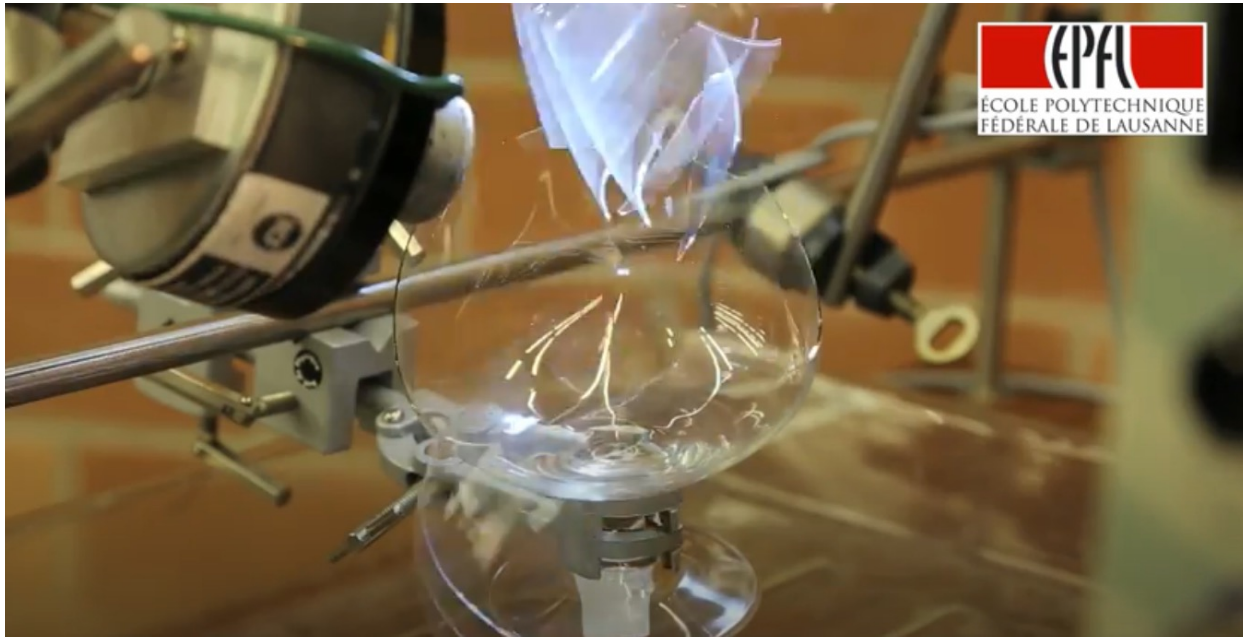
Week 9 – Part 1

9. L'oscillateur harmonique linéaire

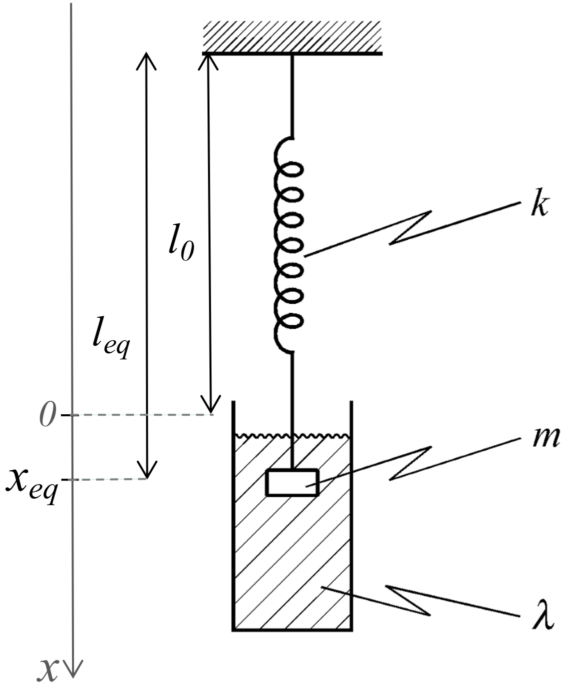
9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

9.6. Oscillateur forcé



9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

■ Ressort plongeant dans un liquide avec gravitation et poussée d'Archimède



La force de rappel du ressort : $\vec{F} = -k\vec{r}$ avec $\vec{r} = (l - l_0)\vec{e_x} = x\vec{e_x}$

La force de frottement fluide en régime laminaire : $\vec{F_f} = -K\eta\vec{v}$

La poussée d'Archimède : $\vec{F_A} = -\rho V\vec{g} = -M\vec{g}$

Le poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

Position d'équilibre :

2nd loi de Newton : *masse immobile* $\Rightarrow$ $a=0$ *et* $v=0$

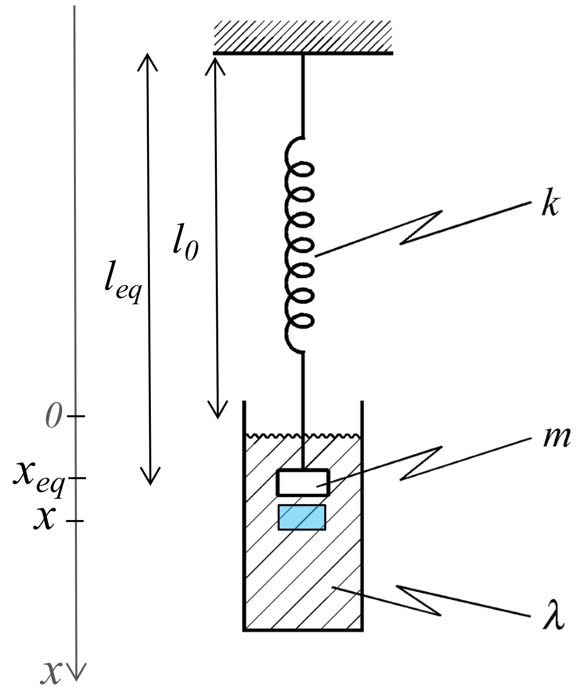
$$\vec{0} = -k\vec{r} - M\vec{g} + m\,\vec{g}$$

On projette sur Ox : $0 = -k\,(l_{eq} - l_0) - Mg + mg$

$$l_{eq} = l_0 + \frac{m-M}{k}g \quad et \quad x_{eq} = l_{eq} - l_0 = \frac{m-M}{k}g$$

9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

■ Ressort plongeant dans un liquide avec gravitation et poussée d'Archimède



Equation du mouvement :

2nd loi de Newton : $m\vec{a} = -k\vec{r} - K\eta\vec{v} - M\vec{g} + m\vec{g}$

On projette sur Ox : $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx - K\eta\dfrac{dx}{dt} - Mg + mg$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\, x + 2\lambda\frac{dx}{dt} = \frac{m-M}{m}g \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{K\eta}{2m} \\ \omega_0 = \sqrt{k/m} \end{cases}$$

Equation différentielle du 2ème ordre avec 2nd membre :

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = d \quad \text{avec} \quad a, b, c, d = cte$$

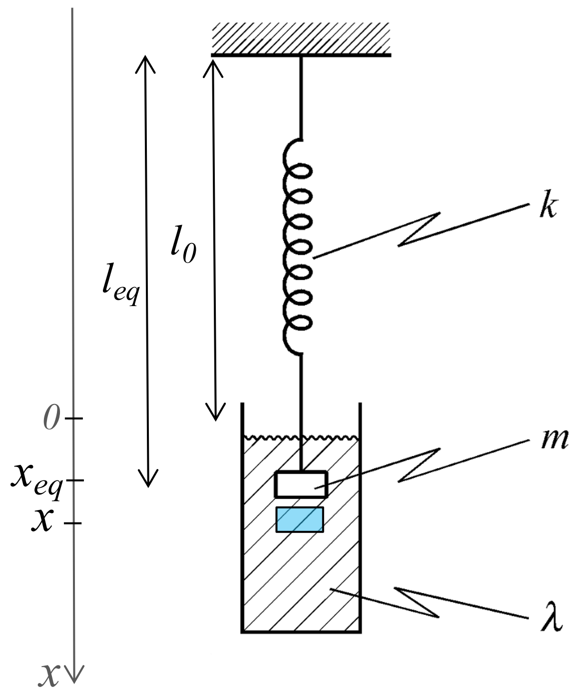
Solution : $y = \boxed{y_p} + \boxed{y_g}$

solution particulière

solution générale de l'équation différentielle sans second membre

9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

■ Ressort plongeant dans un liquide avec gravitation et poussée d'Archimède



Equation différentielle sans second membre : $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Solution générale : $$x(t) = e^{-\lambda t}\left(A_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}t} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}t}\right)$$

Equation différentielle du mouvement avec 2nd membre :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\, x + 2\lambda\frac{dx}{dt} = \frac{m-M}{m}g$$

Solution particulière :

$$pour\ t \to \infty,\ masse\ immobile\ et\ x(t \to \infty) = \frac{m-M}{k}g = x_{eq}$$

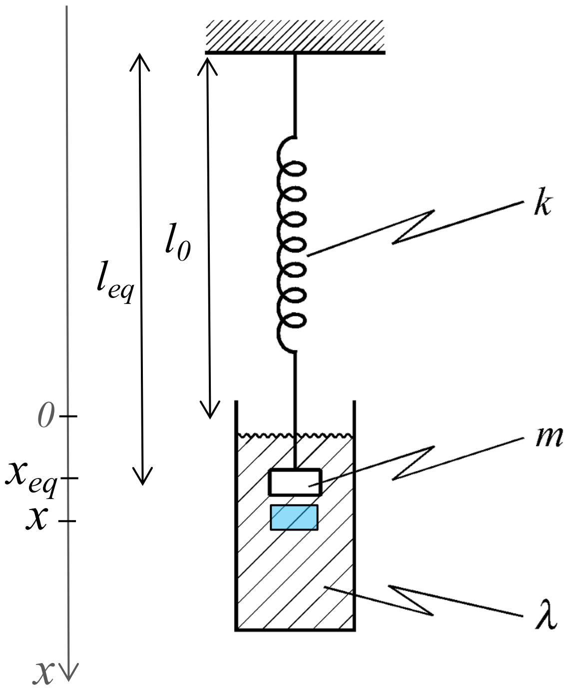
Solution de l'équation du mouvement :

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(A_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}t} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}t}\right) + x_{eq}$$

9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

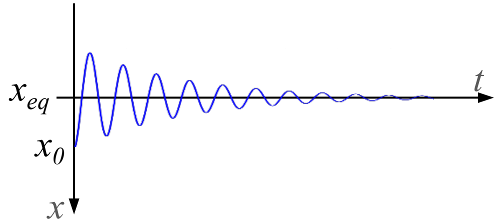
■ Ressort plongeant dans un liquide avec gravitation et poussée d'Archimède

Solution de l'équation du mouvement : $x(t) = e^{-\lambda t}\left(A_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t}\right) + x_{eq}$



Si $\lambda < \omega_0$ alors la solution devient : $x(t) = A\,e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\phi) + x_{eq}$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

On tire sur la masse et on la lâche de la position x_0 sans vitesse initiale :



Conditions initiales à $t=0$: $x(0)=x_0$ et $v(0)=0$

$x(0)=x_0 \Rightarrow A\cos(\omega.0+\phi) + x_{eq} = x_0$ d'où $A = \dfrac{x_0 - x_{eq}}{\cos\phi}$

$v(0)=0 \Rightarrow A(-\lambda)e^{-\lambda.0}\cos(\omega.0+\phi) - Ae^{-\lambda.0}\,\omega\sin(\omega.0+\phi) = -\lambda A\cos\phi - A\omega\sin\phi = 0$

d'où $\tan\phi = \dfrac{-\lambda}{\omega}$

Solution complète : $\boxed{x(t) = \dfrac{x_0 - x_{eq}}{\cos\phi}\,e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\phi) + x_{eq}}$ avec $\phi = \arctan\dfrac{-\lambda}{\omega}$

Résumé : Oscillateur libre

Non amorti

Ressort + Masse

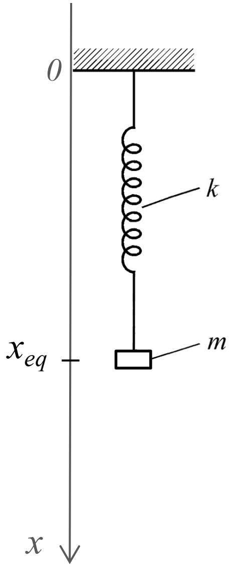
Equation du mouvement :

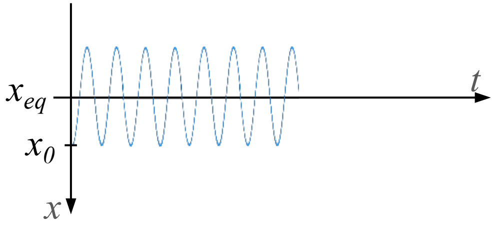
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = g \qquad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Les solutions sont de la forme :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) + x_{eq}$$

avec A *amplitude du mouvement*
ω_0 *pulsation propre de l'oscillateur*
ϕ *phase initiale (à* $t=0$*)*





Amorti

Ressort + Masse dans un fluide (sans poussée d'Archimède)

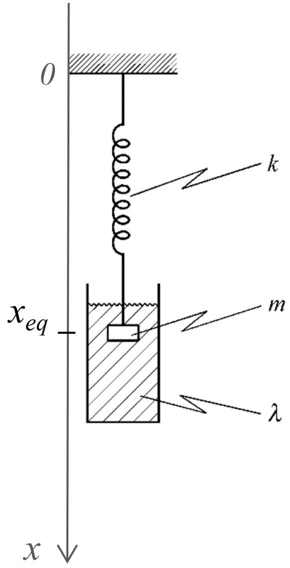
Equation du mouvement :

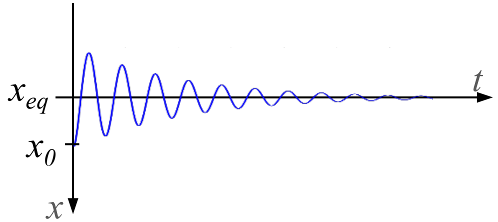
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\, x + 2\lambda\frac{dx}{dt} = g \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{K\eta}{2m} \\ \omega_0 = \sqrt{k/m} \end{cases}$$

Les solutions sont de la forme :

$$x(t) = A\, e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \phi) + x_{eq} \quad \text{avec } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

avec A *amplitude du mouvement*
ω *pulsation de l'oscillateur amorti*
ϕ *phase initiale (à* $t=0$*)*
λ *coefficient d'amortissement*



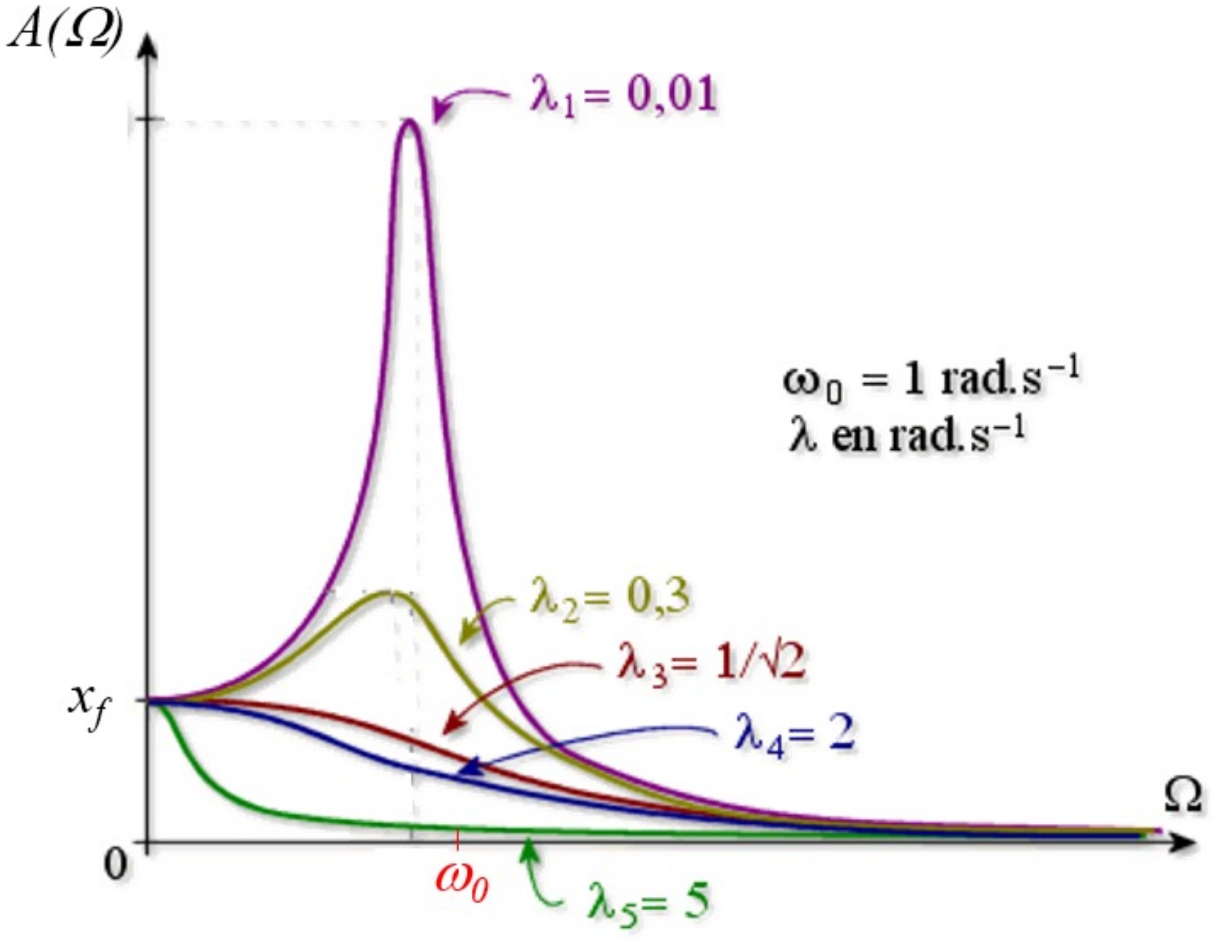


Si la pulsation est indépendante de l'amplitude ⇒ l'oscillateur est dit «harmonique»

Week 9 – Part 2

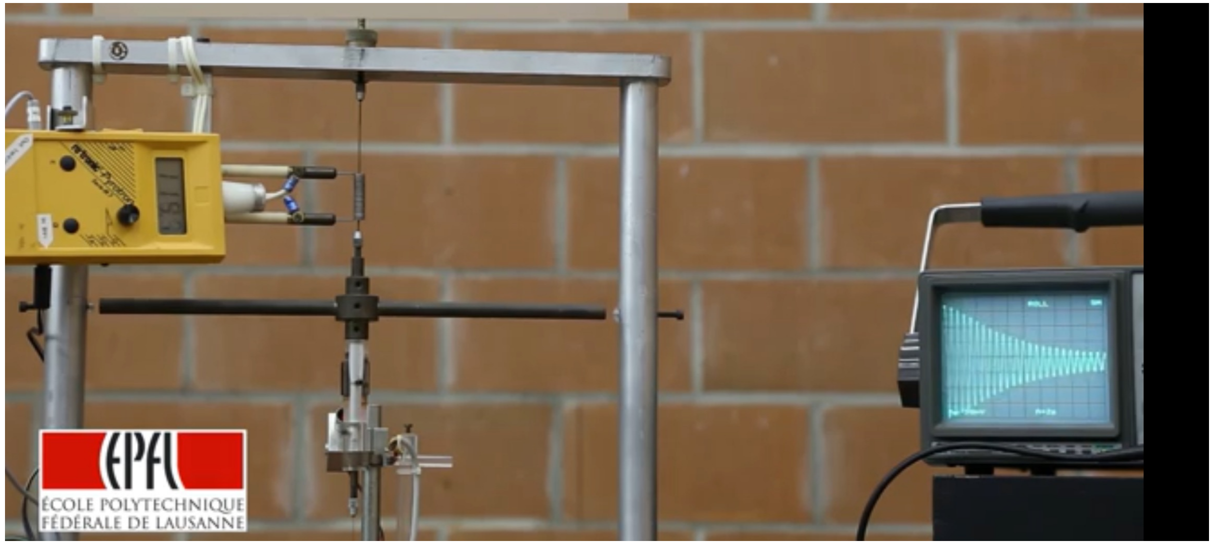
9. L'oscillateur harmonique linéaire

9.6. Oscillateur forcé



9.6. Oscillateur forcé

■ Introduction : entretien d’un oscillateur amorti



Un oscillateur amorti voit l’amplitude de ses oscillations diminuer. Ceci est la conséquence de la dissipation de l’énergie mécanique du système due au frottement fluide.

On rappelle en effet que si A est l’amplitude des oscillations, alors l’énergie mécanique de l’oscillateur est $\frac{1}{2}kA^2$

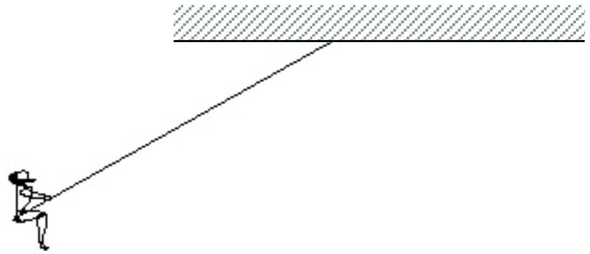
Un oscillateur a pulsation bien définie (base de temps) $\Rightarrow$ applications (horloge)

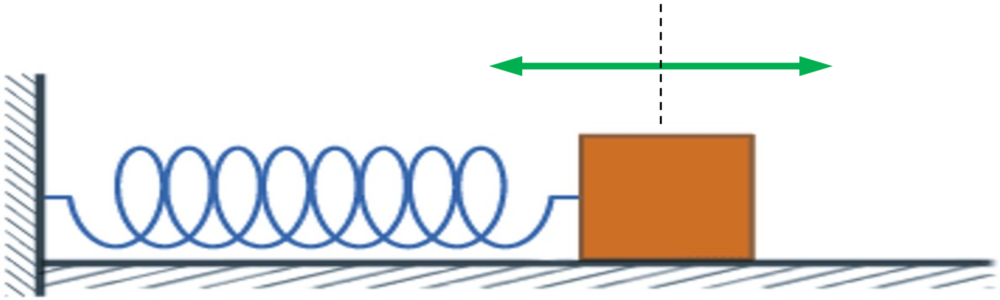
Comment éviter que l’oscillateur ne s’amortisse ? $\Rightarrow$ Apport d’énergie

9.6. Oscillateur forcé

■ Introduction : application d'une force périodique sur un oscillateur

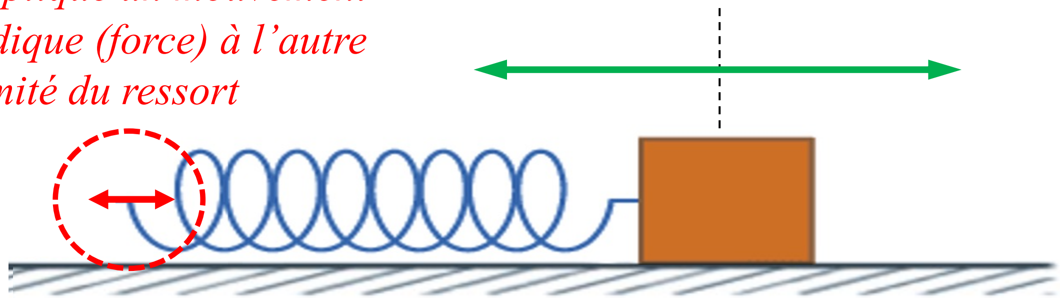
Se balancer sur une balançoire constitue un oscillateur forcé





Oscillateur libre

On applique un mouvement périodique (force) à l'autre extrémité du ressort



Oscillateur forcé

9.6. Oscillateur forcé

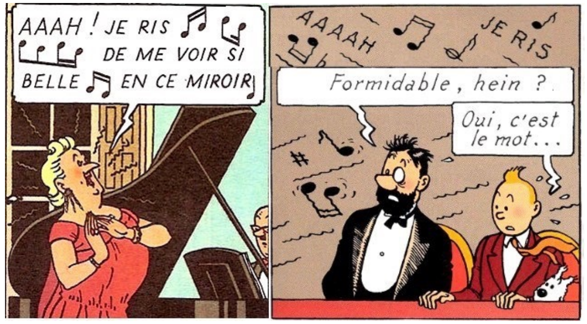
Oscillateur forcé : oscillateur soumis à une force externe périodique telle que cet oscillateur soit forcé à prendre la période de la source excitatrice.

Si l'amortissement est faible, et si cette période est proche de la période propre de l'oscillateur, alors un phénomène de résonance peut se produire.

Exemples d'oscillateurs forcés

- *Récepteur (radio et TV)*
- *Instruments de musique*
- *Analyse médicale (RMN)*
- *La voix*

⇨ *phénomène de « résonance »*
Pont de Tacoma (USA) en 1940
Phénomène d'aéroélasticité critique

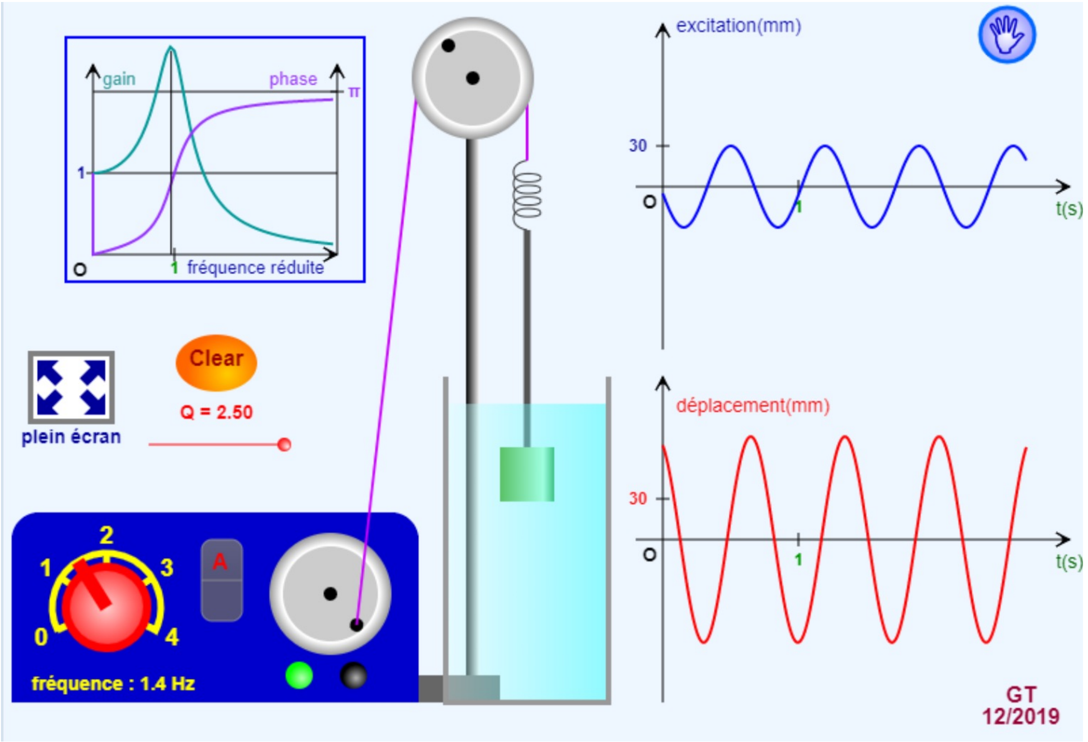


L'affaire Tournesol – Hergé (Casterman)

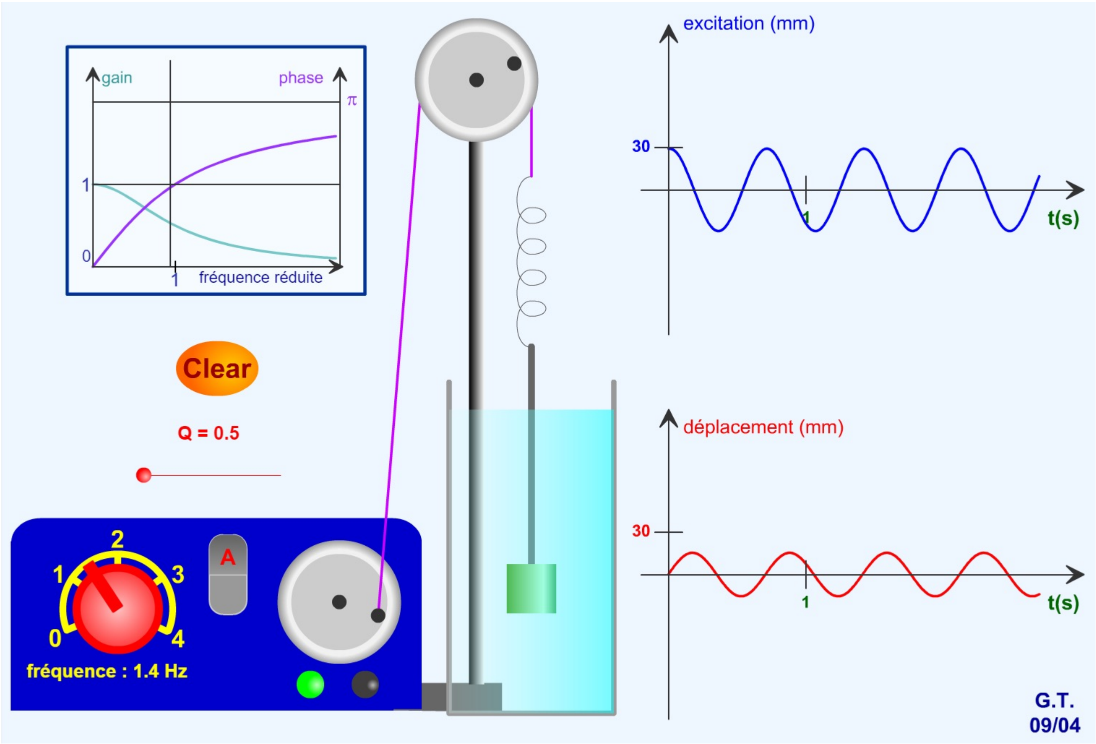
9.6. Oscillateur forcé

■ Oscillateur forcé avec frottement fluide : amortissement fort et faible

Amortissement faible



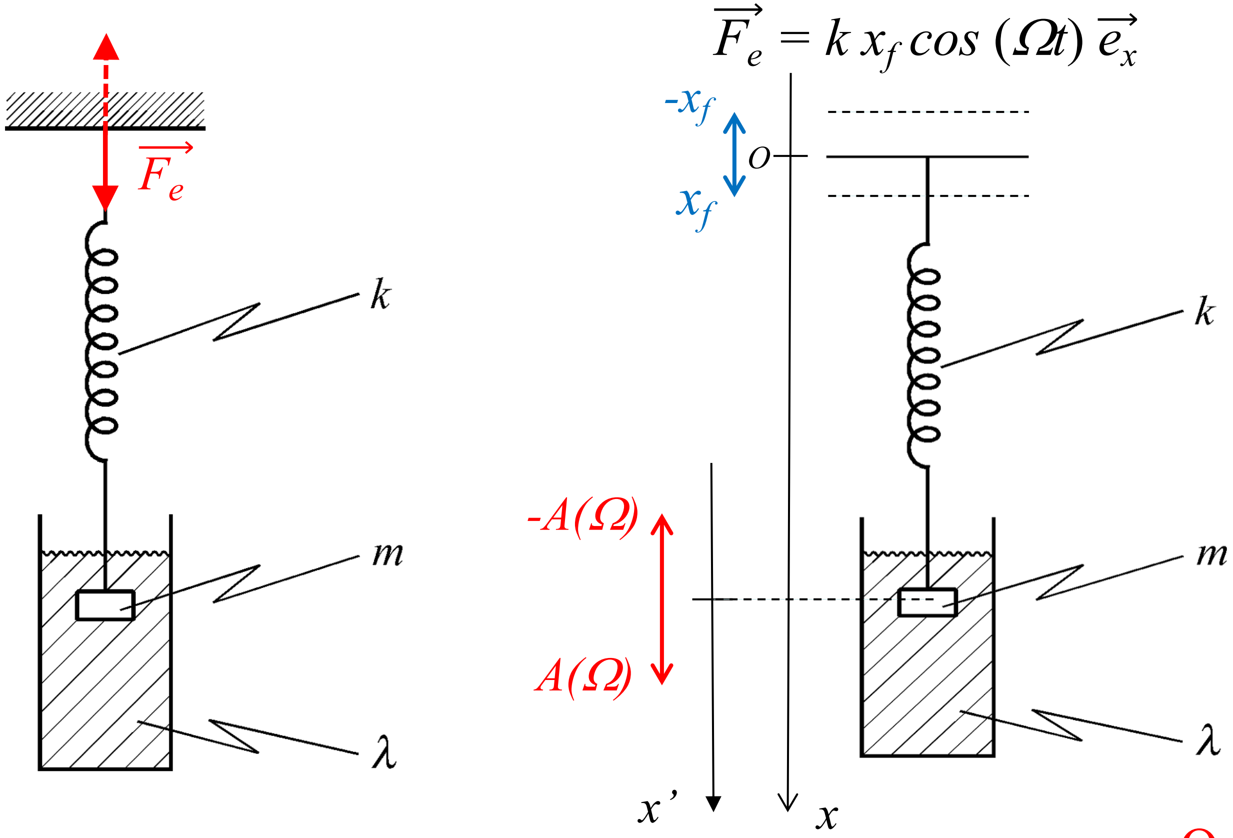
Amortissement fort



 http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.php?typanim=Flash

9.6. Oscillateur forcé

■ **On applique à un oscillateur amorti, soumis à une force de rappel et à une force de frottement, une <u>force extérieure oscillatoire de pulsation Ω</u>**



$\vec{F}_e = k\, x_f \cos(\Omega\, t)\, \vec{e}_x$ *force excitatrice*

avec x_f amplitude de la force excitatrice

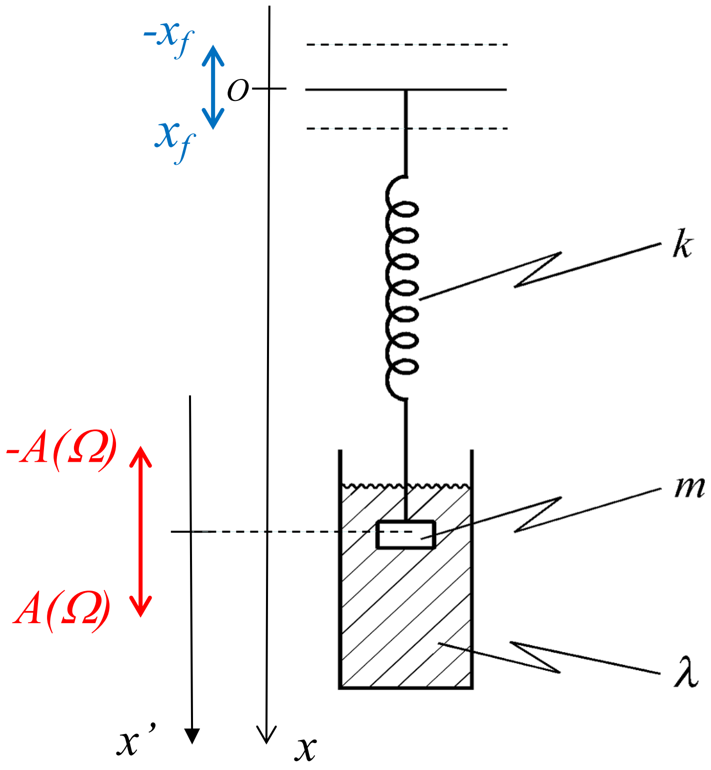
Ω pulsation de la force excitatrice

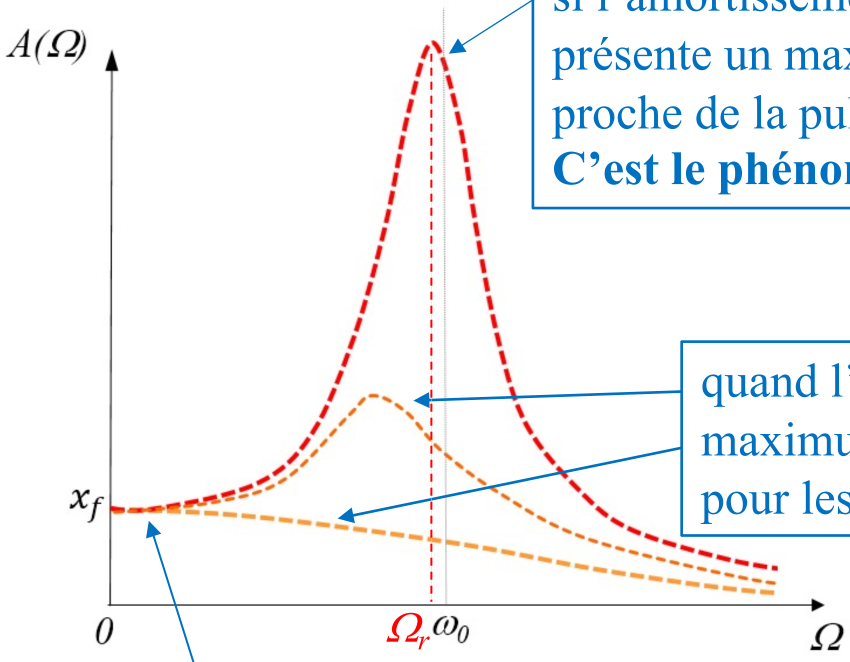
On cherche à calculer $A(\Omega)$ et le déphasage entre la force excitatrice F_e et la réponse de l'oscillateur

9.6. Oscillateur forcé

Que montre l'expérience au sujet de <u>l'évolution de l'amplitude A</u> de l'oscillateur forcé en fonction de la pulsation Ω :

$$\vec{F}_e = k\, x_f \cos(\Omega t)\, \vec{e}_x$$





si l'amortissement est faible (λ petit), l'amplitude présente un maximum très marqué pour une pulsation Ω_r proche de la pulsation de l'oscillateur libre ω_0.
C'est le phénomène de résonance

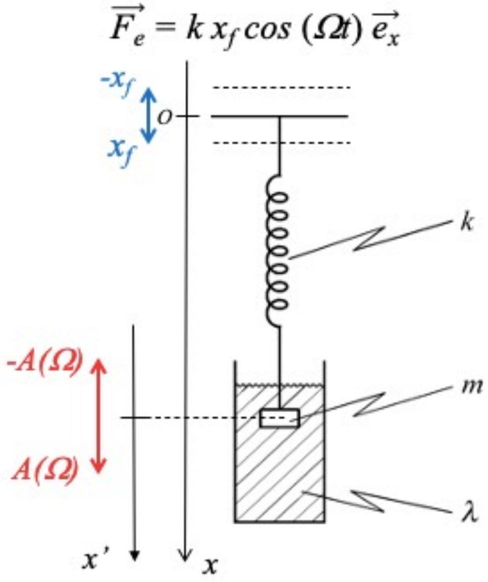
quand l'amortissement augmente (λ), le maximum diminue et finalement disparait pour les forts amortissements

si Ω est très petite, alors l'amplitude A est celle de la force excitatrice $A(\Omega) \approx x_f$

9.6. Oscillateur forcé

■ Equation du mouvement d'un oscillateur forcé amorti avec force de frottement fluide laminaire et force excitatrice $F_e = F_e \cos(\Omega t)\, e_x$

2nd loi de Newton avec projection sur Ox :



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{ext} = mg - k(l - l_0) - K\eta\frac{dx}{dt} + F_e \cos(\Omega t)$$

poids — *Force de rappel du ressort* — *Force de frottement fluide* — *Force excitatrice appliquée au ressort avec une pulsation Ω*

avec x défini par rapport à la position d'équilibre (ressort au repos, $ma = 0$)

$x = l - l_{eq}$ et $l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$ d'où $l - l_0 = x + \frac{mg}{k}$

soit $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - K\eta\frac{dx}{dt} + F_e \cos(\Omega t)$

Equation du mouvement :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f\cos(\Omega t)}$$

avec $\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{k/m} & \textit{Pulsation propre du ressort libre} \\ \lambda = \dfrac{K\eta}{2m} \\ f = \dfrac{F_e}{m} = \dfrac{kx_f}{m} \end{cases}$

9.6. Oscillateur forcé

■ Equation du mouvement d'un oscillateur forcé amorti avec force de frottement fluide laminaire et force excitatrice $\boldsymbol{F_e} = F_e \cos(\Omega t)\, \boldsymbol{e_x}$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x} = \boxed{f\cos(\Omega t)}$$

Equation différentielle de l'oscillateur amorti

Force excitatrice

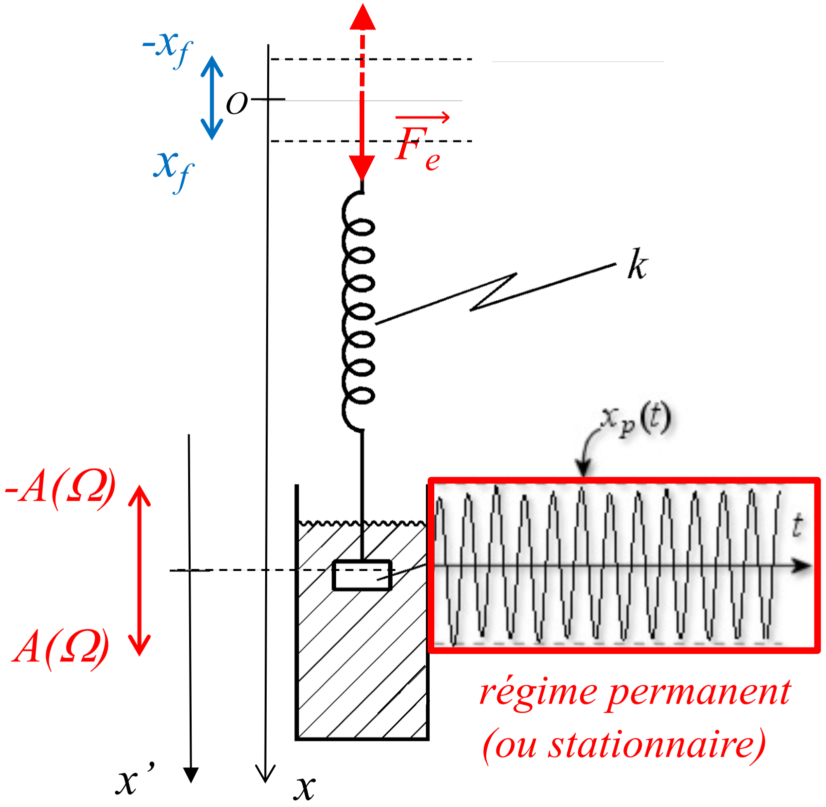
Comment l'oscillateur se comporte-t-il sous l'effet de la force excitatrice?

9.6. Oscillateur forcé

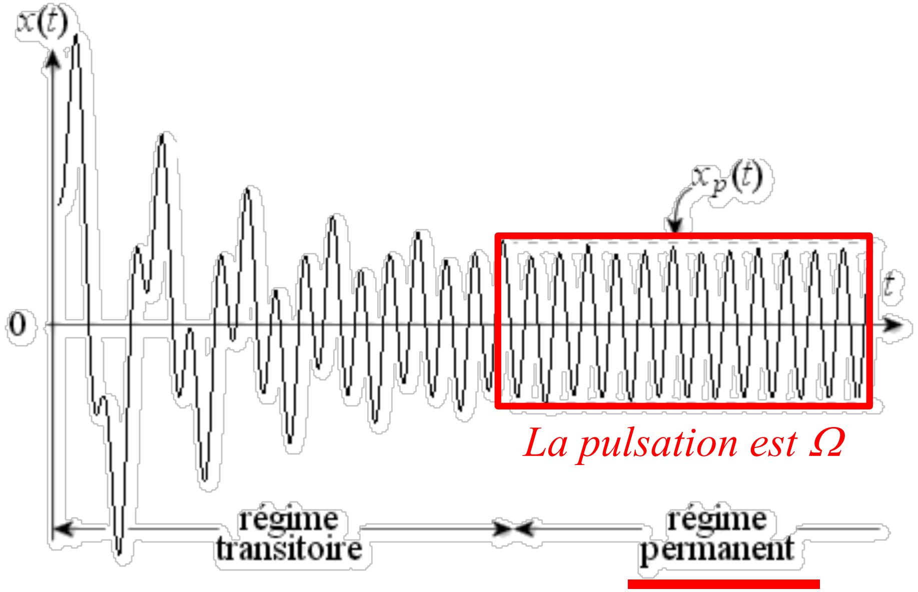
Evolution du mouvement de $t=0$ pour un oscillateur forcé faiblement amorti

Quand on commence à exciter le ressort ($t=0$), l'oscillateur a un mouvement qui semble "chaotique". Puis son mouvement se rapproche d'un mouvement oscillatoire pour finalement se stabiliser dans un régime parfaitement oscillatoire avec une pulsation Ω qui est celle de la force excitatrice. L'expérience montre que l'amplitude des oscillations dépend alors de Ω. Ce régime "stable" est appelé régime **permanent** ou **stationnaire**.

$\vec{F_e} = F_e \cos(\Omega t)\, \vec{e_x}$ *force excitatrice*



régime permanent (ou stationnaire)



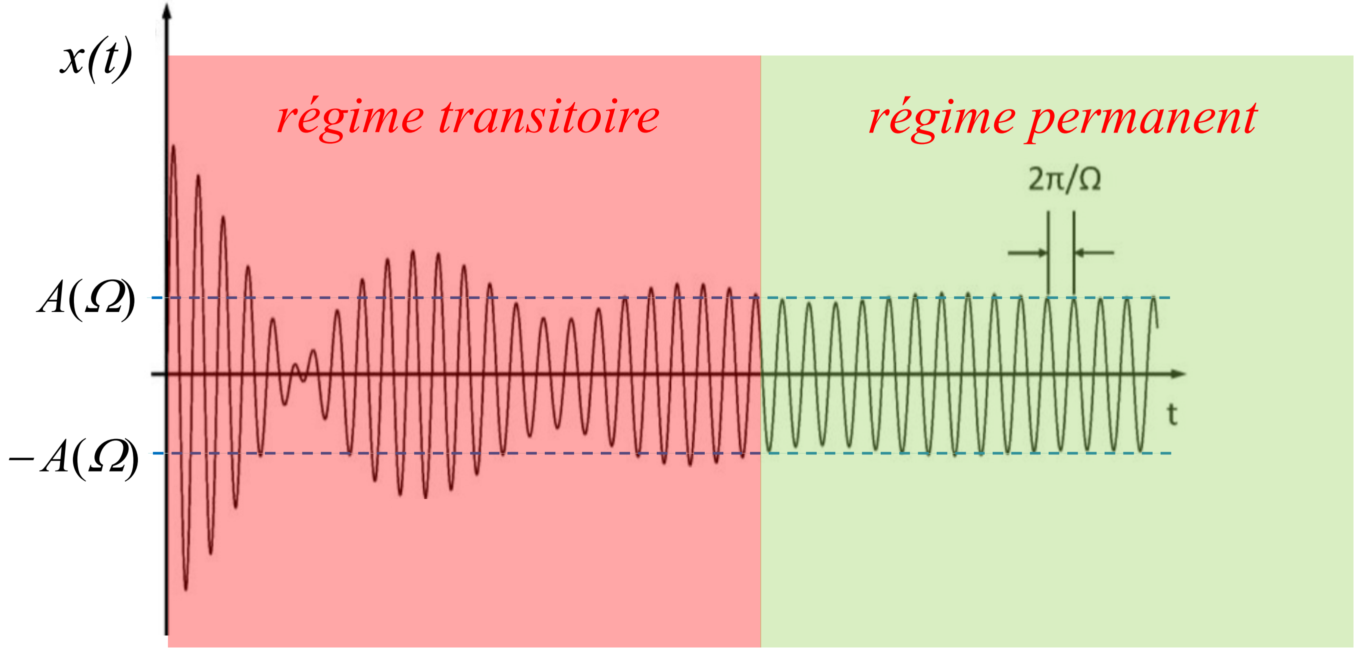
La pulsation est Ω

***Régime permanent (stationnaire)** : le mouvement de l'oscillateur forcé amorti est alors celui d'un oscillateur harmonique de pulsation égale à la pulsation Ω de l'excitation.*

Seul le régime permanent sera étudié dans le cours

9.6 Oscillateur forcé

Evolution de la réponse de l'oscillateur à partir de $t=0$



Forme des solutions : $x(t)$ = *Mouvement permanent* + *Mouvement transitoire*

$$\boxed{A(\Omega)\cos(\Omega t+\psi)}$$

$$\begin{array}{lll}
C\mathrm{e}^{-\lambda t}\cos(\omega t-\phi) & \text{si}\quad \lambda^2<\omega_0^2 & \text{amort. faible}\\
\mathrm{e}^{-\lambda t}(C_1+C_2 t) & \text{si}\quad \lambda^2=\omega_0^2 & \text{amort. critique}\\
\mathrm{e}^{-\lambda t}(C_1\mathrm{e}^{\omega t}+C_2\mathrm{e}^{-\omega t}) & \text{si}\quad \lambda^2>\omega_0^2 & \text{amort. fort}
\end{array}$$

le terme en $e^{-\lambda t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$

9.6 Oscillateur forcé

Forme des solutions en régime permanent

$$\boxed{x(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t + \Psi(\Omega))}$$

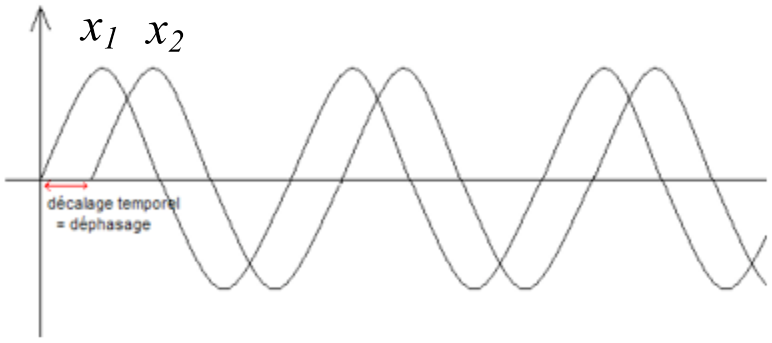
Caractéristiques du mouvement :

- la pulsation de l'oscillateur forcé est celle de la force excitatrice Ω
- l'amplitude $A(\Omega)$ dépend de la pulsation Ω de la force excitatrice
- Le mouvement de l'oscillateur est déphasé de ψ par rapport à l'excitation
- Le déphasage ψ dépend de la pulsation Ω

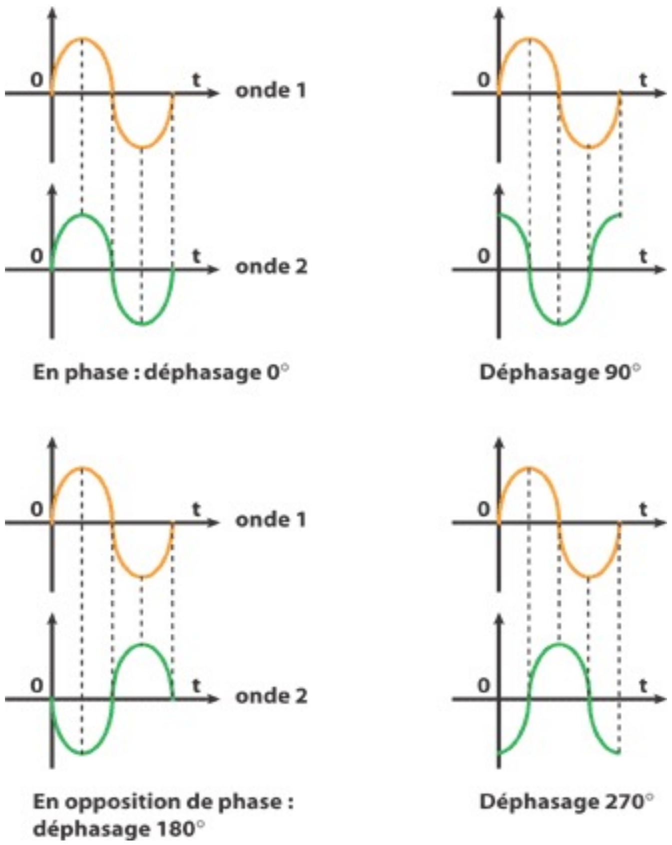
 http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.php?typanim=Flash

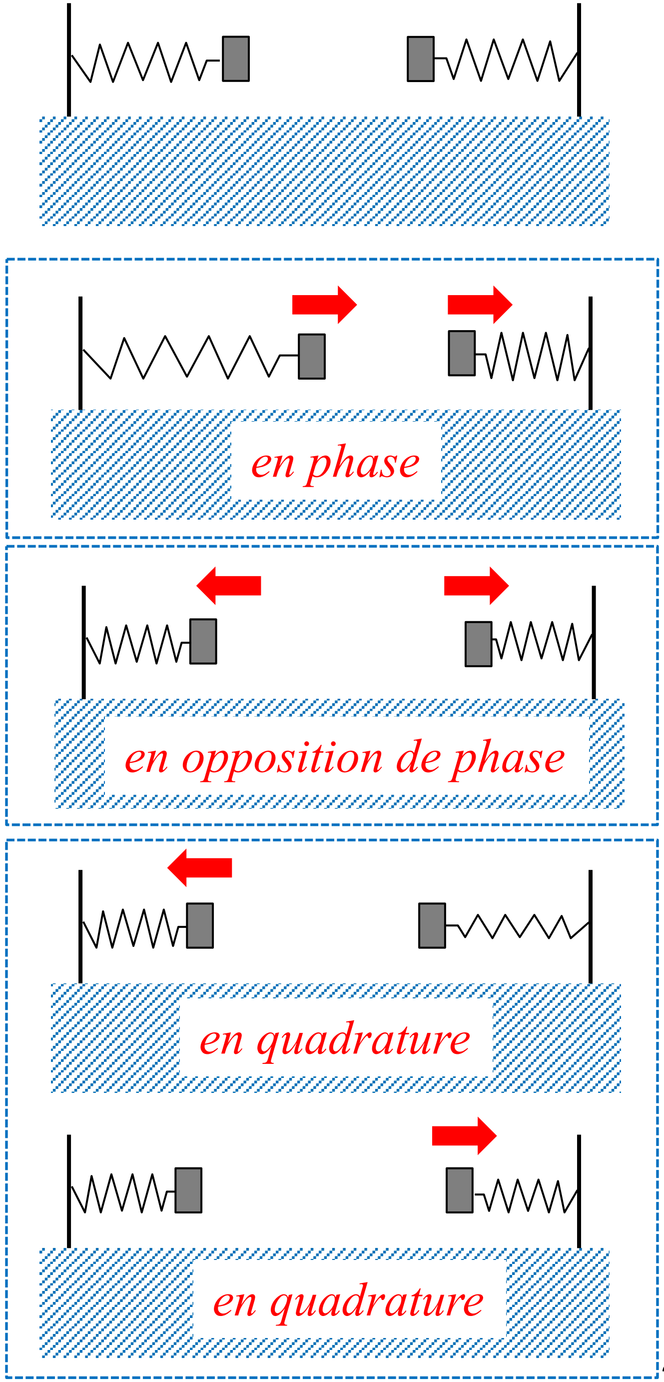
9.6. Oscillateur forcé

■ Le déphasage



$$x_1 = A\ \sin(\Omega t)$$
$$x_2 = A\ \sin(\Omega t + \psi)$$





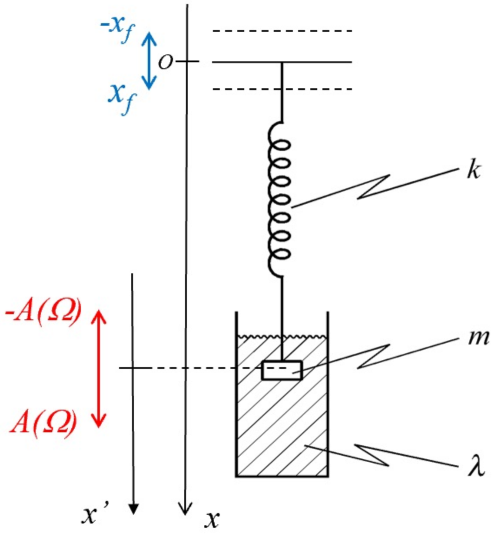
$\psi = 0 \quad l'oscillateur\ et\ la\ force\ sont\ en\ phase$

$\psi = \pm\pi \quad l'oscillateur\ et\ la\ force\ sont\ en\ opposition\ de\ phase$

$\psi = \pm\dfrac{\pi}{2} \quad l'oscillateur\ et\ la\ force\ sont\ en\ quadrature$

9.6. Oscillateur forcé

■ Résolution de l'équation différentielle par les complexes



Equation du mouvement de l'oscillateur forcé soumis à une force excitatrice $\boldsymbol{F_e} = F_e \cos(\Omega t)\, \boldsymbol{e_x}$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f\cos(\Omega t) \quad avec\ f = \frac{kx_f}{m}$$

Equation différentielle en notation complexe :

$$\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} + 2\lambda\frac{d\underline{x}}{dt} + \omega_0^2\underline{x} = f e^{i\Omega t} = \underline{f} \quad avec\ \ \underline{x}\ et\ \underline{f}\ des\ complexes$$

La solution stationnaire (régime permanent) est un mouvement sinusoïdal de pulsation Ω et d'amplitude A (dépendant de Ω). Ce mouvement oscillatoire est déphasé de ψ par rapport à la force excitatrice. La forme générale de la solution s'écrit :

$$\underline{x}(t) = \underline{x_0}e^{i\Omega t} \quad avec\ \underline{x_0} = A(\Omega)e^{i\psi(\Omega)}$$

$$\underline{x}(t) = \underbrace{\boxed{A(\Omega)}}_{\text{amplitude}}\ \underbrace{\boxed{e^{i\Psi(\Omega)}}}_{\text{déphasage}}\ \underbrace{\boxed{e^{i\Omega t}}}_{\text{pulsation}}$$

Hors programme

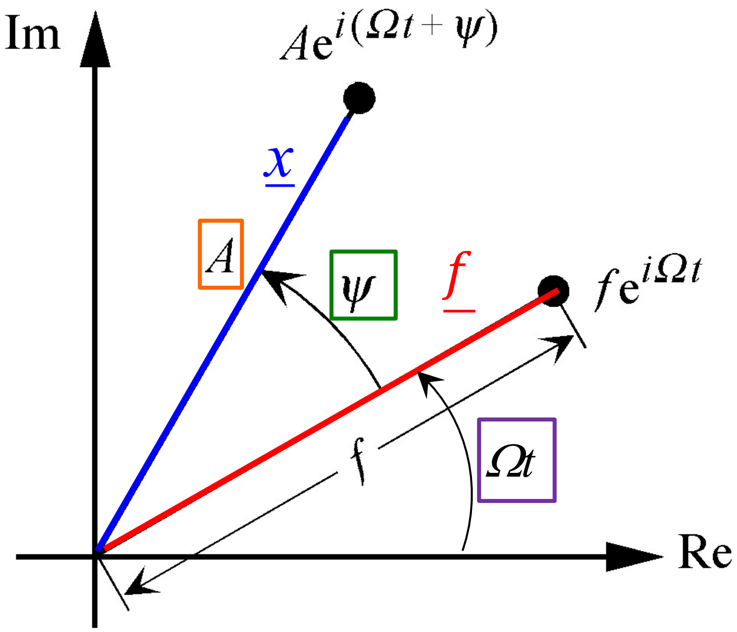
9.6. Oscillateur forcé

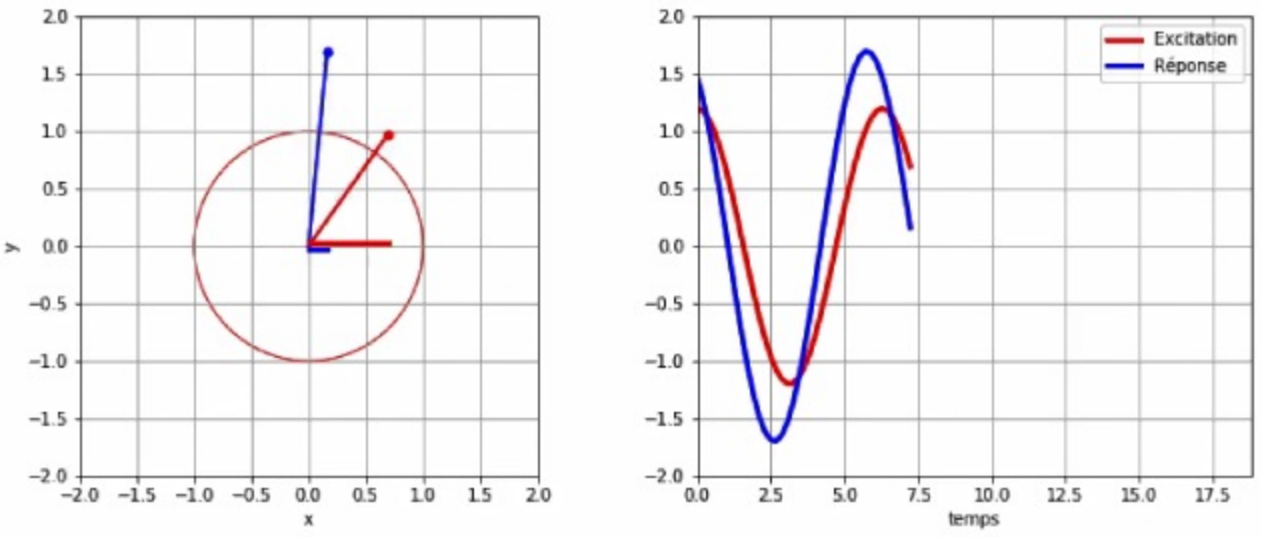
amplitude *déphasage* *pulsation*

$$\boxed{\underline{x}(t)} = \boxed{A(\Omega)}\,\boxed{e^{i\Psi(\Omega)}}\,\boxed{e^{i\Omega t}}$$

$A(\Omega)$ est l'amplitude réelle du mouvement oscillatoire forcé. Elle dépend de la pulsation de la force appliquée à l'oscillateur. Le mouvement de la masse m est déphasé de ψ par rapport au mouvement de la force excitatrice.

On peut représenter $\underline{x}$ et $\underline{f}$ dans le plan complexe :





Hors programme

9.6. Oscillateur forcé

■ Calcul de *A(Ω) et Ψ(Ω)*

On injecte $\underline{x}(t) = \underbrace{A(\Omega)e^{i\psi(\Omega)}}_{\underline{x}_0} e^{i\Omega t}$ *dans* $\dfrac{d^2\underline{x}}{dt^2} + 2\lambda\dfrac{d\underline{x}}{dt} + \omega_0^2\underline{x} = f e^{i\Omega t}$

Nous obtenons $(-\Omega^2 + i2\lambda\Omega + \omega_0^2)\underline{x}_0 e^{i\Omega t} = f e^{i\Omega t}$ *soit* $\boxed{\underline{x}_0 = \dfrac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\lambda\Omega}}$ *nombre complexe de la forme* $\frac{1}{a+ib}$

or)* $\dfrac{1}{a+ib} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2}$ *d'où* $\boxed{\underline{x}_0 = \dfrac{(\omega_0^2 - \Omega^2)f}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2} - i\,\dfrac{2\lambda\Omega f}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$

$\underline{x}_0$ est un nombre complexe, qui contient à la fois l'amplitude réelle $A(\Omega)$ et le déphasage $\psi(\Omega)$ du mouvement de la masse m par rapport à la force excitatrice

Les parties réelle et imaginaire de $\underline{x}_0$ *sont* $\Re(\underline{x}_0) = f\dfrac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}$ $\Im(\underline{x}_0) = f\dfrac{-2\lambda\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}$

$$\boxed{A(\Omega) = \left\|\underline{x}_0\right\| = \sqrt{\Re^2(\underline{x}_0) + \Im^2(\underline{x}_0)} = \sqrt{\underline{x}_0\underline{x}_0^*}}$$

$$\boxed{\tan\psi(\Omega) = \frac{\Im(\underline{x}_0)}{\Re(\underline{x}_0)} = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}}$$

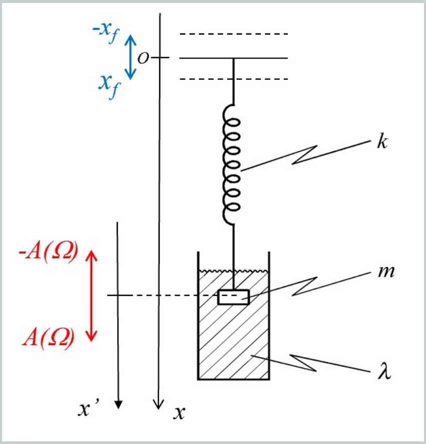
*) $\frac{1}{a+ib} \times \frac{1}{a-ib} = \frac{1}{a^2 - i^2b^2} = \frac{1}{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$

Hors programme

9.6. Oscillateur forcé

Forme des solutions en régime permanent

Oscillateur forcé soumis à une force excitatrice $\boldsymbol{F_e} = F_e \cos(\Omega t)\, \boldsymbol{e_x}$



$$\boxed{x(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t + \Psi(\Omega))}$$

Amplitude A(Ω)

avec $f = \frac{k x_f}{m}$

$$\boxed{A(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}} = x_f \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}}$$

Déphasage ψ(Ω)

$$\boxed{\psi(\Omega) = \arctan\frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}}$$

9.6. Oscillateur forcé

■ Pulsation de résonance Ω_r (amplitude maximum pour $\Omega = \Omega_r$)

$$\boxed{A(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}}$$

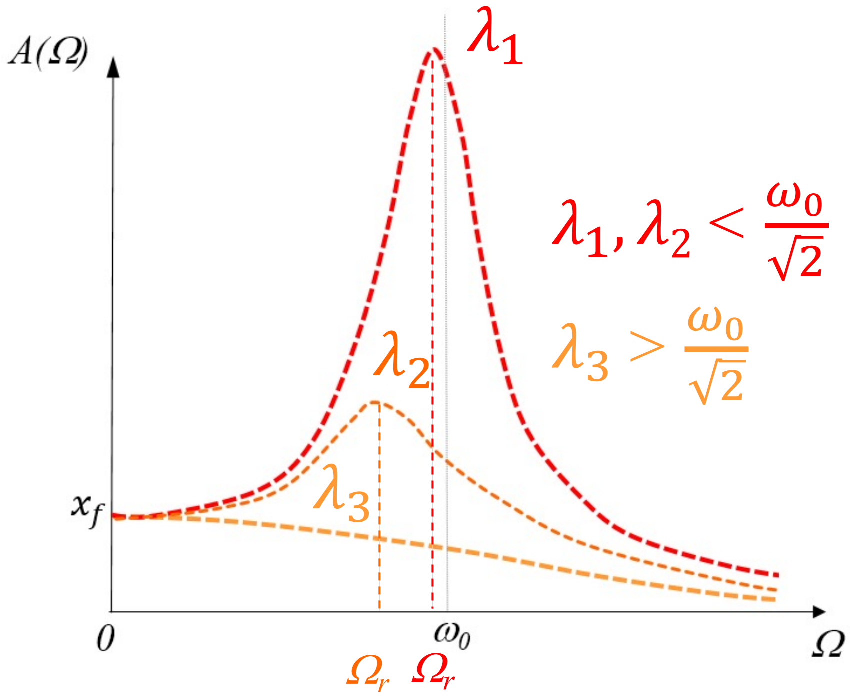
Maximum de la fonction $A(\Omega) \Rightarrow \frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = 0$

$$A(\Omega) = f(\omega_0^4 + \Omega^4 - 2\omega_0^2\Omega^2 + 4\lambda^2\Omega^2)^{-1/2}$$

$$\frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = 0 = f(4\Omega^3 - 4\omega_0^2\Omega + 8\lambda^2\Omega)(\omega_0^4 + \Omega^4 - 2\omega_0^2\Omega^2 + 4\lambda^2\Omega^2)^{-3/2}\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$soit \quad \Omega^2 - \omega_0^2 + 2\lambda^2 = 0$$

Finalement $$\boxed{\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}}$$ *Pulsation de résonance*



Remarque :

La résonance n'existe que pour $\omega_0^2 - 2\lambda^2 > 0$, *soit* $\lambda < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$

Si $\lambda \geq \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ *alors l'amortissement est trop fort et il n'y a plus de résonance. L'amplitude* $A(\Omega)$ *des oscillations de la masse est alors inférieure l'amplitude* x_f *de la force excitatrice.*

9.6. Oscillateur forcé

- **Pulsation de résonance Ω_r (amplitude maximum pour $\Omega = \Omega_r$)**

$$\boxed{\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}}$$

9.6. Oscillateur forcé

■ Pulsation de résonance Ω_r (amplitude maximum pour $\Omega = \Omega_r$)

- *Comparaison des différentes pulsations ω_0, ω, Ω_r :*

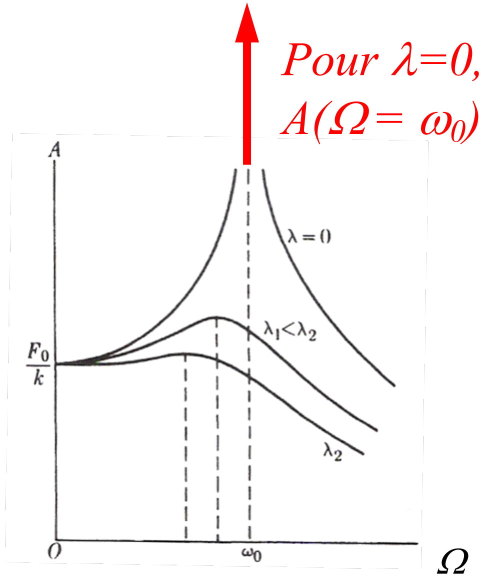
$$\Omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2 = \omega^2 - \lambda^2 \ \ avec \ \ \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \ \ d'où \ \ \boxed{\Omega_r < \omega < \omega_0}$$

- *Cas de l'oscillateur forcé avec frottement nul ($\lambda=0$) :*

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \ \Rightarrow \ \Omega_r = \omega_0$$

$$A(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}} \ \Rightarrow \ A(\Omega) \rightarrow \infty$$

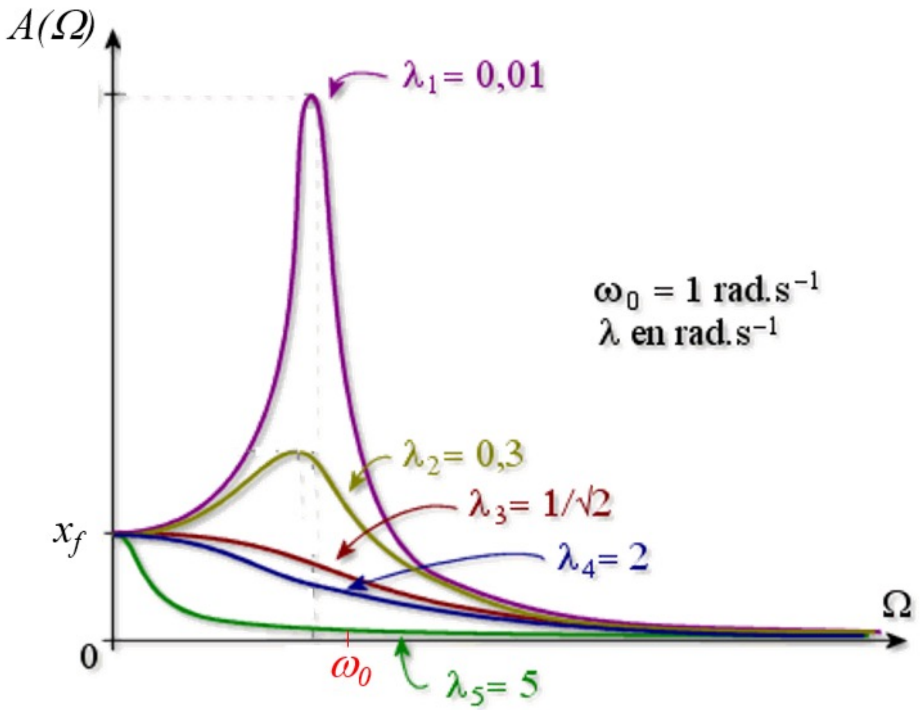
Pour $\lambda=0$,
$A(\Omega = \omega_0) \rightarrow \infty$



L'expression de $A(\Omega)$ diverge pour $\Omega = \omega_0$. L'amplitude devient infinie. Dans la réalité, on atteint les limites physique du système (phénomène de rupture).

9.6. Oscillateur forcé

Amplitude du mouvement



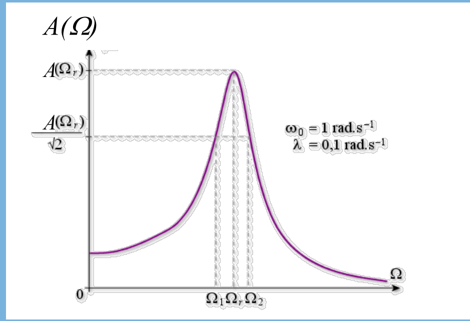
Courbes de résonance pour différentes valeurs de coefficient d'amortissement λ

$$A(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$$

Information

Facteur de qualité:

$$Q = \frac{\Omega_r}{\Delta\Omega} = \frac{{\Omega_r}^2}{2\lambda\omega}$$



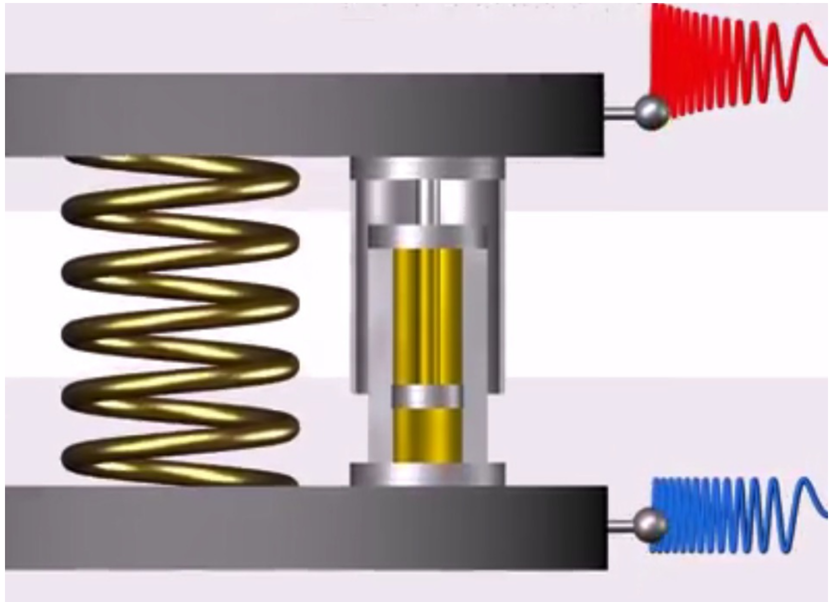
$\Delta\Omega$ est la bande passante définie telle que $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ avec $A(\Omega_1)=A(\Omega_2)=A(\Omega_r)/\sqrt{2}$

9.6. Oscillateur forcé

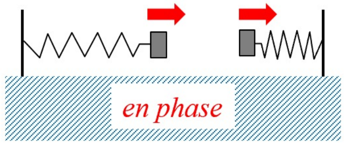
■ Déphasage $\Psi(\Omega)$

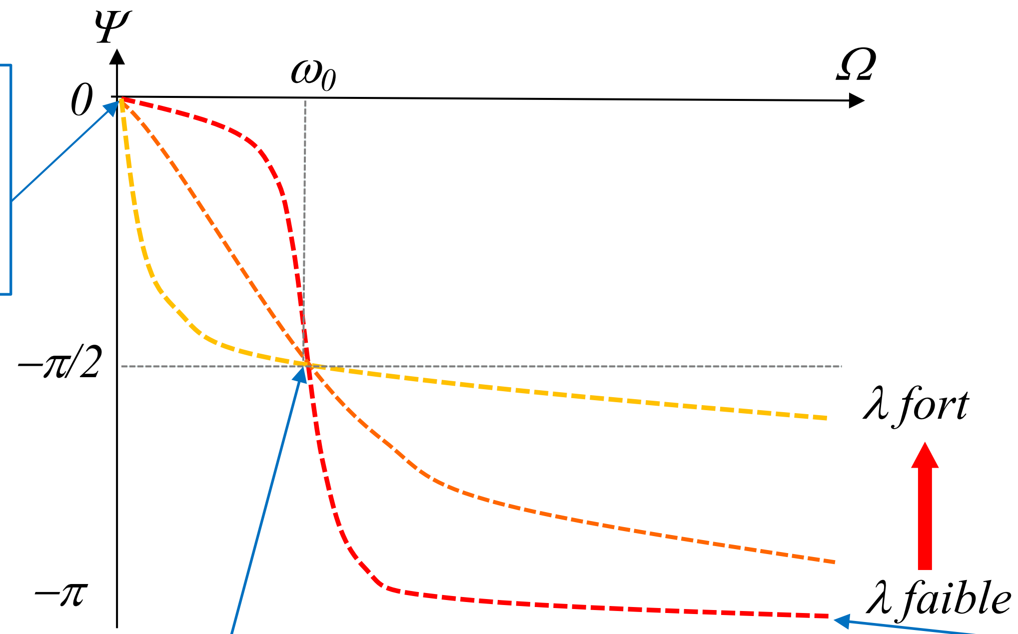
déphasage du mouvement de la masse m par rapport à l'excitation

$$\boxed{\psi(\Omega) = \arctan \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}}$$

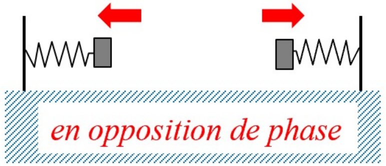


si Ω est très petite, alors l'oscillateur est en phase avec la force excitatrice

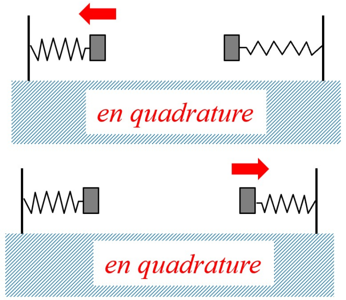




si Ω est très grande, alors l'oscillateur est en opposition de phase avec la force excitatrice



pour $\Omega = \omega_0$, l'oscillateur est en quadrature de phase avec la force excitatrice



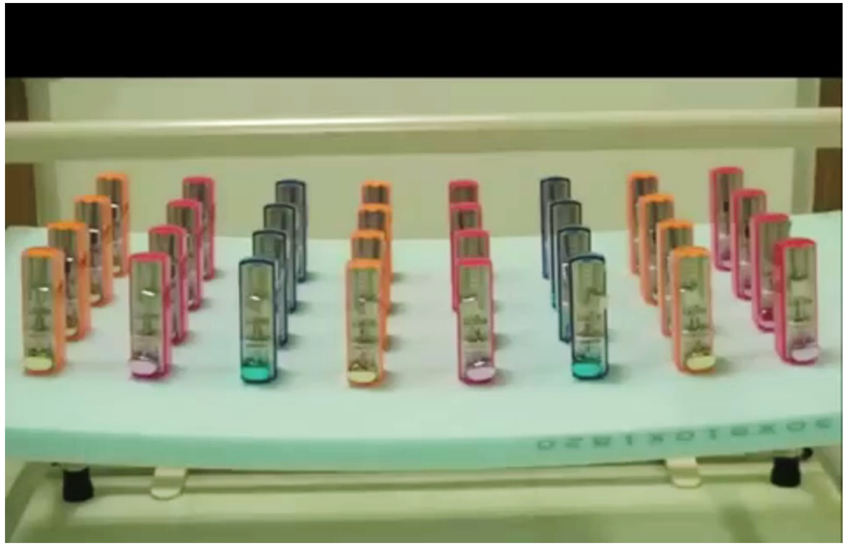
Week 9 – Part 3

9. L'oscillateur harmonique linéaire

9.6. Oscillateur forcé

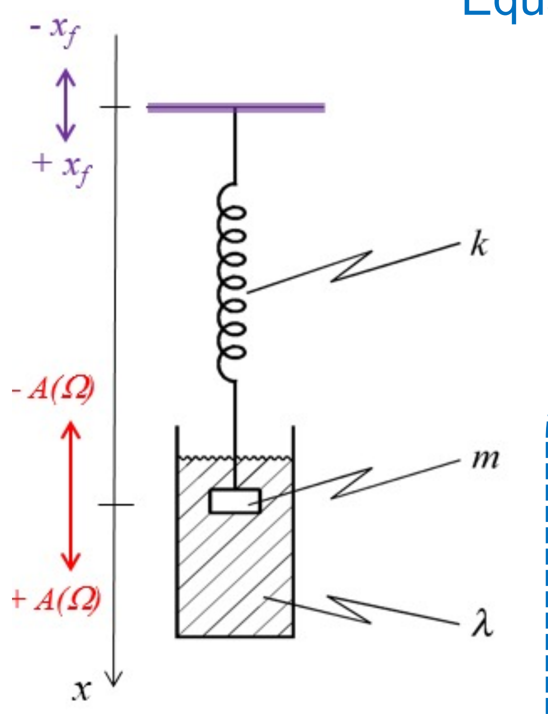
9.7. Analogie entre oscillateurs mécanique et électrique

9.8. Oscillateurs couplés



9.6. Oscillateur forcé

Résumé

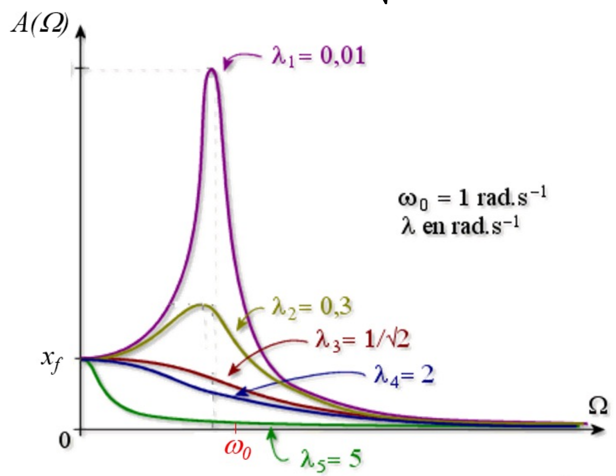


Equation du mouvement : $$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f\cos(\Omega t)}$$

avec $\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{k/m} & \textit{Pulsation propre du ressort libre} \\ \lambda = \dfrac{K\eta}{2m} \\ f = \dfrac{F_e}{m} = \dfrac{kx_f}{m} \end{cases}$

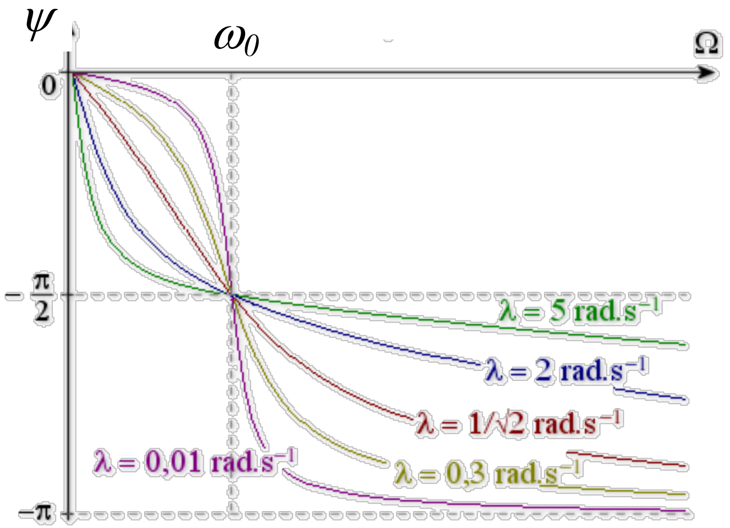
Solution : $$\boxed{x(t) = A\cos(\Omega t + \Psi)}$$

Amplitude $A(\Omega) = x_f \dfrac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$



Pulsation de résonance : $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$

Déphasage $\psi(\Omega) = \arctan\dfrac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$



9.6. Oscillateur forcé

■ Analyse énergétique

La force de frottement fluide entraine une dissipation de l'énergie.

Sur une période T : $E_{diss} = \underbrace{-W'}_{\text{travail de la force de frottement}} = -\int_0^T \vec{F}_f \cdot \vec{v}\, dt$ *avec* $\vec{F}_f = -K\eta\, \vec{v}$

or $x = A\cos(\Omega t + \Psi)$

d'où $v = -A\,\Omega \sin(\Omega t + \Psi)$

Soit $E_{diss} = \int_0^T K\eta\, v^2 dt = \int_0^T K\eta\, A^2\, \Omega^2\, sin^2(\Omega t + \Psi)\, dt = K\eta\, A^2\, \Omega^2\, \frac{\pi}{\Omega} = K\eta\, A^2 \Omega\pi$

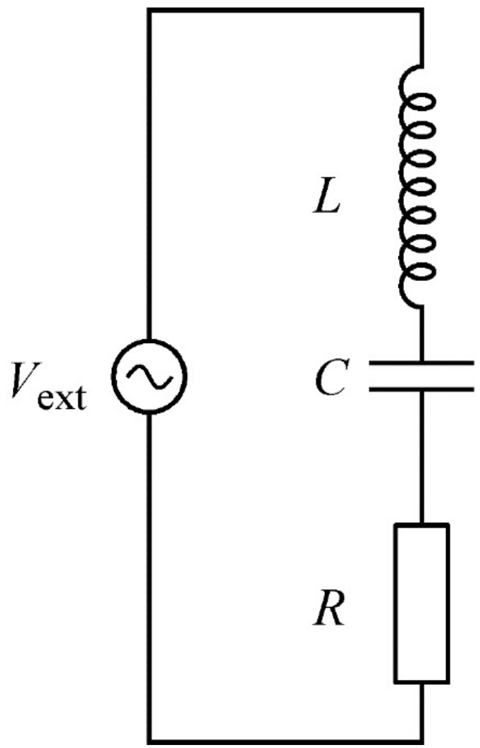
$\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + k \quad (k \in \mathbb{R})$

Puissance dissipée moyenne: $< P_{diss} > = \frac{E_{diss}}{T} = \frac{1}{2} K\eta\, A^2\, \Omega^2$

<u>Remarque</u> : on peut montrer que la puissance dissipée moyenne est maximum pour $\Omega = \omega_0$

9.7. Analogie entre oscillateurs mécanique et électrique

On considère un circuit RLC soumis à une tension alternative $V_{ext}(t)=V_0 \sin\Omega t$



Tension aux bornes de la bobine : * $V_L = L\dfrac{dI}{dt} = L\dfrac{d^2Q}{dt^2}$

Tension aux bornes du condensateur : $V_C = \dfrac{Q}{C}$

Tension aux bornes de la résistance: $V_R = RI = R\dfrac{dQ}{dt}$

Loi des mailles : $V_{ext} = V_L + V_R + V_C$

Soit $$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \sin\Omega t$$

Ou encore $$\frac{d^2Q}{dt^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\lambda = \frac{R}{L}}\frac{dQ}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}}Q = \left(\frac{V_0}{L}\right)\sin\Omega t$$

Analogie avec $$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f\cos(\Omega t)}$$

Hors programme

*bobine est parfaitement inductive (résistance nulle)

9.7. Analogie entre oscillateurs mécanique et électrique

Equation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti :

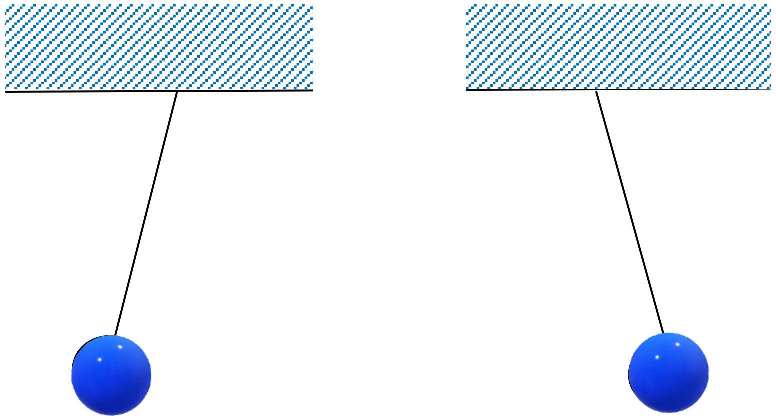
$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

Oscillateur générique	RLC	Masse soumise à un ressort
z	q = charge éléctrique	x = déplacement
$\dot{z}$	$\dot{q} = i$ = intensité	$\dot{x}$ = vitesse
$\ddot{z}$	$\ddot{q} = \frac{di}{dt}$	$\ddot{x}$ = accélération
β	L = inductance propre	m = masse du mobile
ρ	R = résistance	α = coef de frottement
γ	$\frac{1}{C}$ = inverse de la capacité	k = constante de raideur
$T = 2\pi\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$ = période propre	$T = 2\pi\sqrt{LC}$ = période propre	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ = période propre
f	$U = RI$: effet Joule	$f = \alpha\dot{x}$: force de frottement

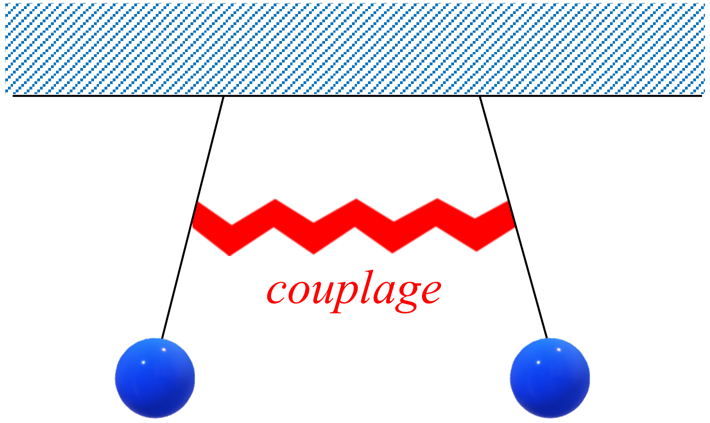
Hors programme

9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

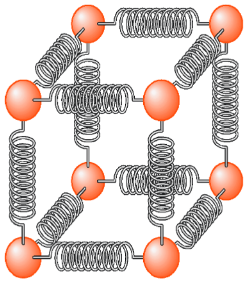
■ Introduction



<u>Ocillateurs libres indépendants</u>
- oscillateurs non couplés



<u>Ocillateurs libres en interaction</u>
- oscillateurs **couplés**



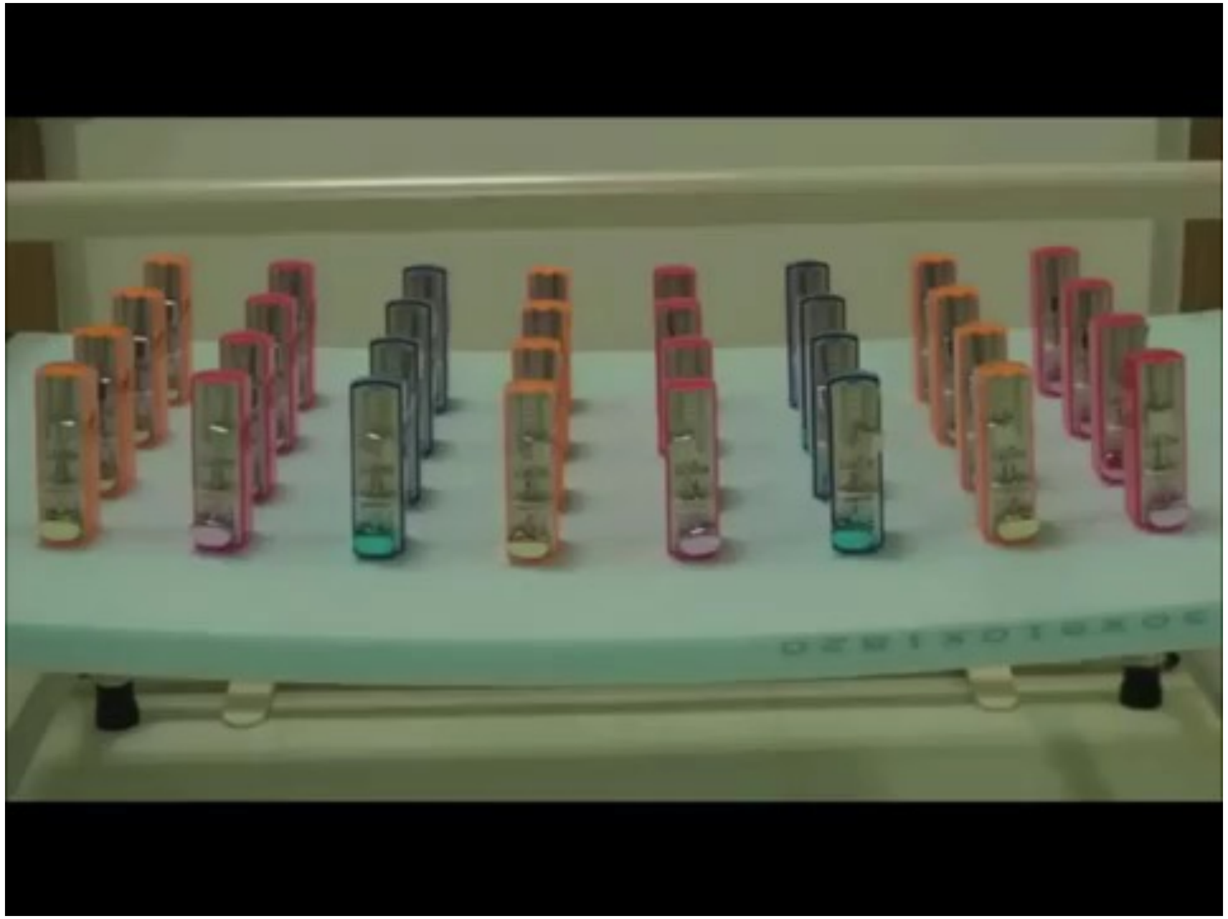
Cristal : l'interaction entre les atomes (liaison chimique) peut être assimilée à un ressort

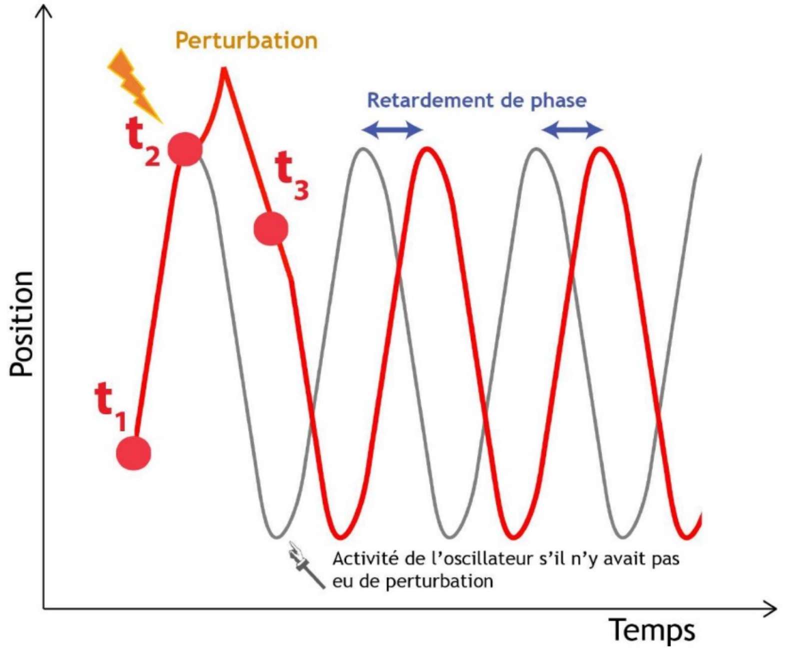
⇨ *très grand nombres d'oscillateurs couplés*

Huygens découvre en 1665 que deux horloges placées côte à côte se synchronisent. Les balanciers bougent en phase.

9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

■ Synchronisation d'oscillateurs couplés

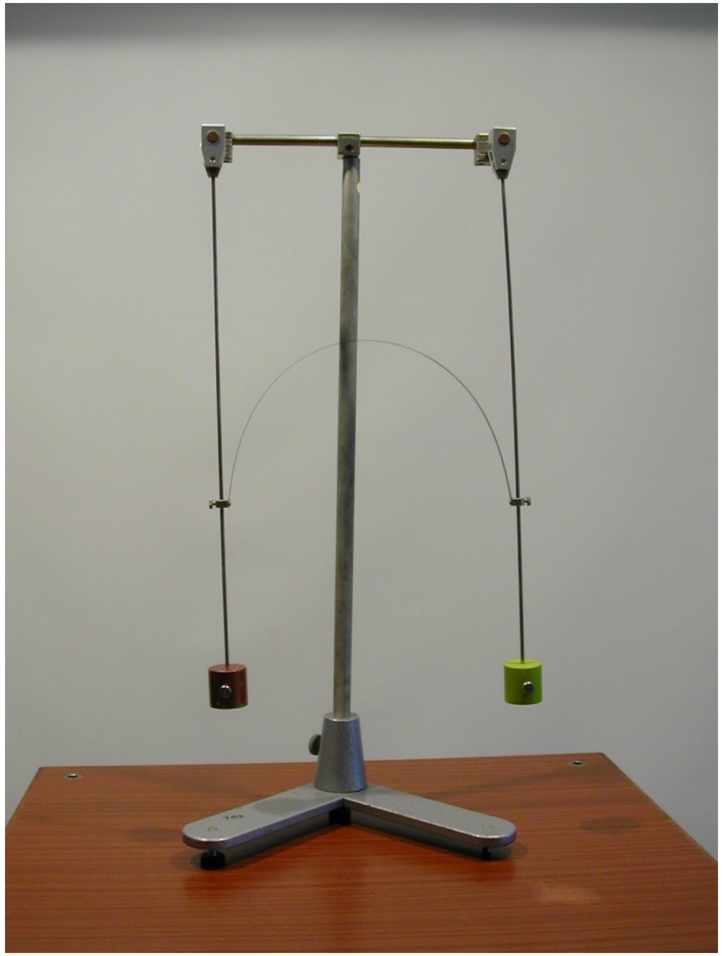




Un concert nocturne de lucioles (© Robin Meier)

9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

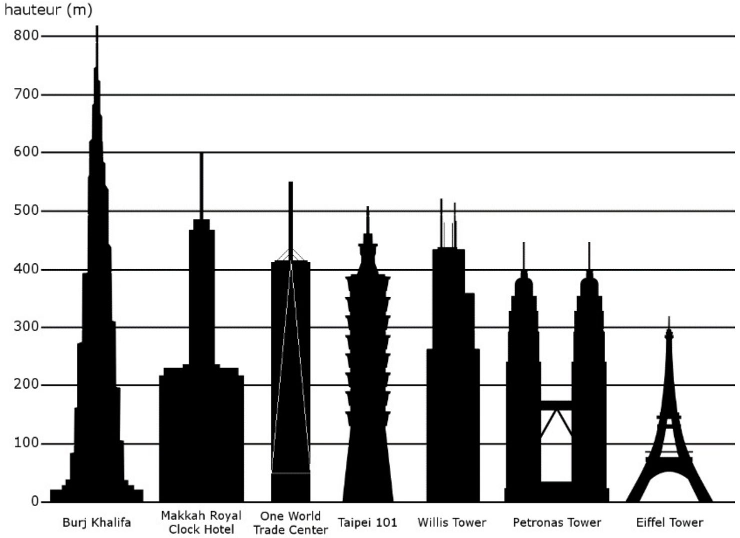
Application des oscillateurs couplés : amortissement d'un oscillateur

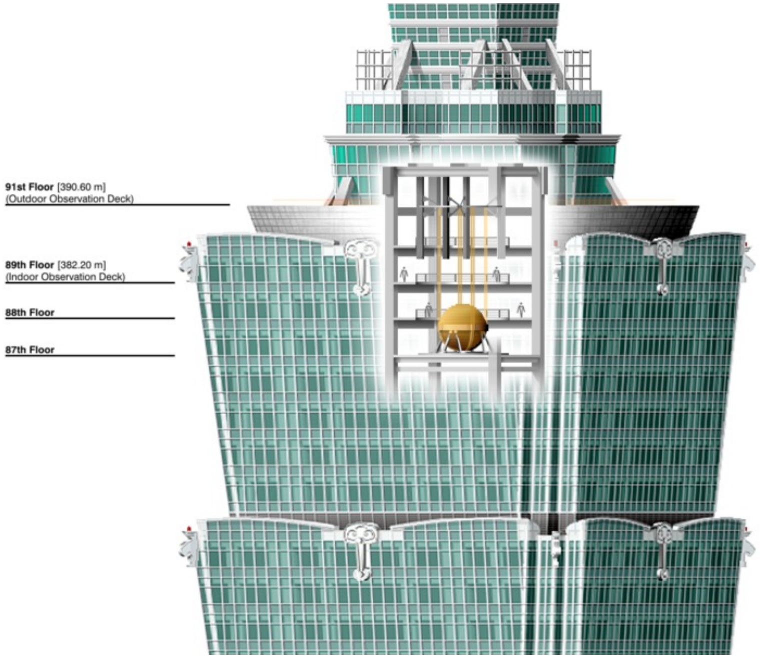


9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

Application des oscillateurs couplés : amortissement d'un oscillateur

La tour Taipei 101 (Taiwan)



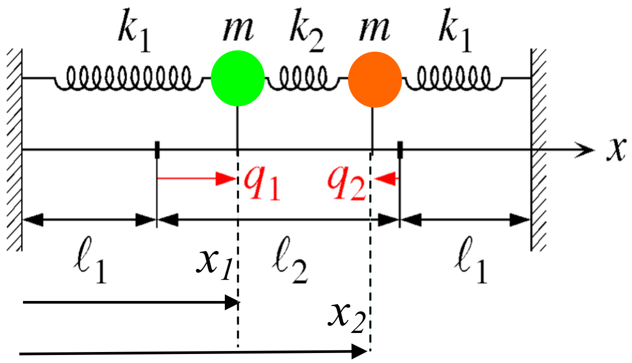


Une tour est un oscillateur *509 m de hauteur*

La tour est un oscillateur qui a une fréquence propre. Sous l'effet d'une onde se propageant dans le sol et provoquée par un tremblement de Terre, l'amplitude des mouvements de la tour peut être amplifiée (oscillateur forcé). Un deuxième oscillateur est alors placé au sommet de la tour (un pendule d'environ 700 tonnes). Celui-ci est couplé à la tour de telle sorte que les mouvements de cette dernière sont transférés au pendule. Les oscillations du pendule sont ensuite amorties par des vérins hydrauliques (dissipation de l'énergie).

9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

Cas de 3 ressorts et 2 masses identiques



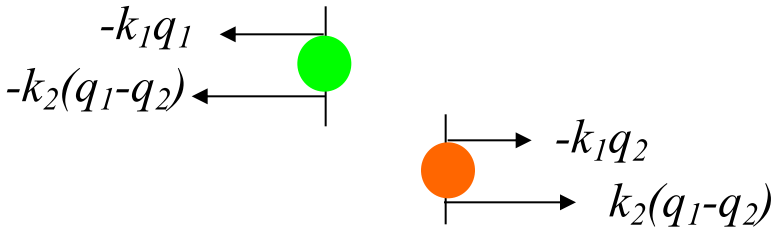
$q_1 = x_1 - l_1$

$q_2 = x_2 - l_2 - l_1$

l_1, $l_2 + l_1$ *sont les positions d'équilibre*

q_1 *et* q_2 *sont les écarts par rapport aux positions d'équilibre*

Bilan des forces



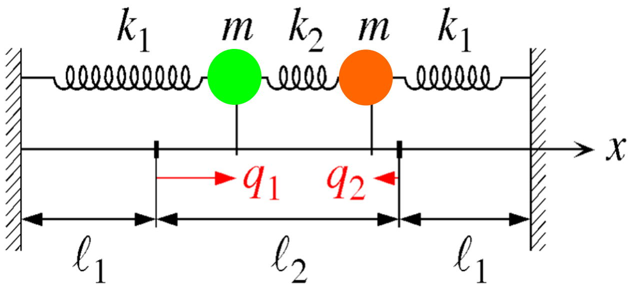
2nd loi de Newton

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = m\frac{d^2q_1}{dt^2} = -k_1q_1 - k_2(q_1 - q_2)$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = m\frac{d^2q_2}{dt^2} = -k_1q_2 + k_2(q_1 - q_2)$$

2 équations de mouvement qui couplent les 2 masses

9.8. Oscillateurs harmoniques couplés



■ Cas de 3 ressorts et 2 masses identiques

Equations du mouvement des deux masses

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{q}_1 + (k_1 + k_2)\, q_1 - k_2 q_2 &= 0 \\ m\ddot{q}_2 - k_2 q_1 + (k_1 + k_2)\, q_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ces équations sont couplées (q_1 et q_2 dans chaque équation)

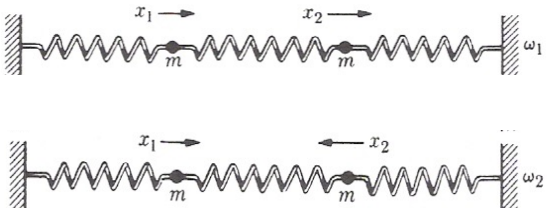
Forme générale des solutions des modes propres (mouvement particulier des 2 masses):

$$q_1 = C_1 \cos(\omega t + \varphi)\,,\ \ q_2 = C_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

Rem: ω et φ ne sont pas connues. Nous savons seulement que les solutions doivent s'écrire sous la forme $\cos(\omega t+\varphi)$. Il faudra donc les déterminer.

Modes propres :

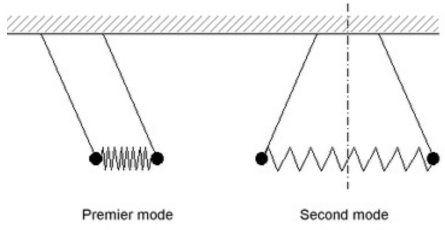
Ressorts couplés



mouvement en phase

mouvement en opposition de phase

Pendules couplés



9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

Cas de 3 ressorts et 2 masses identiques

On injecte $q_1 = C_1 \cos(\omega t + \varphi)\,,\;\; q_2 = C_2 \cos(\omega t + \varphi)$

dans

$$m\ddot{q}_1 + (k_1 + k_2)\, q_1 - k_2 q_2 = 0$$

$$m\ddot{q}_2 - k_2 q_1 + (k_1 + k_2)\, q_2 = 0$$

et nous trouvons deux équations couplées:

$$\boxed{\begin{aligned} &(-m\omega^2 + k_1 + k_2)\, C_1 - k_2 C_2 = 0 \\ &-k_2 C_1 + (-m\omega^2 + k_1 + k_2)\, C_2 = 0 \end{aligned}}$$

Les constantes C_1 et C_2 *dépendent des conditions initiales*

Nous cherchons ici à determiner les solutions de la pulsation ω

Hors programme

9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

$$\boxed{(-m\omega^2 + k_1 + k_2)}C_1 \boxed{- k_2}C_2 = 0$$
$$\boxed{-k_2}C_1 + \boxed{(-m\omega^2 + k_1 + k_2)}C_2 = 0$$

sous forme matricielle

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{d_{11}} & \boxed{d_{12}} \\ \boxed{d_{21}} & \boxed{d_{22}} \end{pmatrix}}_{D} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système d'équations admet une infinité de solutions si le déterminant D de la matrice est nul

$$\det D = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} = 0$$

soit $$\boxed{(-m\omega^2 + k_1 + k_2)^2 - k_2^2 = 0}$$

Equation caractéristique qui détermine ω

Nous avons finalement deux solutions pour ω

i) $-m\omega^2 + k_1 + k_2 = +k_2$ ⇨ $\boxed{\omega_+ = \sqrt{\frac{k_1}{m}}}$

ii) $-m\omega^2 + k_1 + k_2 = -k_2$ ⇨ $\boxed{\omega_- = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}}$

Rem: $\omega_+ < \omega_-$

Hors programme

9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

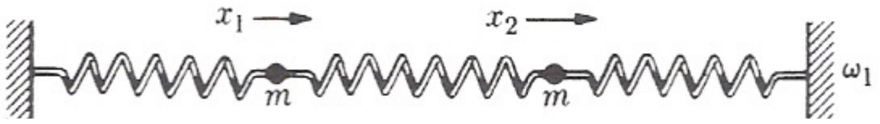
Hors programme

■ Mode propre « acoustique » ω_+

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$$

le ressort central (k_2) est ***inactif***

$$\boxed{q_1(t) = q_2(t) = C_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+)}$$



Les masses se déplacent en phase

■ *Mode propre « optique » ω_-*

$$\omega_- = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}$$

$$\boxed{q_1(t) = -q_2(t)}$$

$$q_1(t) = C_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)$$
$$q_2(t) = -C_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)$$

Masses en opposition de phase

9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

■ Cas général

Le mouvement dépend des conditions initiales à $t=0$ et peut être compliqué. Néanmoins, il sera toujours une combinaison linéaire des deux solutions particulières, appelées modes propres.

$$\boxed{\begin{aligned} q_1(t) &= C_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + C_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \\ q_2(t) &= C_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) - C_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \end{aligned}}$$

■ Cas particulier

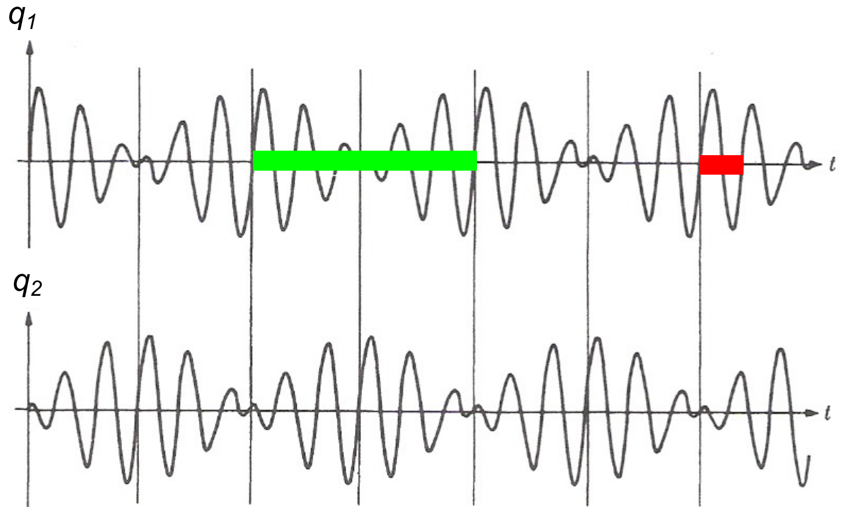
Amplitudes égales ($C_+ = C_- = C$) et phases initiales nulles ($\varphi_+=\varphi_-=0$)

$$q_1(t) = C\ (\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t))$$

$$\Rightarrow q_1(t) = 2C\ \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)t\right)\ \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-)t\right)$$

$$q_2(t) = C\ (\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t))$$

$$\Rightarrow q_2(t) = -2C\ \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)t\right)\ \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-)t\right)$$



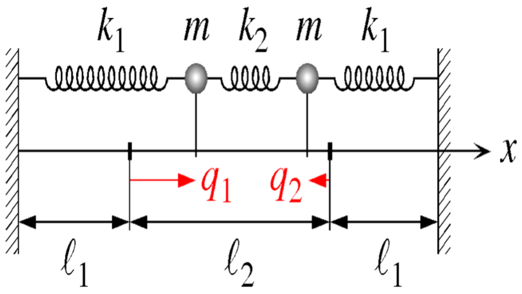
La modulation de l'amplitude est en opposition de phase

⇨ transfert d'énergie

Hors programme

9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

■ Energie mécanique du système



Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$

Energie potentielle :
$$E_p = \frac{1}{2}k_1q_1^2 + \frac{1}{2}k_1q_2^2 + \frac{1}{2}k_2(q_1 - q_2)^2$$
$$= \frac{1}{2}k_1q_1^2 + \frac{1}{2}k_1q_2^2 + \frac{1}{2}k_2q_1^2 + \frac{1}{2}k_2q_2^2 - k_2q_1q_2$$
$$= \frac{1}{2}(k_1 + k_2)q_1^2 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)q_2^2 - k_2q_1q_2$$

Finalement, l'énergie totale s'écrit

$$E = E_c + E_p = \underbrace{\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)q_1^2}_{\text{Energie masse 1}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)q_2^2}_{\text{Energie masse 2}} - \underbrace{k_2q_1q_2}_{\text{Energie de couplage (interaction)}}$$

Energie masse 1

Energie masse 2

Energie de couplage (interaction)

Hors programme