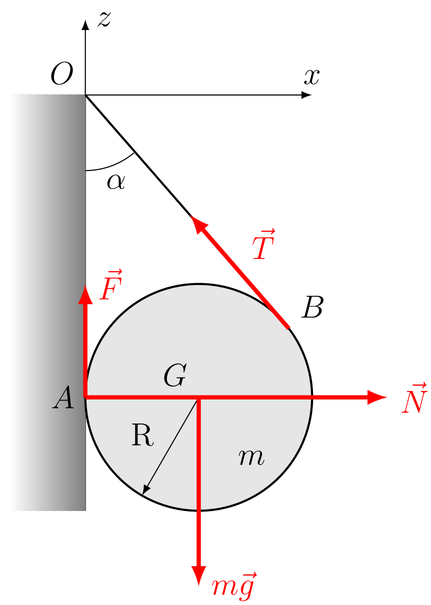
Physique générale I **Section MA**

15 décembre 2021 *version 1*

Corrigé du Minitest 5

Roue et fil (18 points)

a) (9 points au total)



Les forces qui s'appliquent sur la roue sont :

— le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\hat{e}_z$, vertical vers le bas, appliqué au centre de masse;

— la force de tension $\vec{T} = -T\sin\alpha\,\hat{e}_x + T\cos\alpha\,\hat{e}_z$ dans le fil, tangente à la roue, appliquée au point B du dessin;

— la force de liaison $\vec{N} = N\,\hat{e}_x$ normale au mur, appliquée au point de contact avec le mur;

— la force de frottement du mur sur la roue $\vec{F} = F_z\,\hat{e}_z$, appliquée au point de contact avec la mur.

| 1 point pour le dessin des 4 forces |A

Enlever le point si une force manque. Enlever le point pour une direction incorrecte (mais accepter $\vec{F}$ vers le bas). Enlever le point si un point d'application est incorrect.

On choisi un repère cartésien avec comme origine le point d'attache du fil sur le mur. Dans le cas statique, le théorème du centre de masse revient à écrire

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F} = 0\,, \quad \boxed{\text{1 point}}_{\,\mathrm{B}} \tag{1}$$

ou en projections $\boxed{\text{2 points , dont un pour l'expression correcte de } \vec{T}}_{\,\mathrm{C,D}}$

$$N - T\sin\alpha = 0\,, \tag{2}$$

$$T\cos\alpha + F_z - mg = 0\,, \tag{3}$$

et le théorème du moment cinétique à

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M} = 0\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\,\mathrm{E}} \tag{4}$$

Les moments peuvent être calculés par rapport au centre de masse G

$$\sum \vec{M}_G = \overrightarrow{GA} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{GB} \wedge \vec{T} = (RF_z - RT)\,\hat{e}_y = 0\,, \quad \boxed{\text{1 point}}_{\,\mathrm{F}} \tag{5}$$

d'où l'on trouve que

$$F_z = T\,. \tag{6}$$

En combinant les équations (2) et (6), on obtient que

$$N = F_z \sin\alpha\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{G}} \tag{7}$$

Remarque : on peut également obtenir cette dernière équation en combinant d'abord les équations (2), (3) et (6) pour trouver

$$N = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} mg \qquad \text{et} \qquad F_z = \frac{mg}{1+\cos\alpha}\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{G}} \tag{8}$$

La condition de frottement statique est $|F_z| \leq \mu_\text{s}|N_z|$ $\boxed{\text{1 point}}_{\text{H}}$, qui implique que

$$F_z \leq \mu_\text{s}\, F_z \sin\alpha \;\Rightarrow\; \sin\alpha \geq \frac{1}{\mu_\text{s}}\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{I}} \tag{9}$$

<u>Solutions alternatives :</u> Les moments peuvent être calculés par rapport au point de contact A de la roue avec le mur,

$$\sum \vec{M}_A = \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T} = (Rmg + z_G \sin\alpha T)\,\hat{e}_y = 0\,, \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{F}} \tag{10}$$

ou par rapport au point d'attache O du fil sur le mur,

$$\sum \vec{M}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{N} = (Rmg + z_G N)\,\hat{e}_y = 0\,, \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{F}} \tag{11}$$

où l'on a utilisé la coordonnée z_G du centre de masse. Par arguments géométriques, on voit que

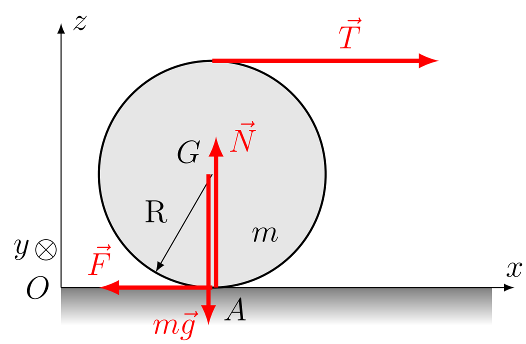
$$\tan(\alpha/2) = \sin\alpha/(1+\cos\alpha) = -R/z_G\,. \tag{12}$$

En combinant ces équations avec les équations (2) et (3), on retrouve les expressions pour N et F_z de l'équation (8).

b) (9 points au total)

Les forces qui s'appliquent sur la roue sont :

- le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\hat{e}_z$, vertical vers le bas,
- la force de tension $\vec{T} = T\,\hat{e}_x$ dans le fil,
- la force de liaison $\vec{N} = N_z\,\hat{e}_z$ avec le sol,
- la force de frottement du sol sur la roue $\vec{F} = F_x\,\hat{e}_x$. La direction de $\vec{F}$ est à priori inconnue : la composante F_x peut donc être positive ou négative.



On choisi un repère cartésien $Oxyz$ pour écrire les équations du mouvement, qui sont données par les théorèmes du centre de masse $\boxed{\text{1 point}}_{\text{J}}$ et du moment cinétique $\boxed{\text{1 point}}_{\text{K}}$. Puisque toutes les forces sont représentés par des vecteurs dans le plan vertical Oxz, on peut se restreindre à étudier le mouvement dans ce plan. La somme des moments des forces est parallèle à l'axe y et la rotation de la roue est donnée par le vecteur $\vec{\omega} = \omega\,\hat{e}_y$. La donnée du problème implique aussi que l'accélération du centre de masse n'a pas de composante vertical ($\ddot{z}_G = 0$). Le théorème du centre de masse s'écrit alors

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_G &= T + F_x\,, \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{L}} && (13)\\ (m\ddot{z}_G =)\; 0 &= N_z - mg \;\Rightarrow\; N_z = mg, && (14) \end{aligned}$$

Puisque le roulement est sans glissement, le point de contact A de la roue sur le sol a une vitesse nulle, et la vitesse du centre de masse vaut donc

$$\vec{v}_G = \underbrace{\vec{v}_A}_{=0} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG} = \omega\,\hat{e}_y \wedge R\,\hat{e}_z = \omega R\,\hat{e}_x \;\Rightarrow\; \dot{x}_G = \omega R\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{M}} \tag{15}$$

Le théorème du moment cinétique par rapport au centre de masse s'écrit $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \sum \vec{M}_G^{\text{ext}}$. Le moment cinétique est donné par

$$\vec{L}_G = I_G \vec{\omega} = I_G \omega\,\hat{e}_y\,, \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{N}} \tag{16}$$

et la somme des moments vaut

$$\sum \vec{M}_G^{\text{ext}} = R\,\hat{e}_z \wedge T\,\hat{e}_x + R(-\hat{e}_z) \wedge F_x\,\hat{e}_x \tag{17}$$

$$= (RT - RF_x)\,\hat{e}_y\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{O}} \tag{18}$$

Le théorème du moment cinétique se ramène donc à sa projection sur l'axe y, et en utilisant l'équation (15) on obtient

$$(I_G\dot{\omega} =)\ \frac{I_G}{R}\ddot{x}_G = RT - RF_x\,. \tag{19}$$

En combinant les équations (13) et (19), on obtient l'accélération du centre de masse

$$\ddot{x}_G = \frac{2T}{\frac{I_G}{R^2} + m}\,, \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{P}} \tag{20}$$

et la (norme de la) force de frottement

$$(|F| =)\ F_x = \frac{mR^2 - I_G}{mR^2 + I_G} T\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{Q}} \tag{21}$$

Pour la roue pleine, $I_G = \frac{1}{2}mR^2$, et la force de frottement vaut $F_x = T/3$ et pour la roue vide, $I_G = mR^2$, et la force de frottement vaut $F_x = 0$. $\boxed{\text{1 point pour les deux résultats}}_{\mathrm{R}}$

Solution alternative (I) : On peut aussi appliquer le théorème du moment cinétique par rapport au point de contact A de la roue avec le sol. Par le théorème de Steiner, $I_A = I_G + mR^2$, et donc $\vec{L}_G = I_A\vec{\omega} = (I_G + mR^2)\omega\,\hat{e}_y$ $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{N}}$. Seule la tension dans le fil a un moment non nul, et $\sum \vec{M}_A^{\text{ext}} = 2RT\,\hat{e}_y$ $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{O}}$. Le théorème du moment cinétique selon y devient $(I_G + mR^2)\ddot{x}_G = 2R^2T$, d'où l'on obtient directement la solution pour $\ddot{x}_G$, Eq. (20). Puis, par substitution dans l'équation (13) on trouve F_x.

Solution alternative (II) : Si l'origine O du repère est utilisée comme point de référence, les moments du poids et de la force de liaison sont non nul, mais leurs contributions s'annulent par l'équation (14). On revient alors à la solution alternative (I).