on prendra donc $\cos\alpha = 1$ et $\sin\alpha = 0$.

1,5

11. Exprimez les composantes de la force de Coriolis que subit la fléchette une fois lancée.

$$\vec{F}_c = 2 m_f v_f \Omega \left[-\sin\beta \, \vec{e}_{z'} + \cos\beta \, \vec{e}_{x'} \right]$$

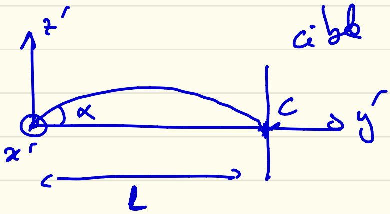
3 -



$$\vec{a}\left|\begin{matrix}0\\0\\-g\end{matrix}\right. \qquad \vec{v}\left|\begin{matrix}0\\v_f\cos\alpha\\-gt+v_f\sin\alpha\end{matrix}\right.$$

$$\vec{r}\left|\begin{matrix}0\\(v_f\cos\alpha)t\\-\frac{1}{2}gt^2+(v_f\sin\alpha)t\end{matrix}\right.$$

4 -



temps final t_f arrivée en C

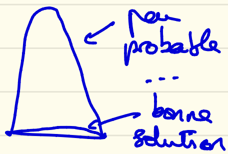
$$C\left|\begin{matrix}0\\L\\0\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}0\\v_f\cos\alpha\, t_f\\-\frac{1}{2}gt_f^2+(v_f\sin\alpha)t_f\end{matrix}\right.$$

$$-\frac{1}{2}gt_f^{\cancel{2}}+(v_f\sin\alpha)\cancel{t_f}=0 \qquad gt_f=2v_f\sin\alpha \;;\; t_f=\frac{L}{v_f\cos\alpha}$$

$$g\frac{L}{v_f\cos\alpha}=2v_f\sin\alpha \qquad 2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{gL}{v_f^2}=\sin 2\alpha$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\arcsin\frac{gL}{v_f^2}$$

5 - formellement il y a 2 solutions mais

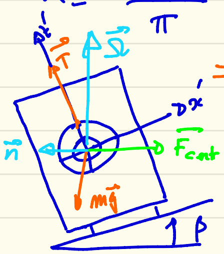


$$\frac{gL}{v_f^2}=\frac{10\times 2}{(20)^2}=\frac{1}{20}=0{,}05 \Rightarrow \sin 2\alpha \ll 1$$

donc $\sin 2\alpha \simeq 2\alpha = \frac{gL}{v_f^2}$ $\qquad \alpha \simeq \frac{1}{40} = 0{,}025$ rad

$$\alpha=\frac{180}{\pi}\,\frac{1}{40}\simeq\frac{180}{3}\times\frac{1}{40}=\frac{60}{40}=1{,}5°$$

6



$\vec{T}$ et $m\vec{g}$ forces réelles

$\vec{F}_{cent}$ force centrifuge = inertielle

7. 2 approches possibles. Mouvement circulaire dans le ref. terrestre

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}_n = m\frac{v_t^2}{R}\vec{n} = \vec{T} + m\vec{g} \quad \text{(forces réelles)}$$

Projection sur Ox' → attention $\vec{n}$ se projette aussi

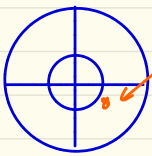
$$\cancel{m}\frac{v_t^2}{R}\cos\beta = 0 + \cancel{m}g\sin\beta$$

$$\tan\beta = \frac{v_t^2}{Rg} \qquad \beta = \arctan\frac{v_t^2}{Rg}$$

Dans le ref du train $\sum\vec{F} = \vec{0} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{cent}$ et $\vec{F}_{cent} = -m\frac{v_t^2}{R}\vec{n}$

⇒ même résultat.

9 -



à droite à cause de la courbure de la voie et en bas à cause de l'inclinaison

10 $\vec{\Omega}$ est vertical dans le ref Terrestre (cf schéma question 6)

$$\vec{\Omega} = \Omega\sin\beta\,\vec{e_{x'}} + \Omega\cos\beta\,\vec{e_{z'}}$$

11. Si on néglige l'angle de tir, cela revient à dire que la trajectoire est horizontale donc on néglige l'effet de $\vec{g}$. Donc la vitesse de la fléchette est $v_f = cte$ = vitesse de lancer

Coriolis $\vec{F}_c = -2m_f\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_{R'}(P) = -2m_f\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_f \qquad \vec{v}_f = v_f\vec{e_{y'}}$

$$= -2m_f(\Omega\sin\beta\,\vec{e_{x'}} + \Omega\cos\beta\,\vec{e_{z'}})\wedge v_f\vec{e_{y'}}$$

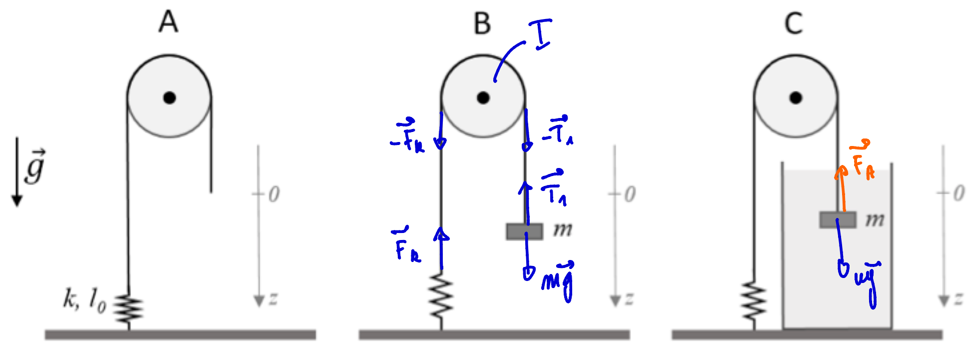
$$F_c = 2m_f v_f\Omega\left[-\sin\beta\,\vec{e_{z'}} + \cos\beta\,\vec{e_{x'}}\right]$$

On retrouve décalage + en $\vec{e_{x'}}$ et − en $\vec{e_{z'}}$ cohérent avec (9)

Nom : .... **Prénom :** .... **Section :** .... **No :** ......

Exercice 3 Poulie et ressort (10 points)

Soit une masse m de volume V reliée par une corde inextensible de masse nulle à un ressort de constante de raideur k et de longueur au repos l_0, lui-même fixé au sol. La corde passe autour d'une poulie qui tourne autour d'un axe fixe sans frottement. On appelle I le moment d'inertie de la poulie. Dans cet exercice on suppose que la corde ne glisse pas sur la poulie et qu'elle est constamment tendue. On négligera l'influence de l'atmosphère (frottements liés à l'air). On place un repère dont l'origine est l'extrémité de la corde sans masse (cas A)



1. Calculer la position d'équilibre z_e de la masse m

1

$$z_e = \frac{mg}{k}$$

On tire la masse m légèrement vers le bas d'une distance z_0 et on la lâche sans vitesse initiale depuis $z = z_e + z_0$

2. Déterminer l'équation différentielle du mouvement de m

2

$$\cancel{z_e =} \; \ddot{z} + \frac{k}{m + \frac{I}{R^2}} z = \cancel{g} \, m + \frac{I}{R^2}$$

3. La résoudre pour déterminer $z(t)$

$$z(t) = z_0 \cos \Omega t + z_e$$

4. Déterminer la pulsation des oscillations

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + I/R^2}}$$

5. Quelle condition sur l'accélération de m doit être remplie pour que la corde reste toujours sous tension ?

En norme, l'accélération de m ne doit pas dépasser g, sinon lors que la masse descend la corde "pousse" ce qui implique qu'elle n'est plus sous tension. $|a_{max}| \leq g$

1- A l'équilibre $\sum \vec{F} = \vec{0}$ sur la masse et $\sum \vec{\mathcal{M}}_O^{ext} = \vec{0}$ sur la poulie

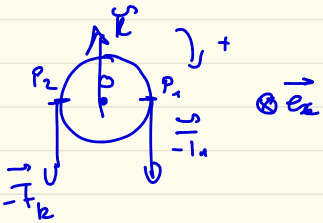
$$m\vec{g} + \vec{T}_1 = \vec{0} \; ; \; -\vec{T}_1 = -\vec{F}_k \Rightarrow m\vec{g} + \vec{F}_k = \vec{0}$$

$$mg = k z_e \qquad z_e = \frac{mg}{k}$$

2- Attention la poulie a un moment d'inertie non nul donc une masse non nulle.

- Par les forces sur la masse $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$$m\ddot{z} = -T_1 + mg$$



Sur la poulie $\sum \vec{\mathcal{M}}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$

$$= \vec{OP_1} \wedge (-\vec{T}_1) + \vec{OP_2} \wedge (-\vec{F}_k) + \vec{OO} \wedge \vec{R} = I\dot{\omega}\vec{e}_z$$

$$= RT_1\vec{e}_z - Rkz\vec{e}_z + 0 = I\dot{\omega}\vec{e}_z$$

$m\ddot{z} = -T_1 + mg$ de plus $\ddot{z} = R\dot{\omega}$ $\dot{\omega} = \frac{\ddot{z}}{R}$

$$T_1 - kz = \frac{I\dot{\omega}}{R}$$

$T_1 = kz + \frac{I\ddot{z}}{R^2}$ $m\ddot{z} + T_1 = mg$ $m\ddot{z} + kz + \frac{I\ddot{z}}{R^2} = mg$

$$\ddot{z} + \frac{k}{m + \frac{I}{R^2}} z = g \frac{m}{m + \frac{I}{R^2}}$$

Par l'énergie. Les forces sont conservatives $E_m = cte$

$$E_m = E_{pot} + E_{cin} + E_k + E_{rot} = -mgz + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$\dot{z} = R\omega \Rightarrow E_m = -mgz + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}\dot{z}^2$

$\frac{d}{dt} \rightarrow \quad 0 = -mg\cancel{\dot{z}} + m\cancel{\dot{z}}\ddot{z} + kz\cancel{\dot{z}} + \frac{I}{R^2}\cancel{\dot{z}}\ddot{z}$

comme $\dot{z} \neq 0$ (sinon équilibre)

$$\left(m + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{z} + kz - mg = 0 \quad \Rightarrow \text{ un résultat ;)}$$

3 _ Equation type T1 + 2d membre constant

$$\ddot{z} + \Omega_0^2 z = \frac{m}{m + \frac{I}{R^2}} g \qquad \Omega_0^2 = \frac{k}{m + \frac{I}{R^2}}$$

sans 2d membre $z_1(t) = A\cos\Omega_0 t + B\sin\Omega_0 t$

Sol particulière $z = cte \Rightarrow \ddot{z} = 0$

$$z_2(t) = \frac{mg}{k} = z_e$$

$z(t) = A\cos\Omega_0 t + B\sin\Omega_0 t + z_e \qquad$ à $t=0$ $\dot{z} = 0$

$\dot{z}(t) = -A\Omega_0\sin\Omega_0 t + B\Omega_0\cos\Omega_0 t \qquad \dot{z}(0) = B\Omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0$

$z(t) = A\cos\Omega_0 t + z_e \qquad$ à $t=0$ $z(0) = z_e + z_0 \Rightarrow A = z_0$

$$z(t) = z_0\cos\Omega_0 t + z_e$$

5 . $\ddot{z} = -z_0\Omega_0^2\cos\Omega_0 t \qquad |\ddot{z}_{max}| = z_0\Omega_0^2$

$$|\ddot{z}_{max}| = z_0\frac{k}{m + \frac{I}{R^2}} \leq g \qquad z_0 \leq \frac{g(m + I/R^2)}{k}$$

6. En déduire la valeur maximale de z_0

1

$$z_{0,\max} = \frac{g(m + I/R^2)}{k}$$

La masse est maintenant plongée dans un récipient contenant un fluide visqueux de masse volumique ρ. On considère que le déplacement de la masse dans le fluide a lieu en régime laminaire avec un coefficient d'amortissement η: $\vec{F}_f = -\eta\vec{v}$.

7. Calculer la nouvelle position d'équilibre de la masse

0,5

$$z'_e = \frac{mg - V\rho g}{k}$$

8. Déterminer l'équation du mouvement de la masse m.

1,5

$$\ddot{z} + \frac{\eta}{m + \frac{I}{R^2}}\dot{z} + \frac{k}{m + I/R^2} z = \frac{mg}{m + I/R^2}$$

9. Calculer la pseudo-pulsation de ce système dans le cas d'un amortissement faible.

0,5

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m + I/R^2} - \left(\frac{\eta/2}{m + I/R^2}\right)^2}$$

10. Dans le cas d'un amortissement fort, tracez qualitativement (pas de calcul) l'évolution de la position $z(t)$ de la masse m en fonction du temps lorsque celle-ci est lâchée du fond du récipient.

1

7- Maintenant il faut prendre la poussée d'Archimède en compte. $\vec{F}_A = \rho V g \vec{e}_z$ V volume de la masse

idem qu'en (1) avec F_A $\quad mg - \rho V g - k z'_e = 0$

$$z'_e = \frac{mg - \rho V g}{k}$$

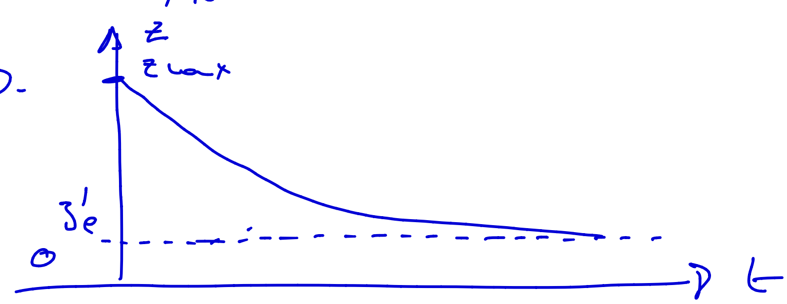
8 Idem qu'en (2) mais avec la force de frottement $\vec{F}_F = -\eta \dot{z} \vec{e}_z$ sur la masse m

$$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{\eta}{m + \frac{I}{R^2}}\dot{z} + \frac{k}{m + I/R^2} z = \frac{mg}{m + I/R^2}$$

$$2\gamma = \frac{\eta}{m + I/R^2}$$

9- $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

10-



Nom : .... **Prénom :** .... **Section :** .... **No :** ......

Exercice 4 Carreaux sur une table à coussin d'air (7 points)

Dans cet exercice, on cherche des conditions de "carreau" lors d'un choc élastique. On dit qu'il y a "carreau" lorsqu'un palet lancé sur un autre palet reste immobile après le choc. On fait les expériences sur une table à coussin d'air parfaitement horizontale ; les palets (des cylindres plats) y glissent sans aucun frottement. On considère les palets comme des objets solides sans rotation.

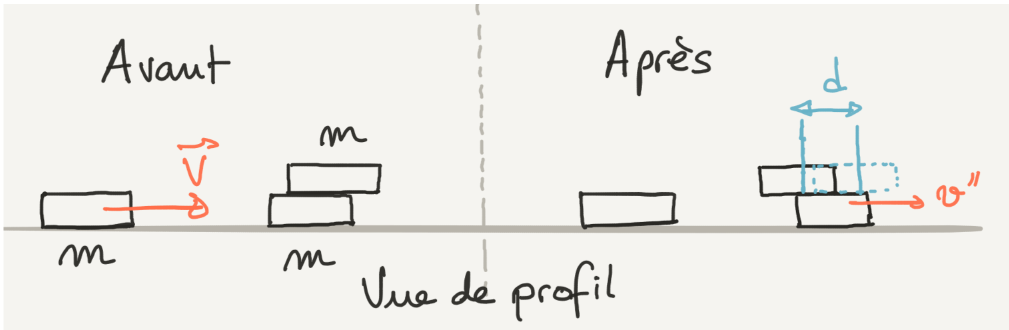
1
1. Un palet de masse M est lancé à la vitesse $\vec{V}$ contre un autre palet de masse m_a. Montrez que pour qu'il y ait carreau, il faut que les palets aient la même masse ($m_a = M$).

2
2. On lance maintenant le palet de masse M contre deux palets de même masse m_b. Ces deux palets sont disposés symétriquement, de sorte qu'après le choc ils partent de chaque côté avec une vitesse de même norme v et faisant le même angle α avec la direction du lancer.

Calculer la valeur de la masse m_b pour qu'il y ait carreau. On exprimera m_b en fonction des données du problème.

m_b.......$M / 2\cos^2\alpha$.......

3. On empile maintenant deux palets cibles, de même masse m, comme indiqué sur le schéma ci-dessous : le palet supérieur est légèrement décalé sur la droite par rapport à celui du dessous. Il y a un frottement solide entre ces deux palets, avec μ_c le coefficient de frottement cinétique. On lance sur l'empilement un palet de masse m à la vitesse $\vec{V}$ et on constate que c'est à nouveau un carreau .



Après le choc, les deux palets cibles sont toujours empilés et se déplacent à la vitesse v'' dans la direction du lancer. On observe aussi que le palet supérieur s'est décalé vers la gauche d'une distance d par rapport à sa position initiale sur le palet inférieur.

1 (a) Exprimez v'' en fonction des données du problème.

v'' .... $V/2$ ....

0,5 (b) On prend comme système l'ensemble des 3 palets. Le choc est-il élastique? Justifier.

☐ Oui ☒ Non

1,5 (c) Calculer la variation d'énergie cinétique au cours du choc en fonction de m et V.

ΔE_c .... $-\frac{1}{4} m V^2$ ....

1 (d) Calculer coefficient de frottement cinétique μ_c en fonction de V et d.

μ_c .... $V^2/4gd$ ....

1- Conservation de $\vec{p}$ et E_c (choc élastique)

$\vec{p}$: $M\vec{V} + \vec{0} = \vec{0} + m_a \vec{v}_2'$ $\Rightarrow MV = m_a v_2'$

E_c : $\cancel{\frac{1}{2}} M V^2 = \cancel{\frac{1}{2}} m_a v_2'^2 \Rightarrow \cancel{MV}.V = \cancel{m_a v_2'} v_2' \Rightarrow V = v_2'$

$MV = m_a v_2'$ et $V = v_2' \Rightarrow \underline{M = m_a}$

2- Maintenant il faut tenir compte du caractère vectoriel de $\vec{p}$

$M\vec{V} + \vec{0} = \vec{0} + m_b \vec{v}_1 + m_b \vec{v}_2$

projection sur (Ox) $MV = 2 m_b v \cos\alpha$ (1)

Conserva° E_c $\frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} m_b v^2 + \frac{1}{2} m_b v^2 = m_b v^2$ (2)

(1) au carré $M^2 V^2 = 4 m_b^2 v^2 \cos^2\alpha$

(2) $M V^2 = 2 m_b v^2$ (2) dans (1)

$M^2 V^2 = M . MV^2 = M . \cancel{2 m_b v^2} = 4 m_b^{\cancel{2}} \cancel{v^2} \cos^2\alpha$

$m_b = \dfrac{M}{2\cos^2\alpha}$

3-a Conservation de $\vec{p}$ (toujours valable)

$$mV = (m+m)v'' = 2mv'' \Rightarrow v'' = \frac{V}{2}.$$

b - Les frottements entre les palets dissipent de l'énergie $\Rightarrow$ non choc pas élastique

c - Avant $E_c = \frac{1}{2} m V^2$

Après $E_c = \frac{1}{2}(2m) v''^2 = \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{V}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} m V^2$

$$\Delta E_c = E_f - E_i = \frac{1}{4} m V^2 - \frac{1}{2} m V^2 = -\frac{1}{4} m V^2$$

d force de frottements $F_F = \mu_c R = \mu_c m g$

$$W_F = \int_{dépl} \vec{F_F} \cdot \vec{r} = -\mu_c m g d = \Delta E_c = -\frac{1}{4} m V^2$$

$$\mu_c = \frac{V^2}{4gd}$$