

IX. Moment cinétique ; Gravitation

Dr. Yves Revaz

2024

Plan du cours

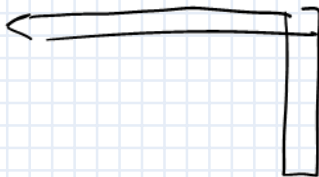
- I - Cinématique
- II - Référentiel accélérés
- III - Lois de Newton
- IV - Balistique – effet d'une force constante et uniforme
- V - Forces ; application des lois de Newton
- VI - Travail, Energie, principes de conservation
- VII - Chocs, systèmes de masse variable
- VIII - Oscillateur harmonique
- IX - Moment cinétique ; Gravitation
- X - Solide indéformable
- XI - Application du solide indéformable

Table des matières

- 1 - Moment cinétique et moment d'une force
- 2 - Force centrale
- 3 - Gravitation
- 4 - Analyse énergétique de la force gravitationnelle

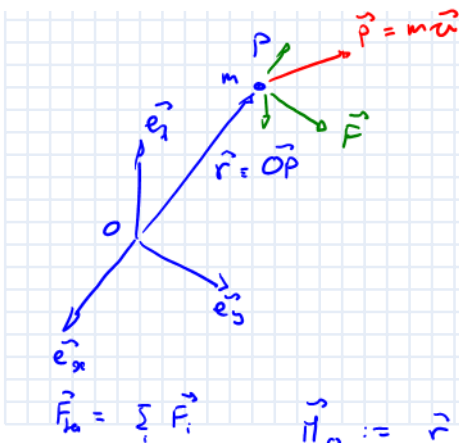
1 - Moment cinétique et moment d'une force.

Bras de levier



Le moment cinétique permet de caractériser la rotation autour d'un point O ; le moment de la force permet de caractériser la capacité d'une force à provoquer un mouvement de rotation.

Point P de masse m , ayant une quantité de mouvement $\vec{p}$ et soumis à une force extérieure $\vec{F}$.



Le Moment cinétique par rapport au point O

$$\vec{L}_O := \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Le Moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point O

$$\vec{M}_O := \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_O := \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{r} \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{M}_i$$

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

2^{ème} loi de Newton

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_O = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\frac{d}{dt} \vec{r} \times \vec{p}}_{\vec{v} \times m\vec{v} = \vec{0}} + \underbrace{\vec{r} \times \frac{d}{dt} \vec{p}}_{\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_O}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \vec{L}_O = \vec{M}_O}$$

Théorème du moment cinétique

Le **moment cinétique** par rapport au point O est :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{p}$$

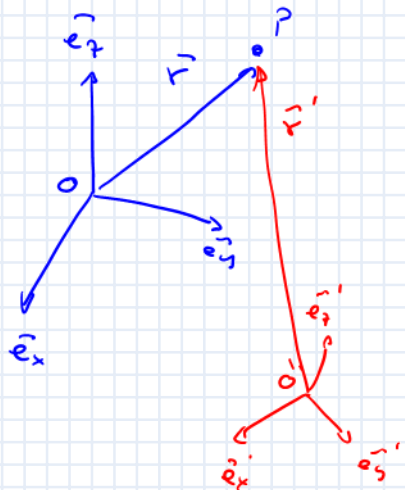
Le **moment de la force** $\vec{F}$ par rapport au point O est :

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}$$

Théorème du moment cinétique

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_O) = \vec{M}_O$$

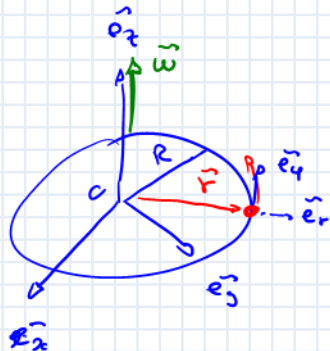
Choix du point de référence


 $\vec{M}_O$ et $\vec{L}_O$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_{O'} := \vec{r}' \times \vec{F} \\ \vec{L}_{O'} := \vec{r}' \times \vec{p} \end{array} \right.$$

↑

Exemple 1 : mouvement circulaire



Coord. cylindriques

$$\vec{r} = r \vec{e}_r = R \vec{e}_r$$

$$\vec{v} = r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \cancel{r \dot{r} \vec{e}_r} = R \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

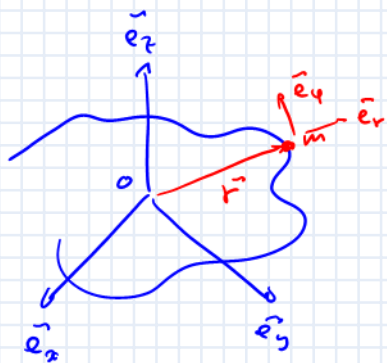
$$\omega = \dot{\varphi} \quad \text{vitesse angulaire}$$

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_z \quad \text{vecteur rotation}$$

$$\vec{L}_o := \vec{r} \times m \vec{v} = m (R \vec{e}_r \times R \omega \vec{e}_\varphi) = m R^2 \omega \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{L}_o = m R^2 \vec{\omega}}$$

Exemple 2 : mouvement curviligne plan en coordonnées cylindriques



$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

$$\vec{r} = r(t) \vec{e}_r$$

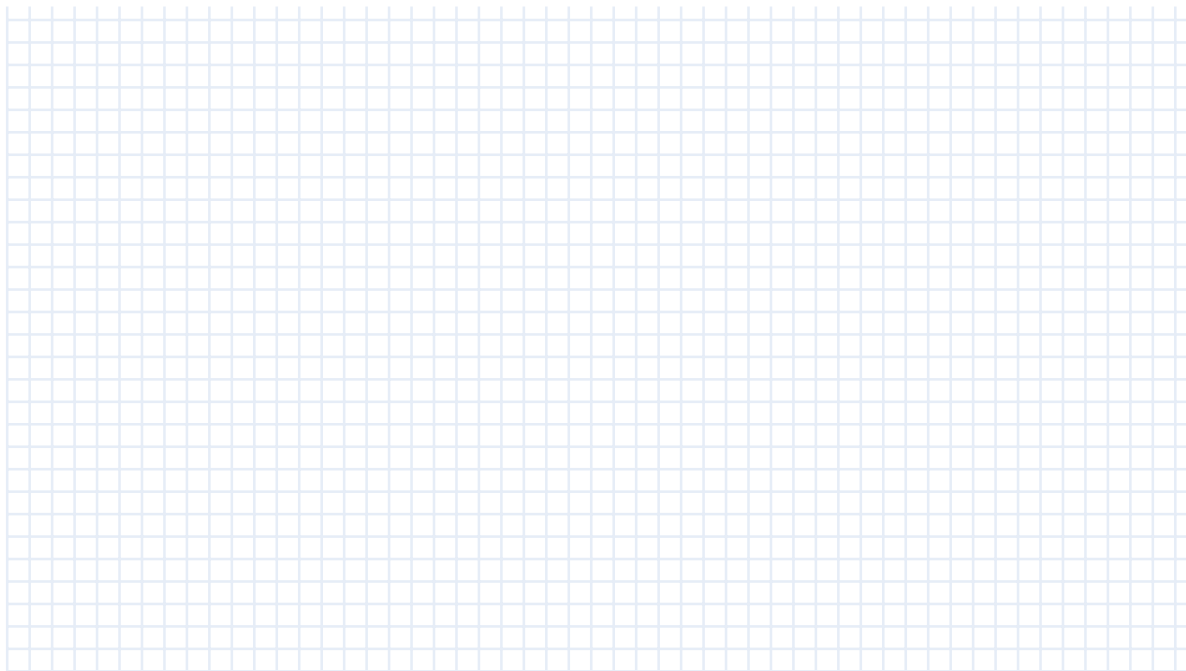
$$\vec{u} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{L}_O := m (\vec{r} \times \vec{u})$$

$$= m (r \vec{e}_r \times (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi))$$

$$= m r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{L}_O = m r_{(t)}^2 \vec{\omega}(t)}$$



Corollaire du théorème du moment cinétique :
Le moment cinétique d'un système isolé est constant (est une grandeur conservée)

En effet, si le système est isolé, alors

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = 0$$

et donc

$$\vec{M}_0 = 0$$

Et comme, d'après le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_0) = \vec{M}_0 = 0$$

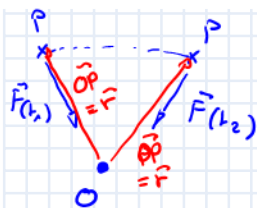
on en déduit que :

$$\vec{L}_0 = cte$$

Table des matières

- 1 - Moment cinétique et moment d'une force
- 2 - Force centrale
- 3 - Gravitation
- 4 - Analyse énergétique de la force gravitationnelle

2 - Force centrale



Une force centrale de centre O est telle que $\vec{F}$ est toujours colinéaire à $O\vec{P}$

$$\vec{F} \sim \vec{r}$$

$$\vec{M}_O := \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \alpha \vec{r} = \alpha (\underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}) = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O \text{ est conservé}$$

Le moment cinétique par rapport à O d'un objet soumis à une force centrale de centre O est constant

Résumé :

Une force centrale de centre O est telle que $\vec{F}$ colinéaire à $\vec{OP}$

Le moment par rapport à O d'une force centrale de centre O est nul.

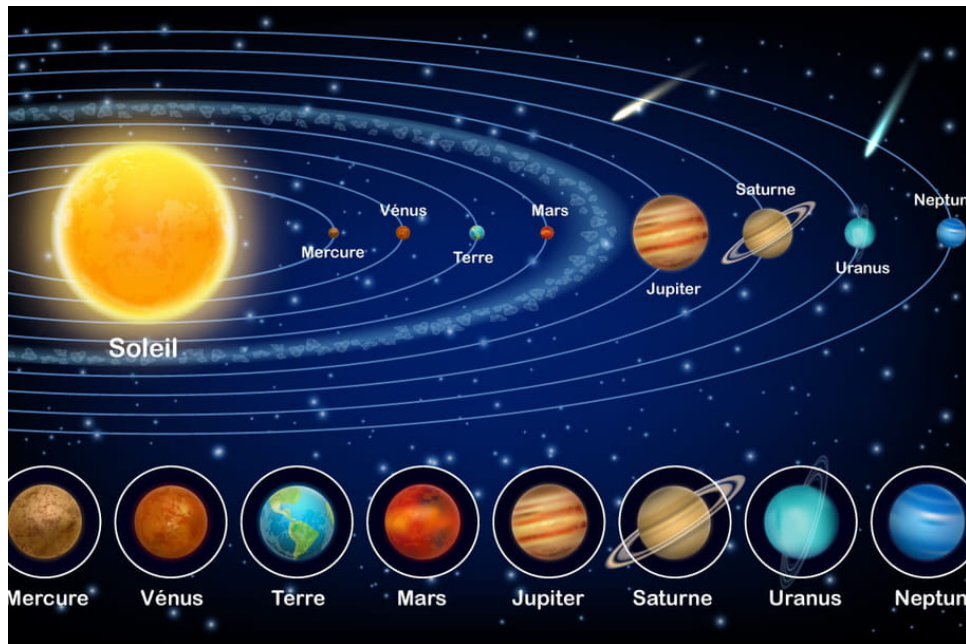
Donc le moment cinétique par rapport à O d'un point soumis à une force centrale de centre O est constant

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_O = \vec{0}$$

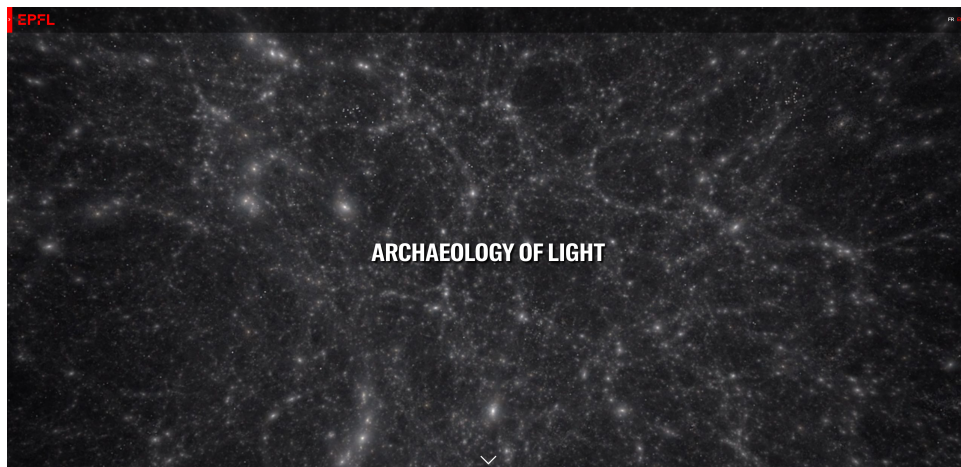
Table des matières

- 1 - Moment cinétique et moment d'une force
- 2 - Force centrale
- 3 - Gravitation
- 4 - Analyse énergétique de la force gravitationnelle





3 - Gravitation : les grandes structures de l'Univers



<https://longread.epfl.ch/en/dossier/archaeology-of-light/>

3 - Gravitation : les galaxies



3 - Gravitation

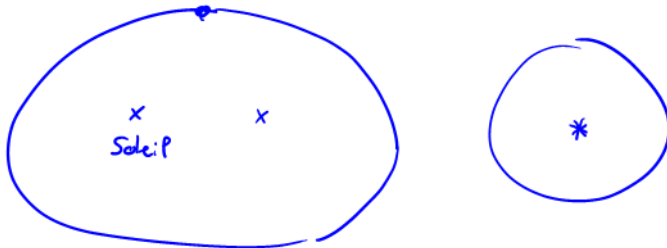
Rappel historique : lois de Kepler (1571-1630) :



3 - Gravitation

Rappel historique : lois de Kepler (1571-1630) :

1– Les planètes tournent autour du Soleil en décrivant des ellipses dont cet astre occupe un des foyers.



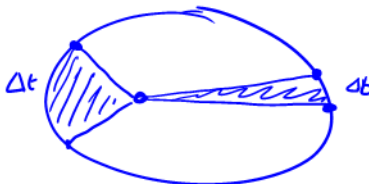
3 - Gravitation

Rappel historique : lois de Kepler (1571-1630) :

1– Les planètes tournent autour du Soleil en décrivant des ellipses dont cet astre occupe un des foyers.



2– Les aires des surfaces décrites par les rayons vecteurs sont proportionnelles aux temps employés à les balayer.



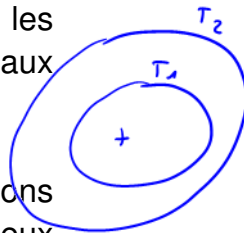
3 - Gravitation

Rappel historique : lois de Kepler (1571-1630) :

1– Les planètes tournent autour du Soleil en décrivant des ellipses dont cet astre occupe un des foyers.



2– Les aires des surfaces décrites par les rayons vecteurs sont proportionnelles aux temps employés à les balayer.



3– Les carrés des temps des révolutions des planètes autour du Soleil sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites.

$$T^2 \sim a^3$$

$$T \sim a^{3/2}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} \sim \frac{a_1^3}{a_2^3}$$



Grâce aux lois de Kepler, Newton arrive à l'expression de la force de gravitation.



$$|\vec{F}_G| \sim \frac{1}{r^2}$$

$$\vec{F}_G \sim \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = - \vec{F}_{m \rightarrow M}$$

$$\vec{F}_G \sim - \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\boxed{\vec{F}_G = - \frac{G M m}{r^2} \vec{e}_r}$$

$$\boxed{G = 6.674 \dots \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}}$$

Théorèmes de Newton

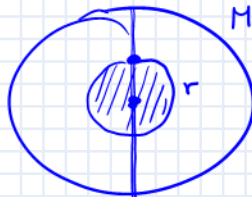
1^{er} th. de Newton



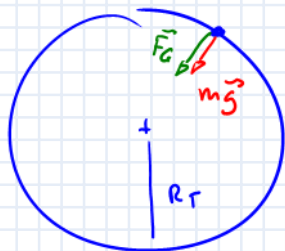
$\equiv$



2^{ème} th. de Newton



Force sera générée par la masse
dans le rayon r $M(r)$

Liens entre gravitation et poid.

$$\left. \begin{aligned} \vec{p} &= m \vec{g} \\ \vec{F}_G &= - \frac{GMm}{R_T^2} \vec{e}_r \end{aligned} \right\}$$

$$\cancel{m} \vec{g} = \frac{GM \cancel{m}}{R_T^2}$$

$$\boxed{g = \frac{GM_T}{R_T^2}}$$

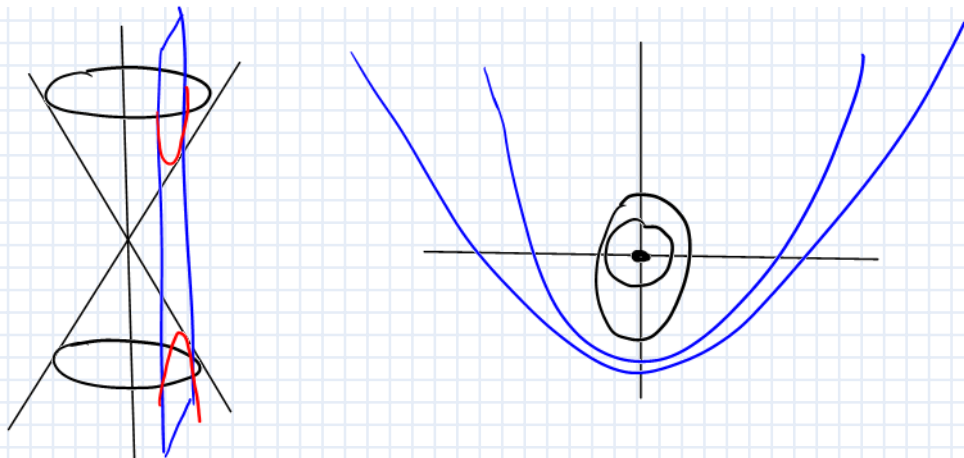
Des lois de Newton on retrouve les lois de Kepler (élargies)

$$\vec{F}_a + m\vec{a} = \vec{F}$$

$\Rightarrow$

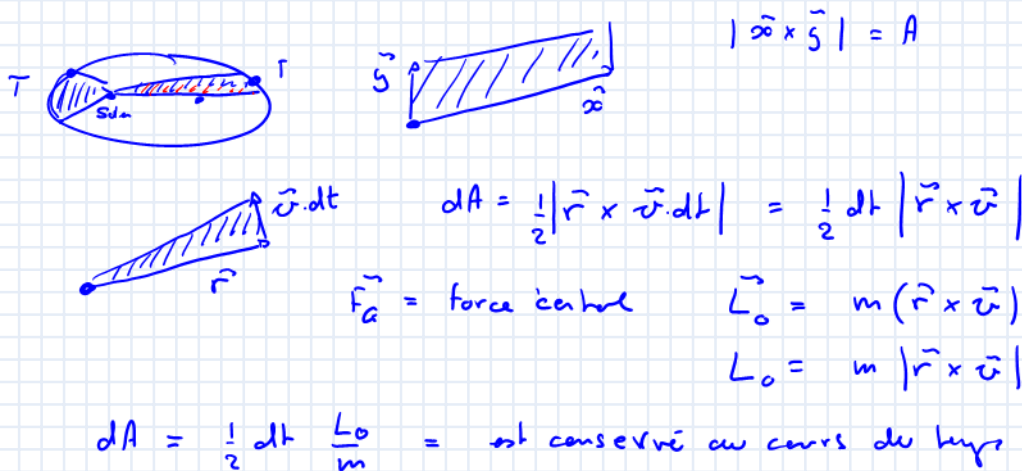
Des lois de Newton on retrouve les lois de Kepler (élargies)

Le mouvement d'un objet dans le champ de gravitation créé par une masse ponctuelle est une cône. La masse ponctuelle occupe le foyer.



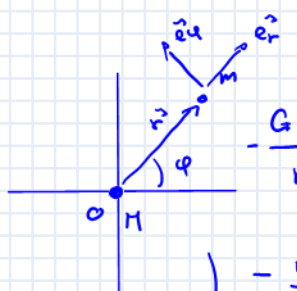
Deuxième loi de Kepler

Les aires des surfaces décrites par les rayons vecteurs sont proportionnelles aux temps employés à les balayer.



Cas le plus simple : mouvement circulaire

analyser le mouvement ; montrer qu'il est uniforme ; Calculer la vitesse en fonction du rayon de la trajectoire.



$$\vec{F}_a = - \frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r \quad r \rightarrow R$$

$$-\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r = \vec{F}_G = m\vec{a} = m \left(-\frac{v^2}{r} \vec{e}_r + \frac{dv}{dt} \vec{e}_\varphi \right)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{mv^2}{R} &= -\frac{GMm}{R^2} \\ m \frac{dv}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = \text{cte}$$

$$-\frac{mv^2}{R} = -\frac{GMm}{R^2}$$

$$v^2 = \frac{GM}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

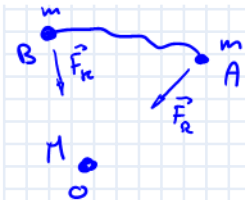
$$T \sim R^{\frac{3}{2}}$$

Table des matières

- 1 - Moment cinétique et moment d'une force
- 2 - Force centrale
- 3 - Gravitation
- 4 - Analyse énergétique de la force gravitationnelle

4 - Analyse énergétique de la force gravitationnelle

Énergie potentielle de gravitation :



$$W_{AB} \stackrel{?}{=} E_{p,A} - E_{p,B}$$

$$= \int_A^B -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r}$$

$$d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$$

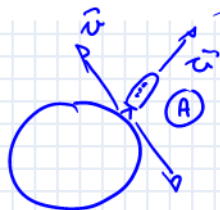
$$= (\dot{r} \vec{e}_r + r^2 \cancel{\dot{\varphi} \vec{e}_\varphi} + r \dot{\varphi} \cancel{\sin \theta} \vec{e}_\theta) \cdot dt$$

$$W_{AB} = \int_A^B -\frac{GMm}{r^2} \dot{r} dt = -GMm \int_A^{B \text{ t}_3} \frac{\dot{r}}{r^2} dt = -GMm \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2}$$

$$W_{AB} = -GMm \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_B}^{r_A} = \underbrace{-\frac{GMm}{r_A}}_{E_{p,A}} - \underbrace{\left[-\frac{GMm}{r_B} \right]}_{E_{p,B}} \quad \left| \begin{array}{l} d\vec{r} = \frac{dr}{dt} dt = dr \\ E_G = -\frac{GMm}{r} \end{array} \right|$$

Vitesse de libération

Quelle est la vitesse de libération d'un objet sur Terre ? (Vitesse qu'il faut communiquer à un objet pour qu'il échappe à l'attraction gravitationnelle de la terre)



$$E_A = E_B$$

$$E_{G,p}^A + E_{cin}^A = 0 + 0$$

$$-\frac{GMm}{R_T} + \frac{1}{2}mv^2 = 0$$

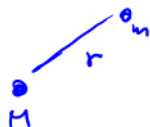
$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}}$$

$$11 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$



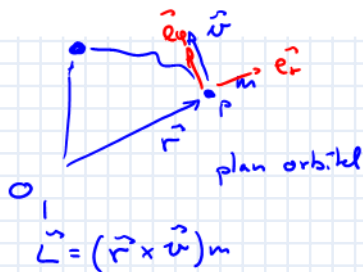
Notion d'énergie potentielle effective

Conservation de l'énergie



$$E = E_c + E_p = \text{cte}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = \text{cte}$$



$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi)$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\vec{L} = m r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_2 = \text{cte}$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{L^2}{m^2 r^4}$$

$$\dot{u}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{L_0^2}{m^2 r^4}$$

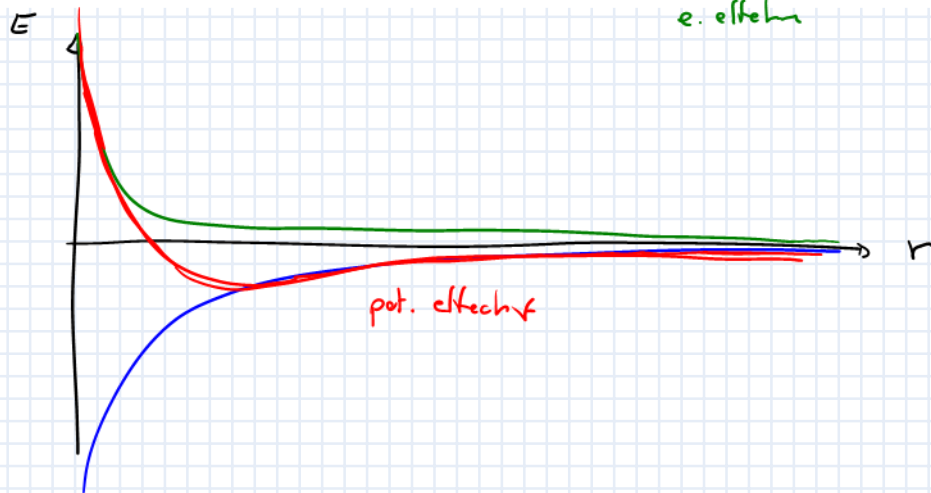
$$E = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{r}^2}_{E_c} + \left[\underbrace{\frac{1}{2} \frac{L_0^2}{m r^2}}_{E_p} - \underbrace{\frac{GMm}{r}}_{E_p} \right]$$

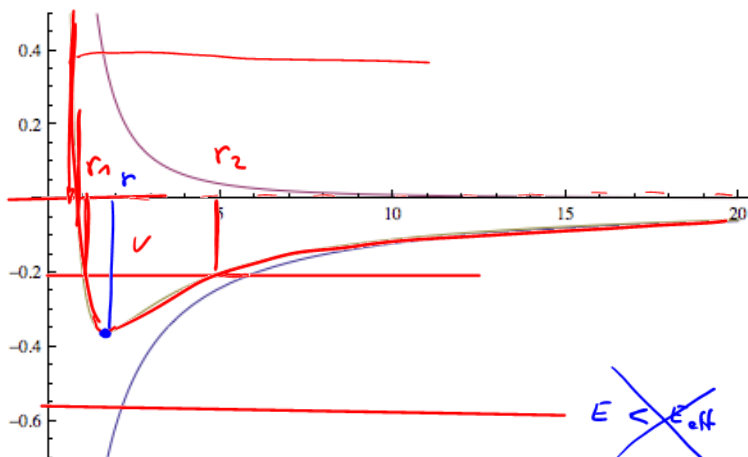
$$\underbrace{\hspace{10em}}_{E_c} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{E_p}$$

Potential effectif

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{L_O^2}{m r^2}}_{\text{e. efficace}} - \frac{GmM}{r}$$



$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{\text{eff}}$$



$$\cancel{E < E_{\text{eff}}} = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{r}^2}_{< 0} + E_{\text{eff}}$$