X. Dynamique du solide indéformable

Dr. Yves Revaz

2024

Plan du cours

Table des matières

Table des matières

X-1. Introduction. Du système de points au solide indéformable.

Un solide indéformable peut avoir un mouvement

– de translation

– de rotation

Il va falloir mettre de nouveaux concepts en place pour le mouvement de rotation !

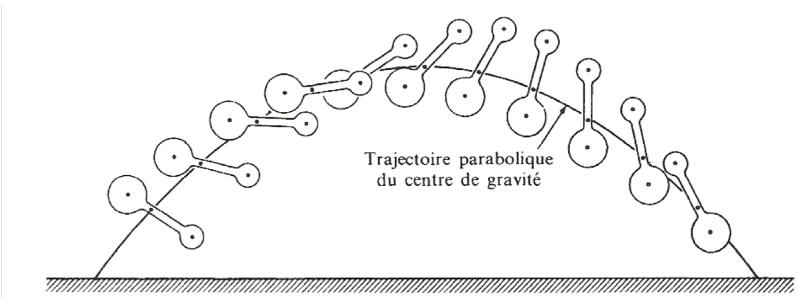
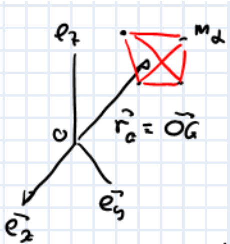


Table des matières

2 - Centre de masse et lois de Newton : centre de masse

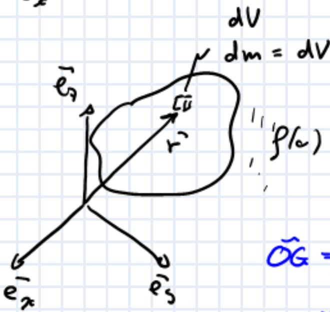


$$\vec{OG} := \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum m_\alpha} = \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha$$

$$\begin{cases} M \vec{v}_G = \vec{P}^{tot} \\ M \vec{a}_G = \vec{F}^{ext} \end{cases}$$

dz, dy, dx

$dV = dx\,dy\,dz$



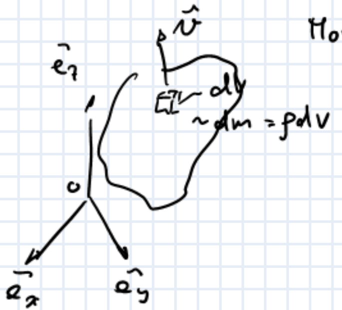
$$dm = dV \cdot \rho(\vec{r})$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \sum \vec{r}_\alpha \cdot dm_\alpha = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \cdot dm$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\vec{r}(x,y,z)\, \rho(x,y,z)}_{x}\, dx\,dy\,dz$$

$$\boxed{\vec{OG} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \cdot \overbrace{\rho(\vec{r})\, dV}^{\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}}$$

2 - Centre de masse et lois de Newton : moment cinétique



Moment cinétique $\vec L_O := \vec r \times \vec p = \vec r \times m\vec v$

$$d\vec L_O := \vec r \times \vec v\, dm$$

$$\vec L_O = \sum d\vec L_O = \sum \vec r_\alpha \times \vec v_\alpha\, dm_\alpha$$

$$\boxed{\vec L_O = \int_V \vec r \times \vec v\, \rho(\vec r)\, dV}$$

Théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec L_O}{dt} = \sum \vec M_O$$

$$\boxed{\frac{d\vec L_O^{\,\text{solide}}}{dt} = \sum \vec M_O = \sum M_O^{\text{ext}}}$$

Quantité de mouvement et 2ème Loi de Newton pour un solide :

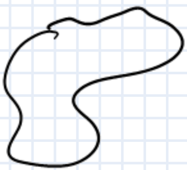
$$\begin{cases} \vec{P}_{\text{tot}} = M\vec{v}_G \\ \sum \vec{F}^{\text{ext}} = M\vec{a}_G \end{cases}$$

Moment cinétique et théorème du moment cinétique pour un solide

$$\vec{L}_O = \int_V \vec{r} \times dm\,\vec{v}(\vec{r})$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$$

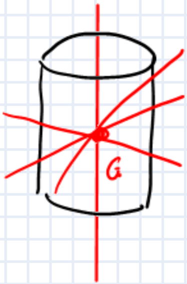
Détermination du centre de masse d'un solide

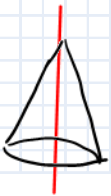


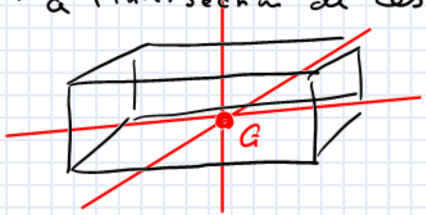
$\vec{OG} = \int \ldots$

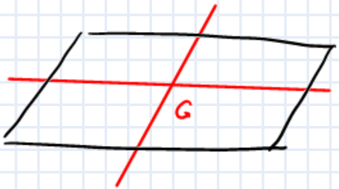
Si un solide possède un axe de symétrie alors le CM est sur cette axe

Si le solide a plusieur axes de symétrie alors le CM est à l'intersection de ces axes



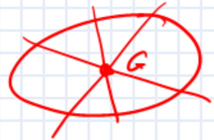




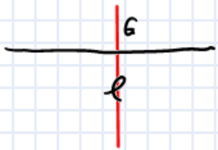


masse surfacique : ρ_s

$$M = S \cdot \rho_s$$

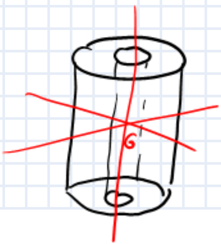


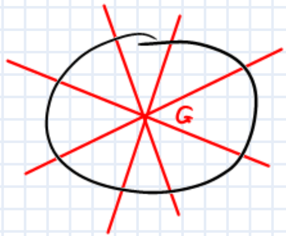
1 D



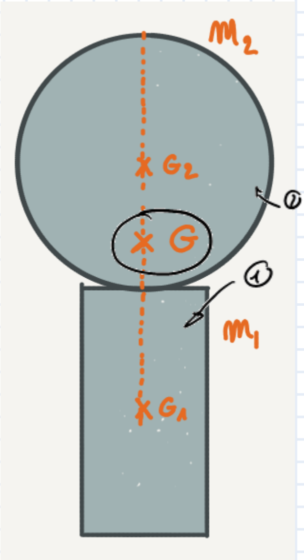
densité linéique

$$M = \ell \cdot \rho_\ell$$





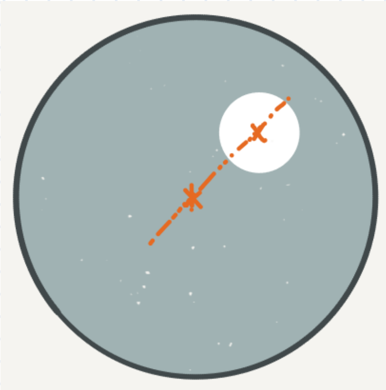
Superposition de deux solides :



$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OG_1} + m_2 \vec{OG_2}}{m_1 + m_2}$$

solide à trou

$M + m_1 = m_2 = m_1 + M$



$$\vec{OG_2} = \frac{M\vec{OG} + m_1\vec{OG_1}}{m_2 = (m_1 + M)}$$

$$\boxed{\vec{OG} = \frac{m_2\vec{OG_2} - m_1\vec{OG_1}}{M}}$$

Chercher le c.d.m. entre le solide sans trou et un "trou" de masse négative égale à la masse enlevée au solide.

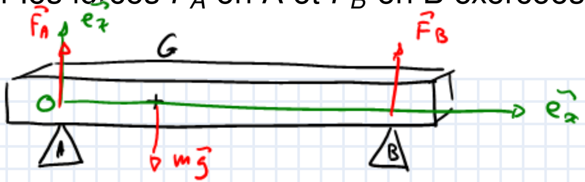
Table des matières

3 - Statique

Les conditions sont alors :

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0} \qquad \vec{M}_O^{\text{ext}} = \vec{0}$$

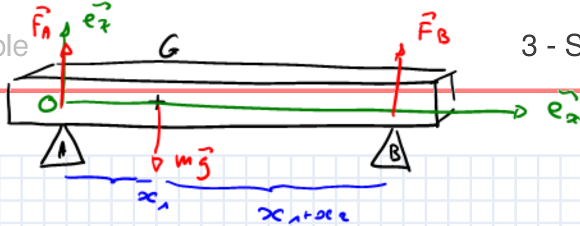
Exemple : poutre (non homogène !) de masse m sur 2 supports. Déterminer les forces F_A en A et F_B en B exercées par les supports



$O = A$

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad \vec{F}_A + \vec{F}_B + m\vec{g} = 0$$

$$z : \quad \boxed{F_A + F_B = mg} \qquad \vec{a}_G = 0$$



$$\sum \vec{M}_O = 0$$

$$\underbrace{\vec{OA} \times \vec{F}_A}_{0} + \vec{OG} \times m\vec{g} + \vec{OB} \times \vec{F}_B$$

$$x_1 mg \cancel{\vec{e}_y} - (x_1+x_2) F_B \cancel{\vec{e}_y} = 0$$

$$F_A + F_B = mg \qquad F_B = \frac{x_1 mg}{x_1+x_2}$$

$$F_A = mg - \underbrace{\frac{x_1 mg}{x_1+x_2}}_{F_B}$$

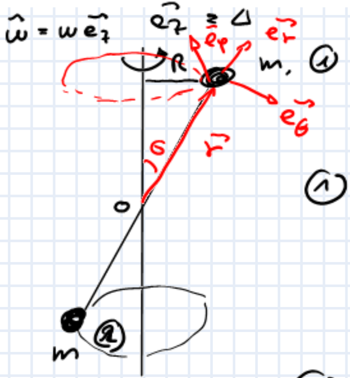
$$M_O = \vec{OP} \times \vec{F}$$

$$F_A = mg\frac{x_2}{x_1+x_2}$$

$$F_B = mg\frac{x_1}{x_1+x_2}$$

Table des matières

4 - Energie (cinétique) de rotation



$$R = r \sin\theta$$

① $\vec{v_1} = R\omega \vec{e_\varphi}$

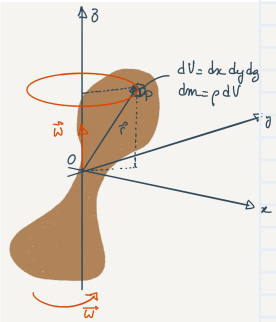
$$E_c = \frac{1}{2} m \vec{v_1}^2 = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2$$

② $|\vec{v_2}| = |\vec{v_1}|$

$$E_c = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2$$

$$E_{c,tot} = \frac{1}{2}(2m) R^2 \omega^2 = \underline{\frac{1}{2} M R^2 \omega^2} = \frac{1}{2}(2m) R^2 \cdot \omega^2$$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$$



$$dm = \rho(\vec{r})\,dV$$

$R = r \sin\theta$

$$dE_{c,rot} = \frac{1}{2}\,dm\,\vec{v}^2(\vec{r}) = \frac{1}{2}\,dm\,(R\,\omega)^2$$

$$= \frac{1}{2}\,\rho(\vec{r})\,R^2(\vec{r})\,\omega^2\,dV$$

$$E_{c,rot}^{tot.} = \int_{vol} \frac{1}{2}\,\rho(\vec{r})\,R^2(\vec{r})\,\omega^2\,dV$$

$$E_{c,rot}^{tot} = \underbrace{\frac{1}{2}\,\omega^2}_{\text{rotat.}} \underbrace{\int_{Vol} \rho(\vec{r})\,R^2(\vec{r})\,dV}_{\text{propriétés du solide}}$$

$$\boxed{I_{z\,\Delta} = \int_{Vol} \rho(\vec{r})\,R^2(\vec{r})\,dV}$$

$$\boxed{E_{c,rot} = \frac{1}{2}\,I_z\,\omega^2}$$

En résumé :

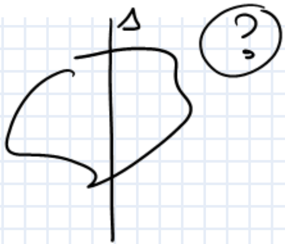
$$E_{C,\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\omega^2 \int_{\mathrm{vol}} R^2 \rho(r)\, d\vec{r} = \frac{1}{2}\omega^2 I_z$$

Avec I_z moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Oz)

$$I_z = \int_{\mathrm{vol}} R^2 \rho(r)\, d\vec{r}$$

Table des matières

Moment d’inertie d’un solide par rapport à un axe : cas de 2 masses

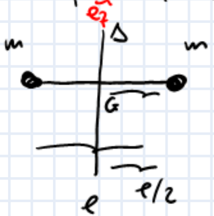


$$I_\Delta = \int \rho \cdot r^2$$

$$\rho(\vec{r})$$

δ

1) 2 sphère (haltère)



$$I_z = mR^2 + mR^2$$

$$= 2mR^2 = 2m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

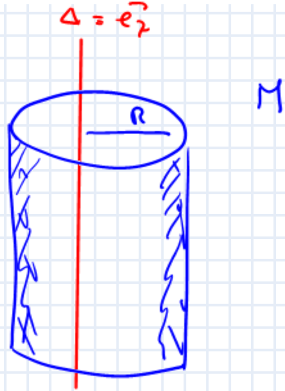
$$I_z = \frac{1}{2} m\ell^2$$

Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe : cas d'un cylindre infiniment mince

2) cylindre creux

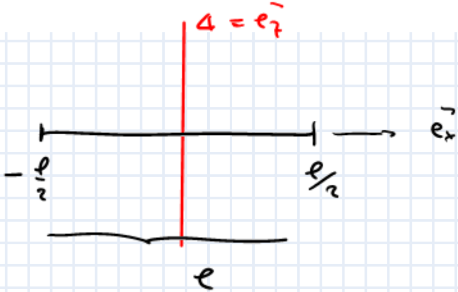
$$I_\Delta = \int \rho R^2 \, dV$$

$$\boxed{I_\Delta = M \cdot R^2}$$



Moment d’inertie d’un solide par rapport à un axe : cas d’une tige infiniment mince

Tige mince



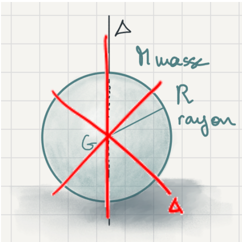
$\rho_\ell \qquad M = \rho_\ell \cdot \ell$

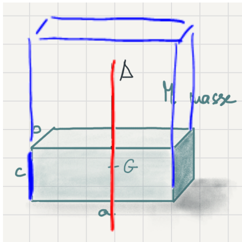
$$I_\Delta = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \rho_\ell \, x^2 \, dx = \rho_\ell \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\ell/2}^{\ell/2} = \rho_\ell \left[\frac{(\ell/2)^3}{3} - \frac{(-\ell/2)^3}{3} \right]$$

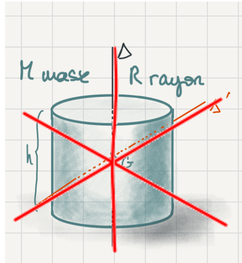
$$= \rho_\ell \frac{2}{3} (\ell/2)^3 = \rho_\ell \frac{1}{12} \ell^3$$

$$\boxed{I_\Delta = \frac{1}{12} M \ell^2}$$

Moment d'inertie de solides usuels





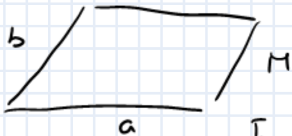


$$I_\Delta = \frac{2}{5} M R_s^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{12} M \left(a^2+b^2\right)$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2} M R^2$$

$$I_{\Delta'} = \frac{1}{4} M \left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right)$$



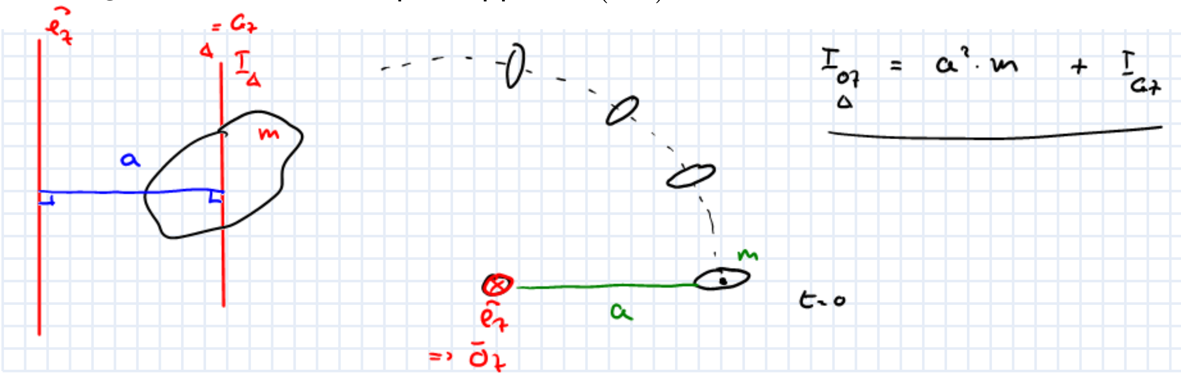
$$I_\Delta = \frac{1}{12} M\left(a^2+b^2\right)$$

Théorème de Steiner :

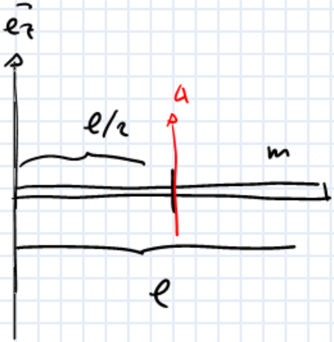
Si on a deux axes *parallèles* (Oz) et (Gz) distants de a, avec G centre de masse. Si I_{Gz} est le moment d'inertie par rapport à (Gz) alors

$$I_{Oz} = \underset{\Delta}{I_{Gz}} + ma^2$$

I_{Oz} moment d'inertie par rapport à (Oz)



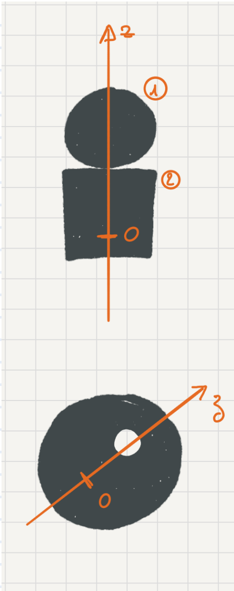
Théorème de Steiner :
exemple d'une tige infiniment mince



$$I_{\vec{e}_z} = m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} m \ell^2$$

$$\boxed{I_{\vec{e}_z} = \frac{1}{3} m \ell^2}$$

Solides composés et solides à trous



$$I^{total}_{Oz} = I^{①}_{Oz} + I^{②}_{Oz}$$

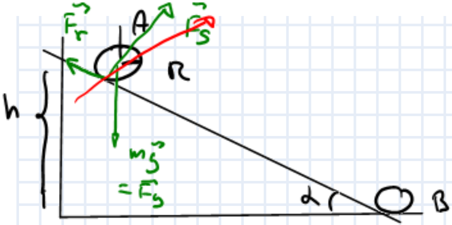
$$I^{bouché}_{Oz} = I^{troué}_{Oz} + I^{trou}_{Oz}$$

$$I^{troué}_{Oz} = I^{bouché}_{Oz} - I^{trou}_{Oz}$$

Application

question : quelle est la vitesse en B

$\underline{v_B = ?}$



$W_{F_G} \neq 0$

$W_{F_r} = 0$

$W_{F_S} = 0 \qquad \vec{F}_S \perp d\vec{r} = 0$

$$E_{mec,A} = E_{mec,B}$$

$I_\Delta = mR^2$

$$\underbrace{E_{c,A}}_{0} + \underbrace{E_{c,r,A}}_{0} + \underbrace{E_{p,A}}_{\cancel{m}gh} = E_{c,B} + E_{c,r,B} + \underbrace{E_{p,B}}_{0}$$

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} (m \cancel{R^2}) \frac{v^2}{\cancel{R^2}} = \cancel{m} v^2$$

$\underline{v = R \cdot \omega}$

$$\boxed{v = \sqrt{gh}}$$

sans rotation

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

Application

Table des matières

6 - Moment cinétique d'un solide.

Rappel : quantité de mouvement et 2ème Loi de Newton pour un solide :

$$\vec{P}_{\text{tot}} = M\vec{v}_G$$

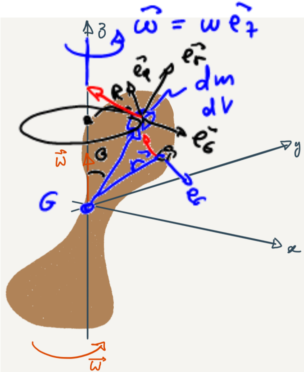
$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = M\vec{a}_G$$

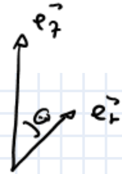
Moment cinétique et théorème du moment cinétique pour un solide

$$\vec{L}_O = \int_V \vec{r} \times dm\,\vec{v}(\vec{r})$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$$

Soit un solide en rotation autour d'un axe passant par G. On place l'axe (Gz) de manière que ce soit l'axe de rotation. Le vecteur rotation est alors $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$





$$d\vec{L} := \vec{r} \times dm\, \vec{v}$$

coord. sphérique $\quad \vec{r} = r\vec{e}_r$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

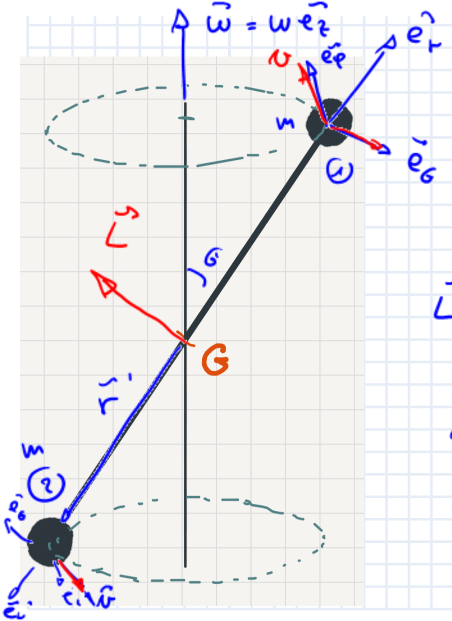
$$= \omega \vec{e}_z \times r\vec{e}_r = \omega \underbrace{r \sin\theta}_{R}\, \vec{e}_\varphi$$

$$d\vec{L} = r\vec{e}_r \times dm\, \omega r \sin\theta\, \vec{e}_\varphi$$

$$d\vec{L} = r^2 \sin\theta\, \omega\, dm\, (-\vec{e}_\theta)$$

$$\vec{L}^{tot} = \int_V d\vec{L}$$

Cas simple : "haltère" en rotation, dont la tige a une masse négligeable.



$$\vec{L}^{tot} = \vec{L}^{(1)} + \vec{L}^{(2)}$$

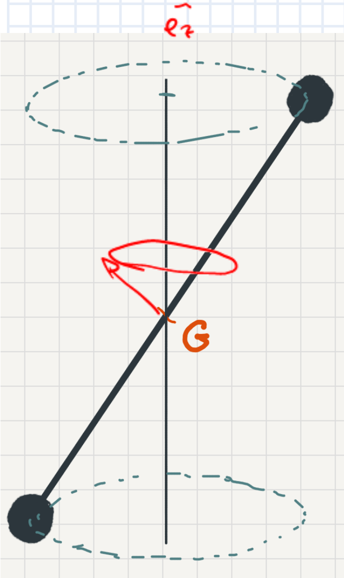
$$\vec{L}^{(1)} = \vec{r} \times m\vec{v} = -m r^2 \sin\theta\, \omega\, \vec{e}_\theta$$

$$\vec{L}^{(2)} = (-\vec{r}) \times m(-\vec{v}) = -m r^2 \sin\theta\, \omega\, \vec{e}_\theta$$

$$\vec{L}^{tot} = 2\vec{L}^{(1)} = -2 m r^2 \sin\theta\, \omega\, \vec{e}_\theta$$

$$= -M r^2 \sin\theta\, \omega\, \vec{e}_\theta$$

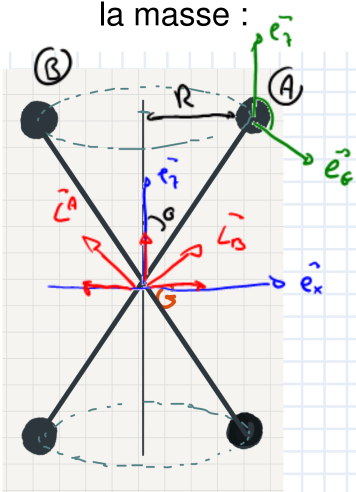
$$2m = M$$



$$\sum \vec{M}_o = \frac{d\vec{L}_o}{dt}$$

$$\neq 0$$

En général, le moment cinétique n'est pas parallèle à l'axe de rotation. Sauf si il y a une certaine symétrie dans la répartition de la masse :



$4m = M$

$$\vec{L}^{A} = 2mr^2 \sin\theta\, \omega\, (-\vec{e}_G)$$

$$\vec{L}^{B}$$

$$\vec{L}^{tot} = \vec{L}_A + \vec{L}_B = 2\, \vec{L}_A \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_G \cdot \vec{e}_z = \sin\theta$$

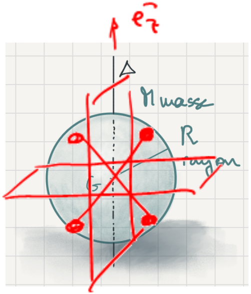
$r \sin\theta =$

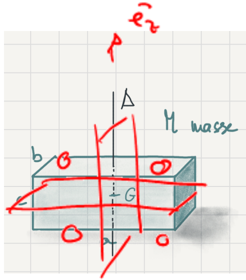
$$\vec{L}^{tot} = 4 m \underline{r^2 \sin^2}\, \omega\, \vec{e}_z$$

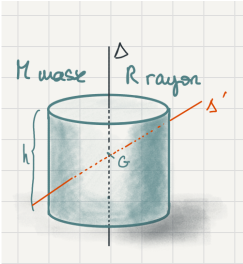
$$\vec{L} = M R^2 \omega \vec{e}_z = \underbrace{MR^2}_{I_{Gz}} \vec{\omega} = I_{z_0} \cdot \vec{\omega}$$

Dans certains cas $\vec{L}_G / / \vec{\omega}$. Alors : $\vec{L}_G = I_{Gz} \vec{\omega}$

Exemples de cas symétriques (solides usuels) :







Pour ces solide il existe des axes de symétries tels que pour une rotation autour de ces axes

$$\boxed{\vec{L}_\Delta = I_\Delta \vec{\omega}}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{axes pricipaux d'inertie}}$

$\Rightarrow$ 3 axes principaux de symétrie

Exemple

Table des matières

7 - Solide qui roule

Problématique

Parfois, on souhaite utiliser un point *non fixe* pour étudier le mouvement.

En résumé :

Pour pouvoir utiliser

$$\vec{M}_A^{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t}$$

Il faut que A

- soit fixe dans le référentiel
- OU confondu avec le c.d.m.
- OU se déplace à une vitesse colinéaire à celle du c.d.m.

Pour pouvoir calculer $\vec{L}_A$ avec $\vec{L}_A = I_{Az}\vec{\omega}$, il faut que (Az)

- soit un axe principal d'inertie
- ET que $A = G$ OU A est un point du solide à vitesse nulle.

(O, x, y, z) peuvent-ils être axes principaux d'inertie ?

Oui, si (G, x, y, z) sont axes principaux d'inertie et si O appartient à un axe principal d'inertie.

Dans ce cas, pour une rotation autour de (Oz) :

$\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ et $\vec{L}_O = I_{Oz}\vec{\omega}$.

Comparaison translation / rotation

Table des matières

8 - Tenseur d'inertie (hors programme)

Cas ou l'axe de rotation passe par G, centre de masse :

En fait, de manière générale :

$$\vec{L}_G = \underline{I}_G \vec{\omega}$$

avec :

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \int (y^2+z^2)dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int xydm & \int (x^2+z^2)dm & -\int yzdm \\ -\int xzdm & -\int yzdm & \int (x^2+y^2)dm \end{bmatrix}$$

$\underline{I}$ est le tenseur d'inertie, il dépend de l'origine et des axes choisis.

8 - Tenseur d'inertie (hors programme)

$\underline{I}$ peut aussi s'écrire comme :

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \int (x^2+y^2+z^2)dm & 0 & 0 \\ 0 & \int (x^2+y^2+z^2)dm & 0 \\ 0 & 0 & \int (x^2+y^2+z^2)dm \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} \int x^2 dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int xydm & \int y^2 dm & -\int yzdm \\ -\int xzdm & -\int yzdm & \int z^2 dm \end{bmatrix}$$

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int xydm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int yzdm \\ -\int xzdm & -\int yzdm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}$$