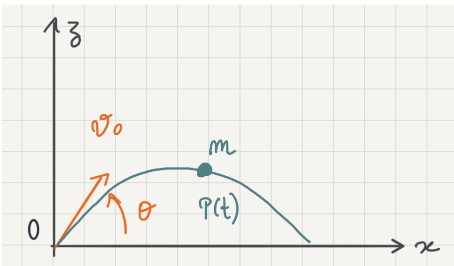
Exercices

Exercice 1



Calculer $\vec{L}_O$ et $\vec{M}_O^{m\vec{g}}$ en fonction du temps, pour un objet de masse m lancé avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle θ avec $(0,\vec{x})$, depuis l'origine O.
Montrer que $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{m\vec{g}}$

Exercice 2
Calculer l'altitude à laquelle placer un satellite pour qu'il soit géostationnaire.
Indication : $R_T = 6378km,\ G = 6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2},\ M_T = 5,974 \cdot 10^{24} kg$

Exercice 3
L'ISS orbite à 400 km au dessus de la surface de la Terre. Quelle est sa vitesse et combien de temps (en minutes) dure une orbite ?

Exercice 4
Calculer la vitesse qu'il faudrait communiquer à un objet pour le mettre en orbite à une altitude nulle. (Il tournerait autour de la Terre, considérée sphérique "au ras du sol"). Cette vitesse est la première vitesse cosmique.
Indication : $R_T = 6378km,\ G = 6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2},\ M_T = 5,974 \cdot 10^{24} kg$

Exercice 5
En sachant que la masse de la Terre est $M_♁ = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg, que la masse de la lune est $m_☾ = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg et que la distance Terre-Lune est de $d = 3,84 \cdot 10^8$ m, déterminer la position du centre de masse du système Terre-Lune à partir du centre de la terre
Indication : Ne pas oublier les rayons de la Terre et de la Lune.

Exercice 6
Un satellite GPS a une masse de 860 kg. Il est à une altitude de 20'000 km.

1. Calculer sa vitesse et sa période de révolution.
2. Calculer l'énergie à fournir au satellite pour le mettre en orbite ? Comparer à l'énergie nécessaire pour accélérer un train de 380 tonnes de 0 à 200 km/h.
3. Calculer le moment cinétique du satellite par rapport au centre de la Terre lorsqu'il est en orbite. Calculer son moment cinétique lorsqu'il est à la surface de la Terre, dans son hangar de rangement, à 40° de latitude Nord ?

Solutions

Solution 1

$$\vec{a}\left|\begin{matrix}0\\0\\-g\end{matrix}\right. \qquad \vec{v}\left|\begin{matrix}v_0\cos\theta\\0\\-g+v_0\sin\theta\end{matrix}\right. \qquad \vec{r}\left|\begin{matrix}v_0\cos\theta\, t\\0\\-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\theta\, t\end{matrix}\right.$$

$$\vec{L}_O=\vec{r}\wedge m\vec{v} \qquad \overrightarrow{L_O}\left|\begin{matrix}0\\\frac{1}{2}mgv_0\cos\theta\, t^2\\0\end{matrix}\right.$$

$$\vec{M}_O^{m\vec{g}}=\vec{r}\wedge(-mg\vec{e}_z)=-mgv_0\cos\theta\, t\,\underbrace{\vec{e}_x\wedge\vec{e}_z}_{-\vec{e}_y}$$

$$\vec{M}_O^{m\vec{g}}=mgv_0\cos\theta\, t\vec{e}_y \;\Rightarrow\; \text{On a bien } \frac{d\vec{L}_O}{dt}=\vec{M}_O^{m\vec{g}}$$

Solution 2
h≅35800km

Solution
$v=7667m\cdot s^{-1}$
$T=5555s=92,6min$

Solution 4 $7,9$ km.s^{-1}

Solution 5
On trouve $x_{CM}=5\cdot10^6$ m à partir du centre de la Terre

Solution 6

1. L'orbite est circulaire. Les forces de gravitation correspondent donc à l'accélération normale :
$$F_G=\frac{GMm}{R_s^2}=m\frac{v^2}{R_s}$$
où M est la masse de la Terre, m la masse du satellite et R_s le rayon de l'orbite du satellite. Donc :
$$\boxed{v=\sqrt{\frac{GM}{R_s}}}$$
A.N. : $v=3.88\cdot10^3$ m $\cdot$ s^{-1}
$$v=R_s\omega=R_s\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=2\pi\frac{R_s}{v}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{R_s^3}{GM}}}$$

A.N. : $T = 42700$ s ($\simeq 12$ h), soit 2 tours par jour.

2. Attention : on ne peut pas considérer g comme constant ! L'énergie potentielle de gravitation est donnée par :

$$E_p = -\frac{GMm}{R}$$

Quand le satellite est sur Terre, son énergie potentielle est

$$E_{p_1} = -\frac{GMm}{R_T} \qquad E_{c_1} = \frac{1}{2}mv_T^2$$

Quand il est en orbite,

$$E_{p_2} = -\frac{GMm}{R_s} \qquad E_{c_2} = \frac{1}{2}mv^2$$

L'énergie à fournit est

$$\begin{aligned}
\Delta E &= E_2 - E_1 \\
&= -\frac{GMm}{R_s} + \frac{1}{2}mv^2 - \left(-\frac{GMm}{R_T} + \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi R_T}{T_T}\right)^2\right) \\
&= -\frac{GMm}{R_s} + \frac{1}{2}m\frac{GM}{R_s} + \frac{GMm}{R_T} - \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi R_T}{T_T}\right)^2 \\
&= GMm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2R_s}\right) - \frac{2m\pi^2 R_T^2}{T_T^2}
\end{aligned}$$

en supposant que le lancement s'effectue près de l'équateur...
A.N. :
$\Delta E = 6.67\cdot 10^{-11}\cdot 5.98\cdot 10^{24}\cdot 860\cdot\left(\frac{1}{6.378\cdot 10^6} - \frac{1}{2\cdot 2.6378\cdot 10^7}\right) - \frac{2\cdot 860(\pi 6.378\cdot 10^6)^2}{(8.64\cdot 10^4)^2} = 47.2\cdot 10^9$ J.

Accélérer un train de 380 tonne de 0 à 200 km/h nécessite

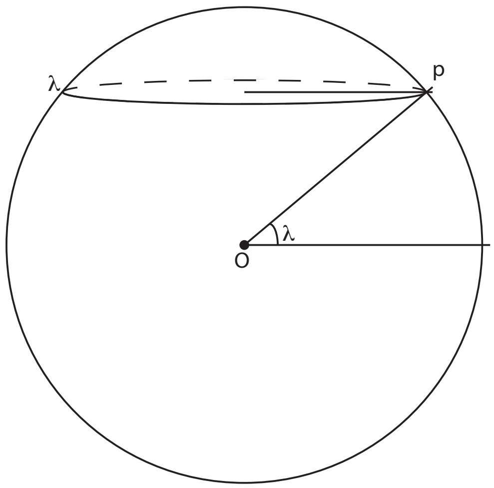
$$\Delta E = \frac{1}{2}m_t v_t^2 = 0.586\cdot 10^9 \text{ J}$$

3. $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}$ et $L_0 = R_s m v_s$ car le mouvement est circulaire uniforme.

$$L_0 = mR_s\sqrt{\frac{GM}{R_s}} = m\sqrt{GMR_s}$$

A.N. : $L_0 = 860\sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24} \cdot 26.378 \cdot 10^6} = 88.2 \cdot 10^{12}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Lorsque le satellite est dans son hangar, il décrit une corde de rayon $R_T \cos\lambda$ sur le parallèle et avec la vitesse de rotation de la Terre (période de 24h)



$\vec{L}'_0 = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}'$, et comme $\overrightarrow{OP} \perp \vec{v}$, on a :

$$\begin{aligned} |\vec{L}_0| = L'_0 = OP \cdot mv' &= R_T m v' \\ &= R_T m (R_T \omega \cos\lambda) \\ &= m R_T^2 \frac{2\pi}{T} \cos\lambda \end{aligned}$$

A.N. : $L'_0 = m R_T^2 \frac{2\pi}{T} \cos\lambda = 1.95 \cdot 10^{12}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$