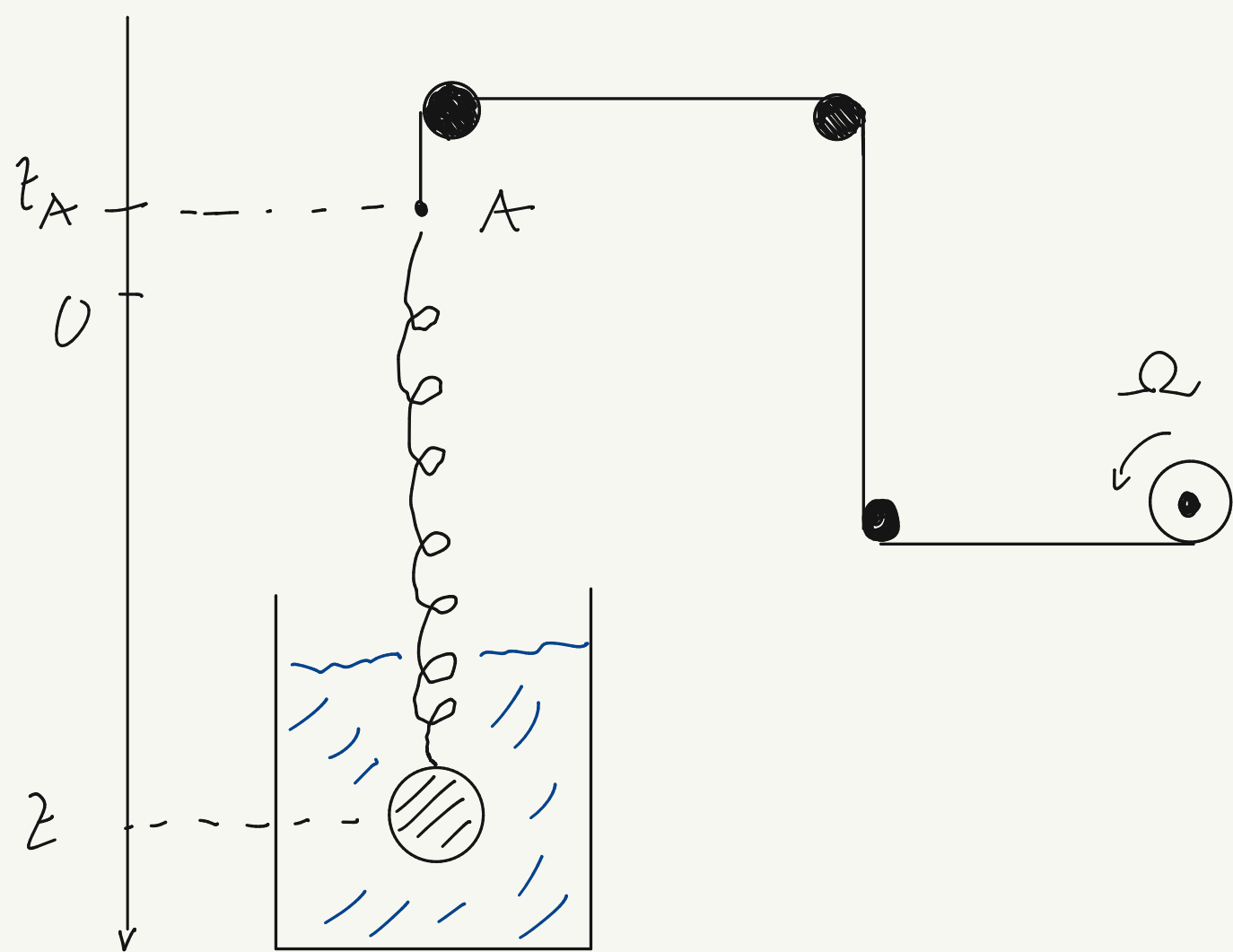


1) Oscillateur harmonique forcé

On considère un oscillateur harmonique dont le point de suspension A est animé d'un mouvement oscillatoire harmonique de pulsation Ω qu'on peut varier à volonté, c'est-à-dire $z_A = h \cos(\Omega t)$



Equation du mouvement :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{ress}} + \vec{F}_{\text{usc}}$$

Projection sur Oz :

$$m\ddot{z} = mg - k(z - z_A(t) - l) - \lambda \dot{z} + F_0 \cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow m\ddot{z} + \lambda \dot{z} + k(z - l) - mg = F_0 \cos(\Omega t)$$

En posant $x = z - l - \frac{mg}{k}$, $F_0 = kh$, on obtient :

$$m\ddot{x} + \lambda \dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t) \quad (*)$$

équation oscillateur forcé

F_0 : amplitude de la force oscillante

Ω : pulsation de la force oscillante

l : longueur au repos du ressort

Solution générale de (*)

2)

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

solution générale
de l'équation homogène
($F_0 = 0$)

solution particulière
de (*)

En présence de frottement, $x(t) = x_h(t) + x_p(t) \rightarrow x_p(t)$

La solution $x_p(t)$ s'appelle le régime permanent
Quand $x_h(t)$ n'est pas négligeable, on parle
de régime transitoire.

Régime permanent

On cherche des solutions particulières de la forme

$$x_p(t) = A \cos(\Omega t + \delta) \quad (**)$$

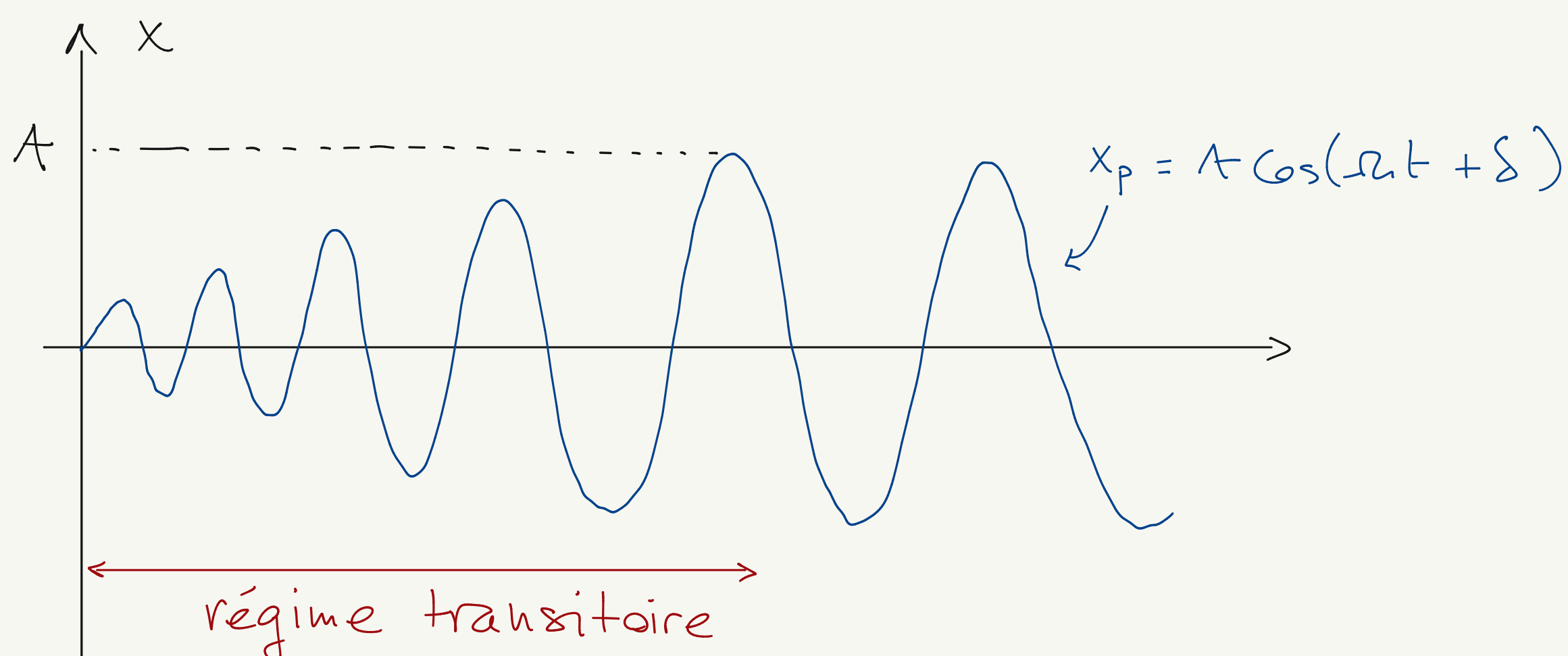
↗ déphasage

En combinant les équations (*) et (**), on
obtient (exercice):

$$\tan \delta = \frac{\lambda}{m} \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}, \quad A = \frac{F_0}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 m^2 + \Omega^2 \lambda^2}} \quad (***)$$

Conclusion :

$$x(t) = x_h(t) + A \cos(\Omega t + \delta)$$



Résonances

De (***) , on voit que si $\Omega = \omega_0$, alors

$$A = \frac{1}{\lambda} \frac{F_0}{\omega_0}$$

Et si les frottements sont faibles ($\lambda \simeq 0$), l'amplitude du mouvement permanent devient très grande. On parle alors de résonance.

Énergie et puissance dissipée

On suppose que le régime permanent est atteint. Le système absorbe continuellement de l'énergie qui est dissipée par les forces de frottements.

Pendant une période T ,

$$\begin{aligned} E^{\text{diss}} &= \Delta W^{\text{ext}} = -\Delta W^{\text{fr}} = \int_0^T dt \vec{F} \cdot \vec{v} \\ &= \int_0^T K \eta A^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t + \delta) dt \\ &= K \eta A^2 \Omega^2 \int_0^T \sin^2(\Omega t + \delta) dt \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
&= K \eta A^2 \Omega^2 \int_{\delta}^{\Omega T + \delta} \frac{1}{\Omega} \sin^2(\theta) d\theta \\
&= K \eta A^2 \Omega \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_{\delta}^{\Omega T + \delta} \\
&= K \eta A^2 \Omega \left\{ \frac{1}{2} (\Omega T + \delta - \delta) - \frac{1}{4} [\sin(2(\Omega T + \delta)) - \sin(2\delta)] \right\} \\
&= K \eta A^2 \Omega \left\{ \frac{1}{2} 2\pi - \frac{1}{4} [\sin 2\pi \cos 2\delta + \sin 2\delta \cos 2\pi - \sin 2\delta] \right\} \\
&\quad - \sin 2\delta] \}
\end{aligned}$$

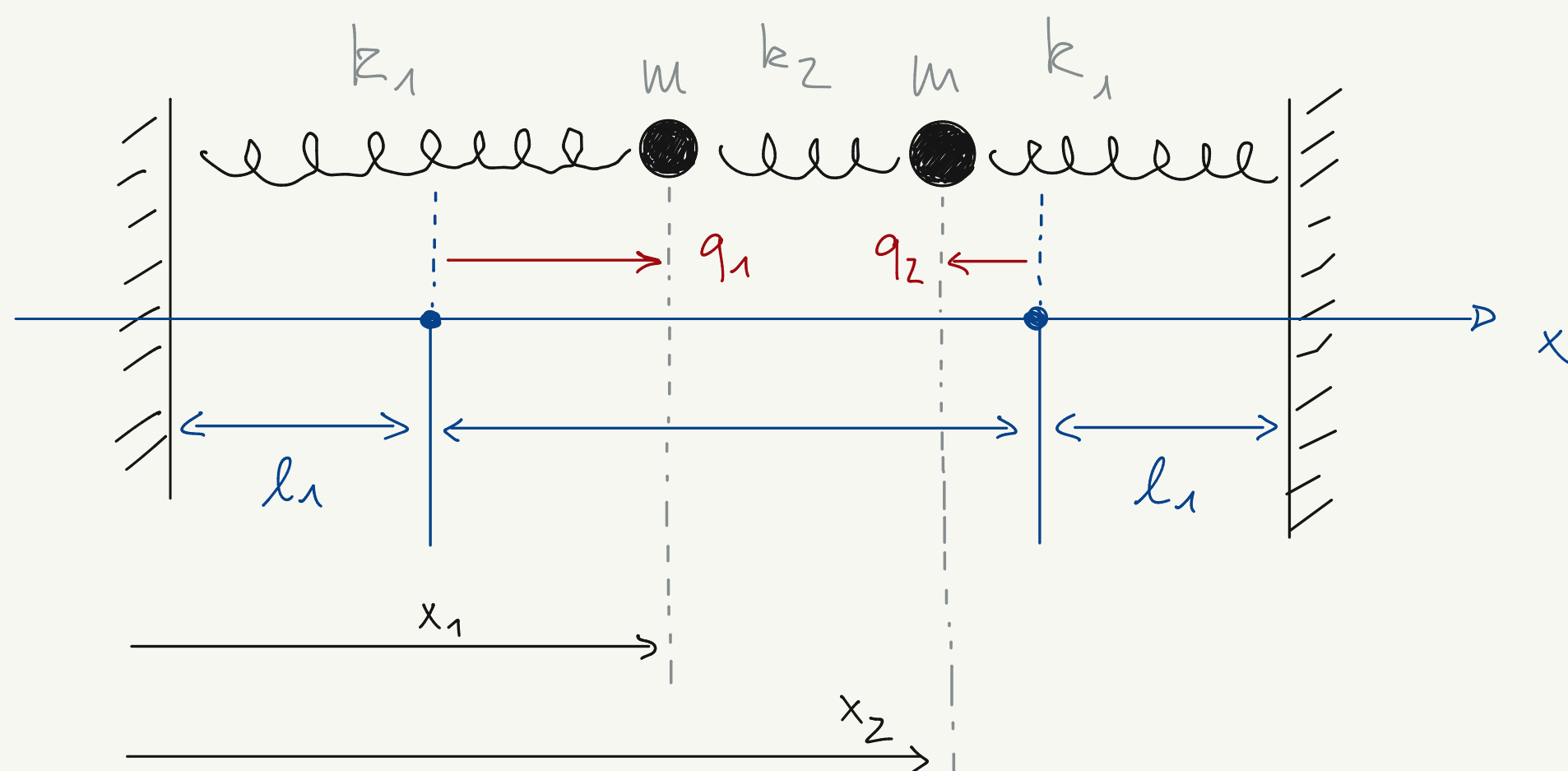
$$\Rightarrow E_{\text{diss}} = K \eta A^2 \Omega \pi$$

On peut alors déterminer la puissance moyenne :

$$\langle P \rangle = \frac{E_{\text{diss}}}{T} = \frac{1}{2} K \eta A^2 \Omega^2$$

Oscillateurs harmoniques couplés

On considère le montage suivant :

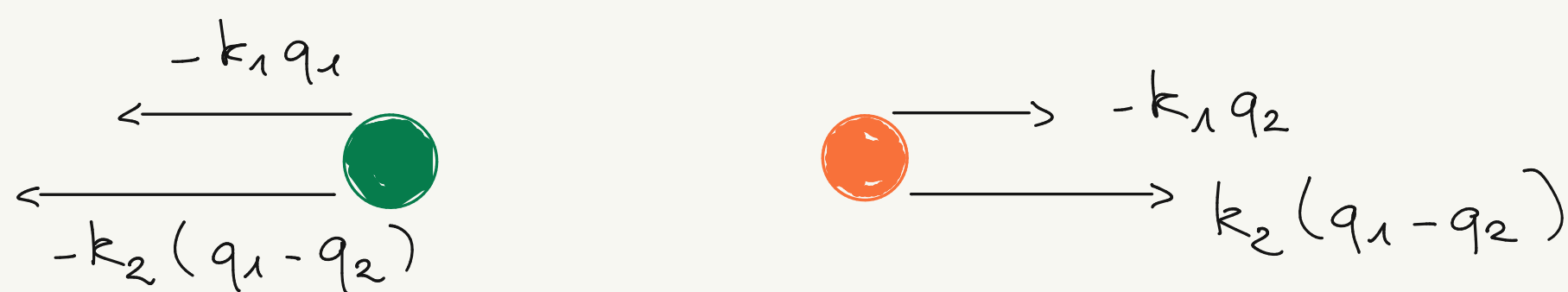


$$q_1 = x_1 - l_1$$

$$q_2 = x_2 - l_2 - l_1$$

$l_1, l_1 + l_2$: positions d'équilibre

Bilan des forces



Equations du mouvement (autour de l'équilibre):

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 (x_1 - l_1) + k_2 (x_2 - x_1 - l_2) \\ m \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1 - l_2) + k_1 (l_1 + l_2 - x_2) \end{cases}$$

||
v

$$\begin{cases} m \ddot{q}_1 + (k_1 + k_2) q_1 - k_2 q_2 = 0 \\ m \ddot{q}_2 - k_2 q_1 + (k_1 + k_2) q_2 = 0 \end{cases} \quad \text{équations couplées!}$$

On cherche alors des solutions de la forme :

$$q_1 = C_1 \cos(\omega t + \varphi), \quad q_2 = C_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

On a alors directement les conditions suivantes :

$$\begin{cases} (-m\omega^2 + k_1 + k_2) C_1 - k_2 C_2 = 0 \\ -k_2 C_1 + (-m\omega^2 + k_1 + k_2) C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -m\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m\omega^2 + k_1 + k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour que des solutions existent, on doit avoir :

6)

$$\det A = 0 \Rightarrow (-m\omega^2 + k_1 + k_2)^2 - k_2^2 = 0$$

et on obtient alors 2 solutions pour ω :

$$\omega_+ = \sqrt{k_1/m}, \quad \omega_- = \sqrt{\frac{2k_2 + k_1}{m}}$$

- Pour ω_+ , la solution associée est $C_1 = C_2 \equiv C_+$ et donc :

$$q_1(t) = q_2(t) = C_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+)$$

MODE

"ACOUSTIQUE"

- Pour ω_- , la solution associée est $C_1 = -C_2 \equiv C_-$, et donc :

$$q_1(t) = -q_2(t) = C_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)$$

MODE

"OPTIQUE"

Solution générale

$$\begin{cases} q_1 = C_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + C_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \\ q_2 = C_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) - C_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \end{cases}$$

et les constantes C_- , C_+ , φ_- , φ_+ sont données par les conditions initiales.

Battements

7)

On considère $C_- = C_+ = C$ et $\varphi_- = \varphi_+ = 0$
ce qui donne :

$$\begin{aligned} q_1(t) &= 2C \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right) \cos\left(\frac{1}{2}\omega t\right) & \omega &\equiv \omega_+ + \omega_- \\ q_2(t) &= -2C \sin\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right) \sin\left(\frac{1}{2}\omega t\right) & \Delta\omega &\equiv \omega_+ - \omega_- \end{aligned}$$

On a donc un phénomène dit de "battement".

↳ superposition de deux mouvements

Énergie mécanique du système

- Énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

- Énergie potentielle

$$E_p = \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + \frac{1}{2} k_1 q_2^2 + \frac{1}{2} k_2 (q_1 - q_2)^2$$

$$= \frac{1}{2} (k_1 + k_2) q_1^2 + \frac{1}{2} (k_1 + k_2) q_2^2 - \boxed{k_2 q_1 q_2}$$

énergie de
couplage

