VII. Chocs; systèmes de masse variable

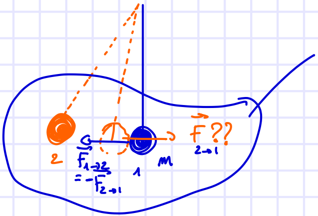
Prof. Cécile Hébert

8 juillet 2021

Plan du cours

Table des matières

1. Motivation



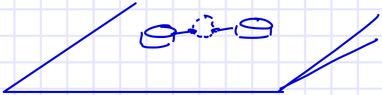
Système constitué des <u>deux</u> masses

⇒ 2 catégories de forces

Forces externes — Forces internes

3° Loi de Newton . $\sum \vec{F}^{int} = \vec{0}$

En considérant le système "global" nous pourrons faire "disparaître" les forces internes



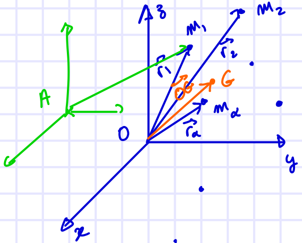
Les chocs <u>sont courts</u> ⇒ les forces externes n'ont pas le temps d'agir
⇒ les objets restent au même endroit de l'espace

On ne se préoccupera pas des forces externes <u>pendant</u> le choc

2 - Centre de masse ; référentiel centre-de-masse

Soit un **système** de N particules $(m_1, m_2, ...m_N)$ à des positions $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...\vec{r}_N)$ dans un référentiel $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Par définition, le centre de masse G du système est donné par



$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 \cdots m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 \cdots + m_N}$$

$$= \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha}$$

$M = \sum_\alpha m_\alpha$ masse totale

$$\boxed{\vec{OG} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{M}}$$

La position de G ne dépend pas de l'origine

Loi de Newton pour le système total

particule α $\vec{p}_\alpha = m_\alpha \vec{v}_\alpha$

système de N particules : $\vec{P} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha$ quantité de mouvement totale

G centre de masse $\vec{r}_G = \vec{OG}$ $\vec{v}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \dot{\vec{r}}_G$ vitesse du centre de masse

$$\vec{v}_G = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha\right] = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha = \frac{1}{M}\sum_\alpha \vec{p}_\alpha = \frac{1}{M}\vec{P}$$

$$\boxed{\vec{P} = M\vec{v}_G}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\dot{\vec{v}}_G = M\vec{a}_G = \frac{d}{dt}\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{v}}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \vec{a}_\alpha$$

2° loi de Newton sur la particule α $\sum \vec{F}^\alpha = m_\alpha \vec{a}_\alpha = \sum \vec{F}^{int,\alpha} + \sum \vec{F}^{ext,\alpha}$

$$M\vec{a}_G = \sum_\alpha\left(\sum \vec{F}^{int,\alpha} + \sum \vec{F}^{ext,\alpha}\right) = \underbrace{\sum_\alpha \sum \vec{F}^{int,\alpha}}_{\vec{0}} + \underbrace{\sum_\alpha \sum \vec{F}^{ext,\alpha}}_{\sum \vec{F}^{ext}} \quad \Bigg\{ \quad \boxed{M\vec{a}_G = \sum \vec{F}^{ext}}$$

Loi de Newton pour le système total

$\vec{v}_G = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_G}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OG}$ est la vitesse du centre de masse

$$\vec{P} = M\vec{v}_G$$

Avec $\vec{P}$ quantité de mouvement totale et M masse totale

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = M\vec{a}_G$$

Avec $\vec{F}^{\text{ext}}$ somme des force externes et $\vec{a}_G$ accélération du centre de masse.

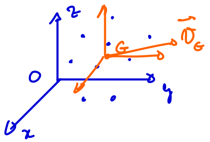
Le **référentiel centre-de-masse (cdm)** est le référentiel qui a pour origine G et se déplace avec lui à $\vec{v}_G$.

$\vec{v}_G = \vec{cte} \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{0}$ ref cdm est galiléen

$\vec{v}_G \neq \vec{cte}$ $\left(\sum \vec{F}^{ext} \neq \vec{0}\right)$ ref cdm est non galiléen

Si $\sum \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$ alors le référentiel cdm est galiléen.

La particule α a une vitesse $\vec{v}_\alpha$ dans $(0, x, y, z)$ et $\vec{V}_\alpha$ dans le référentiel centre-de-masse.



$\vec{v}_\alpha = \vec{V}_\alpha + \vec{v}_G$

$\vec{V}_\alpha = \vec{v}_\alpha - \vec{v}_G$

pas de rotation

Cas de 2 particules

Deux particules, masse m_1 et m_2. Vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans $\mathcal{R}$.

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad \vec{v}_G = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ dans le référentiel c.d.m

$$\vec{V}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_G = \vec{v}_1 - \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\cancel{m_1 \vec{v}_1} + m_2 \vec{v}_1 - \cancel{m_1 \vec{v}_1} - m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{V}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_G = \frac{m_1 \vec{v}_2 + \cancel{m_2 \vec{v}_2}}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 \vec{v}_1 + \cancel{m_2 \vec{v}_2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{V}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \; ; \; \vec{V}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ colinéaires de sens opposé

Quantités de mouvement $\vec{p}_1 \; \vec{p}_2$ dans le ref du labo

$\vec{P}_1 \; \vec{P}_2$ dans le ref c.d.m

$$\vec{P}_1 = m_1 \vec{V}_1 = m_1 \cdot \left[\frac{-m_2}{m_1+m_2} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \right] = \frac{-m_1 m_2}{m_1+m_2} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = -\mu (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\vec{P}_2 = m_2 \vec{V}_2 = m_2 \frac{m_1}{m_1+m_2} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \mu (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$ masse réduite

$$\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$$

Résumé : Deux particules, masse m_1 et m_2. Vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans $\mathcal{R}$.

Dans le réf. cdm les particules ont les vitesses $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$

$$\vec{v}_G = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{V}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1); \qquad \vec{V}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{P}_1 = m_1\vec{V}_1 = -\mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \qquad \vec{P}_2 = m_2\vec{V}_2 = \mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

3 - Types de chocs

On considère le cas $\sum \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$, donc $\vec{p}_{\text{tot}}$ est conservée. $\vec{p}_{tot} = \vec{cte}$

Choc élastique : l'énergie mécanique est conservée, pas de dissipation d'énergie. (balle rebondissante)

Avant | Après

$E_m^i = E_p^i + E_c^i \quad = \quad E_m^f = E_p^f + E_c^f$ conservation E_c : $E_c^i = E_c^f$

$\vec{p}_{tot}^{\,i} \quad = \quad \vec{p}_{tot}^{\,f}$

Choc parfaitement inélastique/choc mou : pas de rebondissement, les objets restent collés après le choc

pas de conservation de E_m !

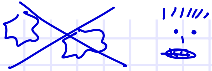
$\vec{p}_{tot}^{\,i} \quad = \quad \vec{p}_{tot}^{\,f}$

après le choc $\vec{v}_2' = \vec{v}_1'$

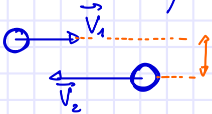
Les cas réels sont presque toujours entre les deux.

4 - Chocs élastiques

1 - particules cylindriques ou sphériques



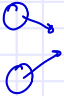
2 - Calculs dans le référentiel centre de masse.



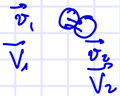
b = paramètre d'impact

$b = 0$ choc frontal

$b > R_1 + R_2 \Rightarrow$ pas de choc



avant



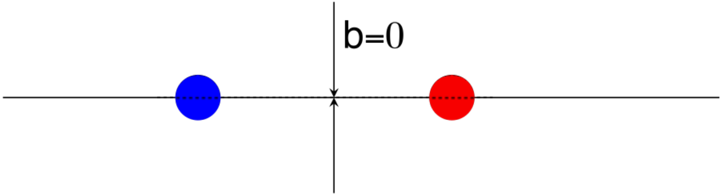
après

Conservation de la quantité de mouvement

Conservation de l'énergie cinétique

$\vec{p}^{\,avant} = \vec{p}^{\,après}$ $\quad E_c^{avant} = E_c^{après}$

Cas particulier du choc frontal. $b = 0$



Si $b = 0$ et avec $\vec{V}_1$ colinéaire à $\vec{V}_2$, les trajectoires restent sur l'axe des trajectoires initiales. Problème à 1 dimension dans le réf cdm.

Vitesses algébriques, projetées sur l'axe défini par les trajectoires.

V_1 V_2 avant V_1' V_2' après

But : calculer les vitesses après le choc

$\vec{P}_{tot} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{0}$ $\quad m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = \vec{0}$ $\quad m_1 V_1 + m_2 V_2 = 0$ $\quad V_2 = -\frac{m_1}{m_2} V_1$

$\vec{P}'_{tot} = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2 = \vec{0}$ $\quad m_1 \vec{V}'_1 + m_2 \vec{V}'_2 = \vec{0}$ $\quad m_1 V'_1 + m_2 V'_2 = 0$ $\quad V'_2 = -\frac{m_1}{m_2} V'_1$

Conservation Ec

$$\cancel{\tfrac{1}{2}} m_1 V_1^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_2 V_2^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}} m_1 V_1'^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_2 V_2'^2$$

$$m_1 V_1^2 + m_2 \left[-\frac{m_1}{m_2} V_1\right]^2 = m_1 V_1'^2 + m_2 \left[-\frac{m_1}{m_2} V'_1\right]^2$$

$$\left[m_1 + m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2}\right] V_1^2 = \left[m_1 + m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2}\right] V_1'^2 \Rightarrow V_1^2 = V_1'^2 \quad \begin{cases} V_1 = V'_1 & (1) \\ V_1 = -V'_1 & (2) \end{cases}$$

(1) $V_1 = V'_1$ et $V_2 = V'_2$

(2) $V_1 = -V'_1$ et $V_2 = -V'_2$

Les particules repartent en sens opposé en gardant la même norme de vitesse

$V_1' = -V_1$ et $V_2' = -V_2$ $\qquad \vec{V}_1' = -\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2' = -\vec{V}_2$

Retour dans le référentiel du labo –

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_G + \vec{V}_1' = \vec{v}_G - \vec{V}_1 = \vec{v}_G - (\vec{v}_1 - \vec{v}_G) = 2\vec{v}_G - \vec{v}_1$$

$$= 2\,\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_1}{m_1+m_2} = \frac{m_1\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_1}{m_1+m_2} = \frac{(m_1-m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_G + \vec{V}_2' = \vec{v}_G - \vec{V}_2 = \vec{v}_G - (\vec{v}_2 - \vec{v}_G) = 2\vec{v}_G - \vec{v}_2$$

$$= 2\,\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} - \frac{m_1\vec{v}_2 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{-(m_1-m_2)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1+m_2}$$

Au final, pour un choc frontal

$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{1}$$

$$\vec{v}_2' = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \tag{2}$$

Cas particuliers (plus simples)

Cas particulier $\vec{v}_2 = 0$

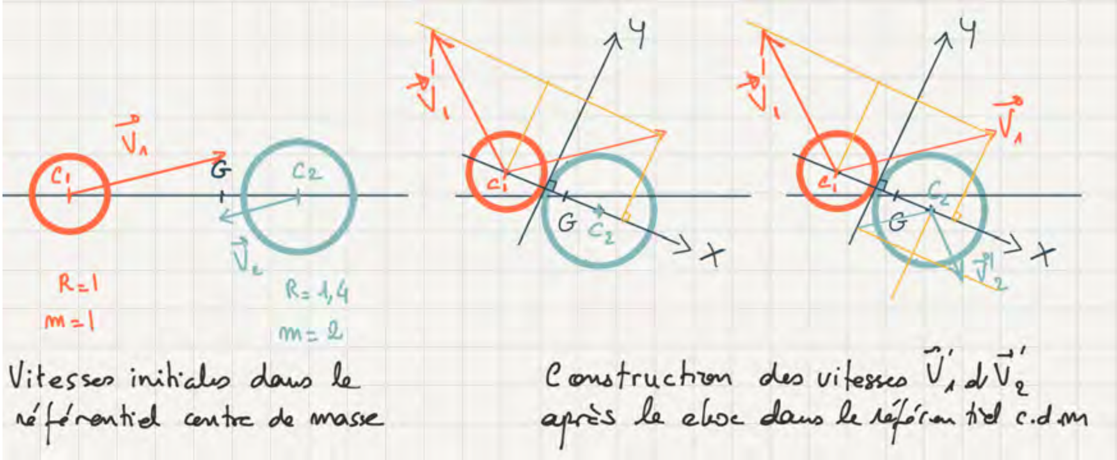
$$\vec{v}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 \quad ; \quad \vec{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1$$

Si $m_1 > m_2$ Les 2 particules continuent dans le même sens

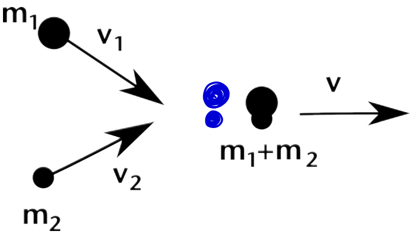
Si $m_1 = m_2$ La particule 1 s'arrête, la 2 part avec $\vec{v}_1$

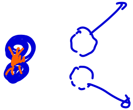
Si $m_1 < m_2$ la particule 1 repart dans l'autre sens

Cas d'un choc non frontal ($b \neq 0$)



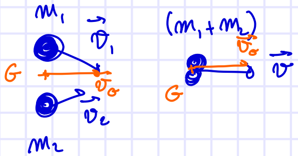
5 - Choc mou





Pour un choc mou (parfaitement inélastique), les deux particules restent collées après le choc. (Ou elles étaient collées avant une explosion).

La quantité de mouvement reste conservée mais pas l'énergie cinétique. Une partie est dissipée sous forme de chaleur. (ou de l'énergie chimique est convertie en énergie cinétique)



avant après

$$\vec p^{\,tot}_{avant} = m\vec v_1 + m_2\vec v_2 \quad = \quad \vec p^{\,tot}_{après} = (m_1+m_2)\vec v$$

$$(m_1+m_2)\vec v = m_1\vec v_1 + m_2\vec v_2$$

$$\boxed{\vec v = \frac{m_1\vec v_1 + m_2\vec v_2}{m_1+m_2}} = \vec v_G$$

$\vec v_G$ inchangé lors du choc car $\sum \vec F^{ext} = \vec 0$

Il n'y a pas conservation de l'énergie cinétique, mais on peut calculer la différence d'énergie cinétique avant et après.

Avant :

$$E_{c,1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Après :

$$E_{c,2} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2$$

$E_{c,2} - E_{c,1}$ $\quad m_1 \; m_2 \; \vec{v}_1 \; \vec{v}_2$

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) \cdot (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$= \frac{m_1^2 v_1^2 + 2 m_1 m_2 \vec{v}_1 \vec{v}_2 + m_2^2 v_2^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$E_{c_2} - E_{c,1} = \frac{1}{2}\cancel{(m_1+m_2)}\,\frac{m_1^2 v_1^2 + 2 m_1 m_2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + m_2^2 v_2^2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}} - \left[\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2\right]$$

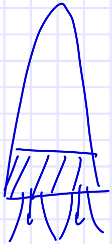
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{m_1^2 v_1^2 + 2 m_1 m_2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + m_2^2 v_2^2}{m_1+m_2} - \frac{(m_1+m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)}{m_1+m_2}\right]$$

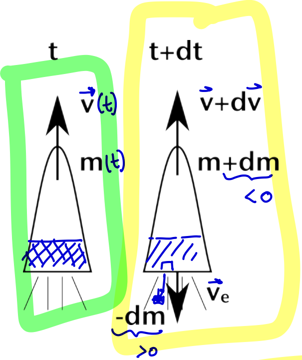
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\cancel{m_1^2 v_1^2} + 2 m_1 m_2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \cancel{m_2^2 v_2^2} - \cancel{m_1^2 v_1^2} - m_1 m_2 v_2^2 - m_1 m_2 v_1^2 - \cancel{m_2^2 v_2^2}}{m_1+m_2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left[-v_1^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 - v_2^2\right] = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left[v_1^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + v_2^2\right]$$

$$E_{c_2} - E_{c_1} = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left[\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right]^2 \leq 0$$

6 - Système de masse variable : fusée





Fusée de masse initiale m_0

Les gaz sont éjectés à vitesse constante par rapport à la fusée et à un taux constant $\vec{v}_e = \vec{cte}$ $\frac{dm}{dt} = cte$

Système : fusée à l'instant t (masse m, vitesse $\vec{v}$)

Après : $t + \mathrm{d}t$, la fusée a éjecté une masse $-\mathrm{d}m$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{ext} = \frac{\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)}{dt}$$

$$\vec{p}(t) = m(t)\,\vec{v}(t) \qquad \vec{v}_{gaz} = \vec{v}_e + \vec{v} + d\vec{v}$$

$$\vec{p}(t+dt) = \underbrace{(m+dm)(\vec{v}+d\vec{v})}_{\text{fusée}} + \underbrace{(-dm)\,\vec{v}_{gaz}}_{\text{gaz éjectés}}$$

$$\vec{p}(t+dt) = m\vec{v} + m\,d\vec{v} + dm\,\vec{v} + dm\,d\vec{v} - dm\,(\vec{v}_e + \vec{v} + d\vec{v})$$

$$m\vec{v} + m\,d\vec{v} + \cancel{dm\,\vec{v}} + \cancel{dm\,d\vec{v}} - dm\,\vec{v}_e - \cancel{dm\,\vec{v}} - \cancel{dm\,d\vec{v}}$$

$$\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = \cancel{m\vec{v}} + m\,d\vec{v} - dm\,\vec{v}_e - \cancel{m\vec{v}} = m\,d\vec{v} - dm\,\vec{v}_e$$

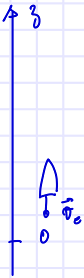
$$\vec{F}^{ext} = \frac{\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)}{dt} = \frac{m\,d\vec{v} - dm\,\vec{v}_e}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_e\frac{dm}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

$$\vec{F}^{ext} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_e \frac{dm}{dt}$$

La fusée est dans le vide intersidéral suffisamment loin de toute masse $\vec{F}^{ext} = \vec{0}$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_e\frac{dm}{dt} = \vec{0} \qquad \vec{v}_e = -v_e\,\vec{e}_z \qquad v_e = |\vec{v}_e| > 0$$

$$d\vec{v} = dv\,\vec{e}_z$$ dv algébrique



$$m\frac{dv\,\vec{e}_z}{dt} + v_e\,\vec{e}_z\frac{dm}{dt} = \vec{0} \qquad m(t)\frac{dv}{dt} + v_e\frac{dm}{dt} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = -v_e\frac{dm/dt}{m}$$

$$\int_{t=0}^{t}\frac{dv}{dt}dt = \int_{t=0}^{t} -v_e\frac{dm/dt}{m(t)}\,.dt \Rightarrow [v(t)]_0^t = -v_e\left[\ln m(t)\right]_{t=0}^{t}$$

$$\left[v(t) \right]_0^t = -v_e \left[\ln m(t) \right]_0^t$$

$$v(t) - v(0) = -v_e \left[\ln m(t) - \ln (\underbrace{m(0)}_{m_0}) \right] \qquad \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

$$= -v_e \ln \frac{m}{m_0}$$

$$v(t) = v_0 + v_e \ln \frac{m_0}{m} \qquad \text{si à } t = 0 \quad v(0) = v_0 = 0$$

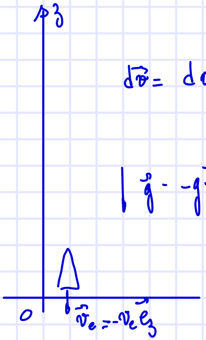
$$v(t) = v_e \ln \frac{m_0}{m(t)}$$

si v_e grand $v(t)$ grand

si $\frac{m_0}{m}$ grand $v(t)$ grand

Si la fusée monte verticalement dans le champ de pesanteur $\vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{g}$

$$\vec{F}^{ext} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_e\frac{dm}{dt} = m\vec{g} \qquad m(t) \qquad \vec{g} = \overrightarrow{cte}$$



$$d\vec{v} = dv\,\vec{e}_z$$

$$\vec{g} = -g\vec{e}_z$$

$$m\frac{dv}{dt}\vec{e}_z + v_e\vec{e}_z\frac{dm}{dt} = m(-g\vec{e}_z)$$

$$\frac{dv}{dt} = -v_e\frac{dm/dt}{m} - g$$

$$\int_{t=0}^{t}\frac{dv}{dt}dt = \int_0^t -v_e\frac{\frac{dm}{dt}}{m}dt - \int_0^t g\,dt$$

$$\left[v(t)\right]_0^t = -v_e\left[\ln m(t)\right]_0^t - gt \Rightarrow \boxed{v(t) = v_e\ln\frac{m_0}{m} - gt}$$