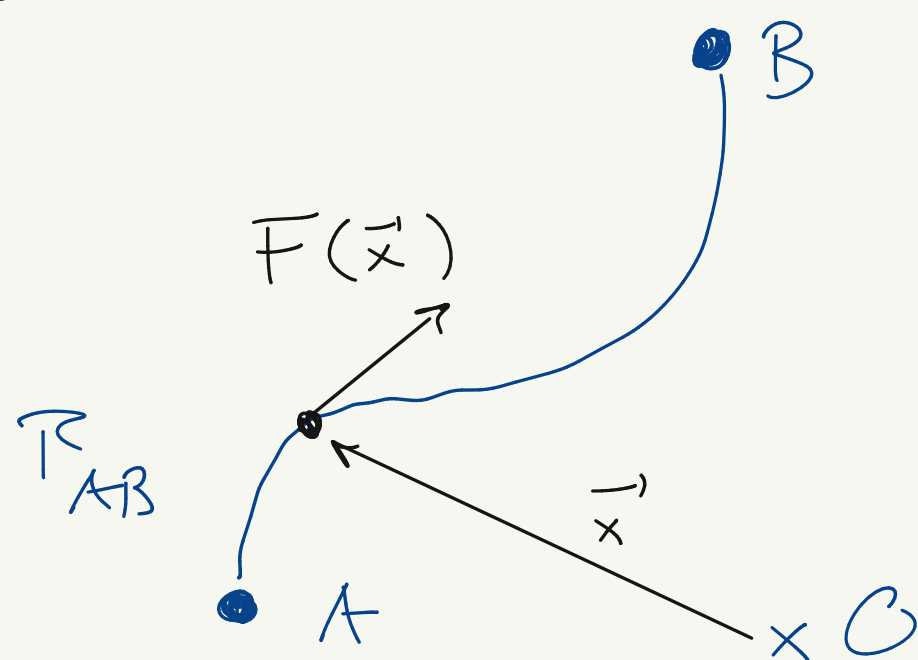


Forces conservatives

1)

Rappel : travail d'une force entre deux points A et B

$$(*) \quad W_{\vec{F}}^{AB} \equiv \int_{\Gamma_{AB}} \vec{F}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}'$$



Définition

Une force $\vec{F}(\vec{x})$ est dite conservative si le travail $(*)$ ne dépend pas du chemin parcouru, mais uniquement des extrémités A et B.

Propriétés (preuve en analyse III)

Une force $\vec{F}$ est conservative si, et seulement si :

- $W_{\vec{F}}^{AB}$ ne dépend pas de Γ_{AB} mais uniquement de A et B
- (•) $\oint \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = 0$ sur toute courbe fermée
- Il existe une fonction $U = U(\vec{x})$ telle que
$$\vec{F} = -\nabla U$$
- (•) La force $\vec{F}$ est irrotationnelle : $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$

Exemples

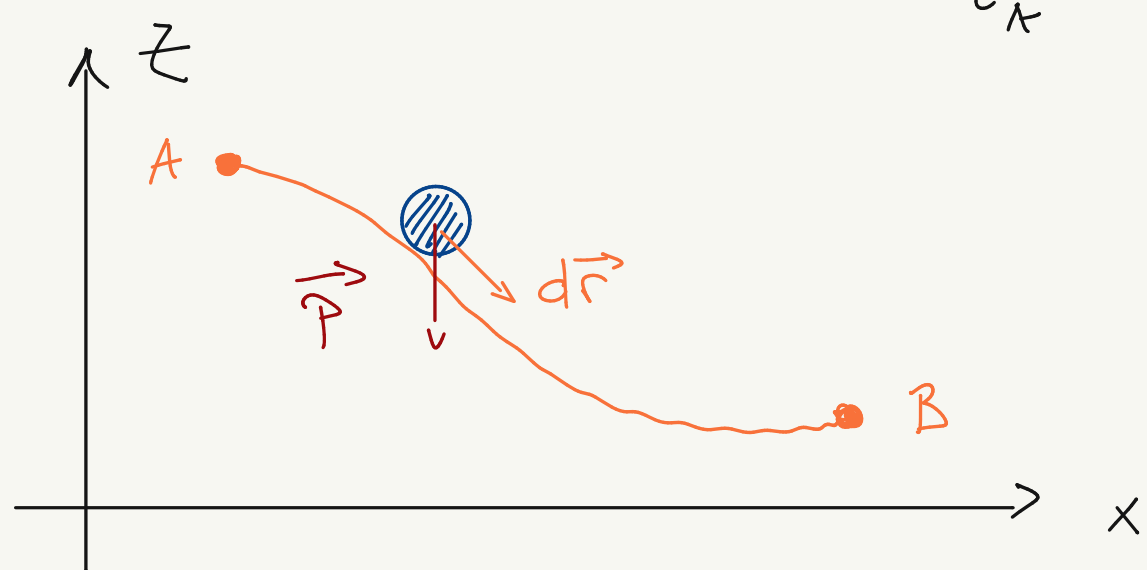
2)

1) Le champ de pesanteurs est une force conservative :

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\hat{e}_z \quad \text{et} \quad W_{\vec{P}}^{AB} = \int_{\Gamma^{AB}} m\vec{g} \cdot d\vec{r}$$

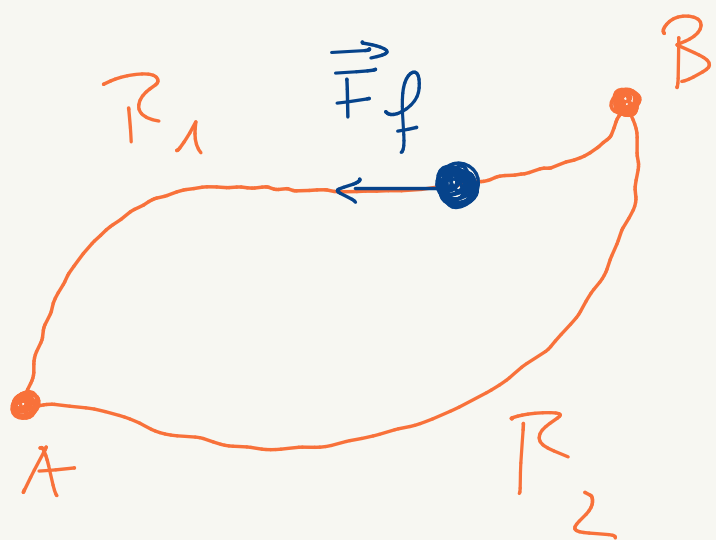
$$\begin{aligned} \text{Or :} \quad m\vec{g} \cdot d\vec{r} &= -mg\hat{e}_z \cdot (dx\hat{e}_x + dz\hat{e}_z) \\ &= -mgdz(\hat{e}_z \cdot \hat{e}_z) = -mgdz \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi} \quad W_{\vec{P}}^{AB} = - \int_{z_A}^{z_B} mgdz = -mg \underbrace{(z_B - z_A)}_{\substack{\text{indépendant} \\ \text{de } \Gamma^{AB}}}$$



$\Rightarrow$ le poids est une force conservative !

2) le travail d'une force de frottement entre deux points A et B dépend du chemin parcouru !



$$W_{\vec{F}_f}^{R_1} \neq W_{\vec{F}_f}^{R_2}$$

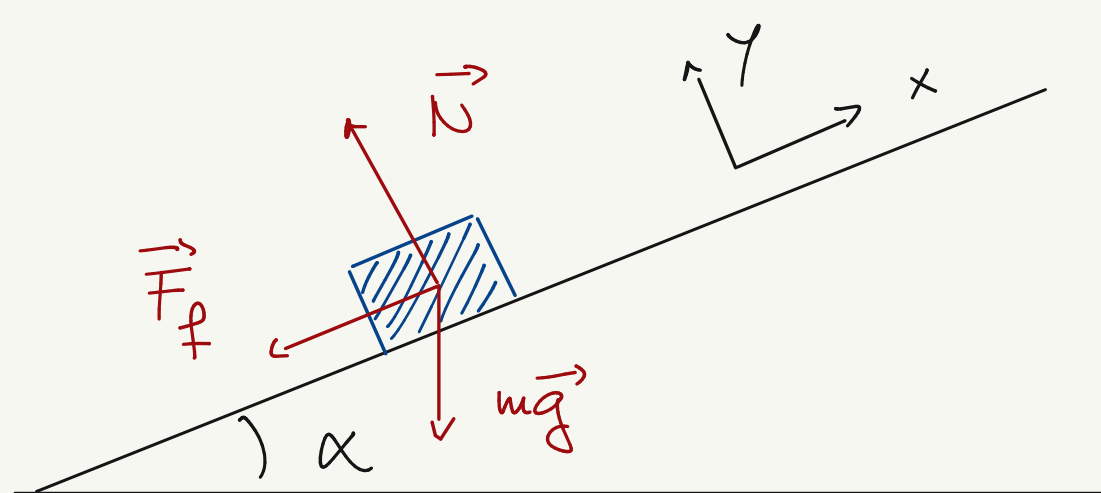
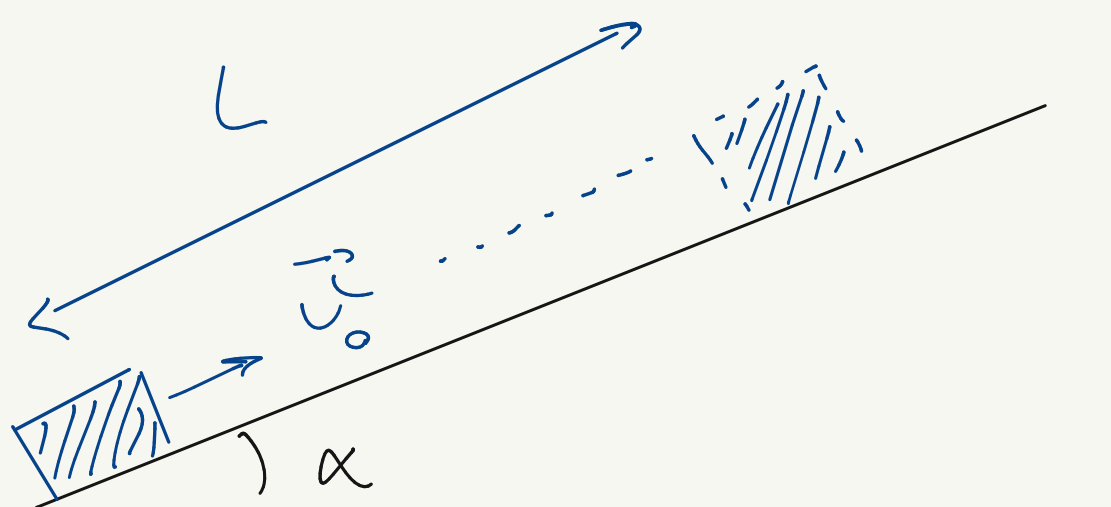
Théorème de l'énergie mécanique

$$\Delta E_{\text{mec}}^{AB} = W_{F^{(nc)}}^{AB}$$

Exemple application

3)

On lance un bloc sur un plan incliné (angle α avec l'horizontale) avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$. On cherche la distance L avant qu'il ne s'arrête.



- Etat initial $E_i = E_{c,i} + E_{pot,i} = \frac{1}{2} m v_0^2 + 0$
- Etat final $E_f = E_{c,f} + E_{pot,f} = m g L \sin \alpha$
- Travail force frottement
$$W_{\vec{F}_f} = \int_0^L \vec{F}_f \cdot d\vec{r} = -L F_f$$
- Newton pour $\vec{F}_f$: $F_f = \mu_c N = \mu_c m g \cos \alpha$
- THM DE L'ENERGIE

$$E_f - E_i = W_{\vec{F}_f}$$

$$m g L \sin \alpha - \frac{1}{2} m v_0^2 = -L \mu_c m g \cos \alpha$$

$$\Rightarrow m g L (\sin \alpha + \mu_c \cos \alpha) = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\Rightarrow L = \frac{v_0^2}{2g (\sin \alpha + \mu_c \cos \alpha)}$$