

SV Physique I - 11

C. Hébert
LSME-IPHYS-SB-EPFL
Cecile.hebert@epfl.ch

2 décembre 2020

Plan du cours

- I - Introduction, outils de base, cinématique
- II - Référentiel accélérés
- III - Lois de Newton
- IV - Balistique – effet d'une force constante et uniforme
- V - Bilan des forces ; application des lois de Newton
- VI - Travail, Energie, principes de conservation
- VII - Chocs, systèmes de masse variable
- VIII - Oscillateur harmonique
- IX - Moment cinétique ; Gravitation
- X - Solide indéformable
- XI - **Application du solide indéformable**

XI. Dynamique du solide indéformable : applications

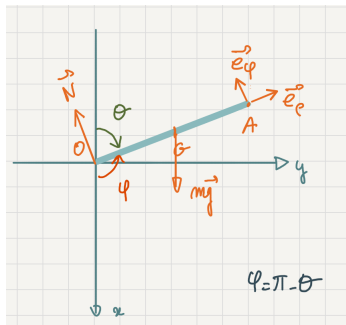
XI-1. Chute d'une barre.

XI-2. Mouvement gyroscopique

└ XI. Dynamique du solide indéformable : applications

└ XI-1. Chute d'une barre.

XI-1. Chute d'une barre.



Barre homogène de masse m et de longueur l

Pivote autour de O , point fixe.

Forces: $m\vec{g}$ et $\vec{N}$

O fixe dans $\mathcal{R}$ et point du solide à vitesse nulle;

Rotation autour de (O_3) axe principal d'inertie

$$\sum \vec{\sigma}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

$$\begin{aligned} \sum \vec{\sigma}_O &= \cancel{\vec{OO} \times \vec{N}} + \vec{OG} \times m\vec{g} = \frac{l}{2} mg \sin \theta (-\vec{e}_3) \\ &= -\frac{l}{2} mg \sin(\pi - \theta) \vec{e}_3 = -\frac{l}{2} mg \sin \theta \vec{e}_3 \end{aligned}$$

└ XI. Dynamique du solide indéformable : applications

└ XI-1. Chute d'une barre.

$$\vec{L}_O = I_{O_3} \vec{\omega} = I_{O_2} \omega \vec{e}_3 = I_{O_2} (-\dot{\theta} \vec{e}_3)$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= I_{O_2} \vec{\omega} = I_{O_2} \dot{\varphi} \vec{e}_3 & \varphi = \pi - \theta &\Rightarrow \dot{\varphi} = -\dot{\theta} \\ &= -I_{O_2} \dot{\theta} \vec{e}_3 \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = -I_{O_2} \ddot{\theta} \vec{e}_3 \quad I_{O_2} = I_{G_2} + \left(\frac{l}{2}\right)^2 m = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2$$

$$= \frac{1}{3} ml^2$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right) = + \frac{1}{3} \cancel{ml^2} \ddot{\theta} \vec{e}_3 = + \frac{\cancel{ml^2}}{2} \sin\theta \vec{e}_3 \Rightarrow \frac{l}{3} \ddot{\theta} = \frac{g}{2} \sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{2} \frac{g}{l} \sin\theta$$

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{2} \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

$\underbrace{\frac{g}{2} \frac{g}{l}}_{\Omega_0^2}$

└ XI. Dynamique du solide indéformable : applications

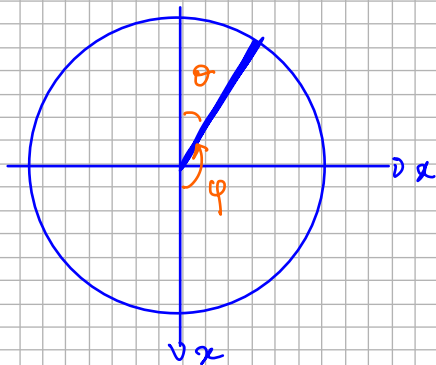
└ XI-1. Chute d'une barre.

$$\varphi = \pi - \theta \quad \theta = \pi - \varphi$$

$$-\ddot{\varphi} - \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin(\pi - \varphi) = 0$$

$$\ddot{\theta} = -\ddot{\varphi} \quad \ddot{\theta} - \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \varphi = 0}$$

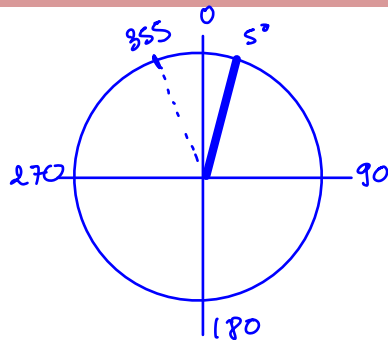
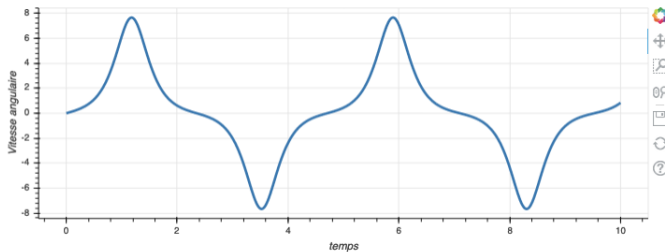
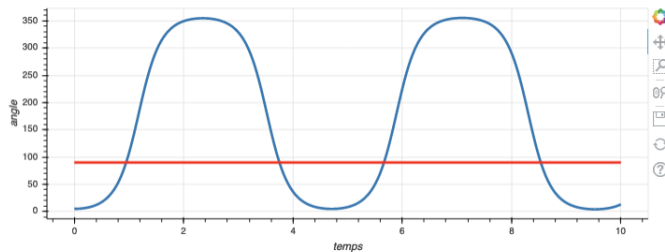


$$\ddot{\theta} - l_0^2 \sin \theta = 0 \quad l_0^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l}$$

Conditions initiales $\left. \begin{array}{l} \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{array} \right\}$

└ XI. Dynamique du solide indéformable : applications

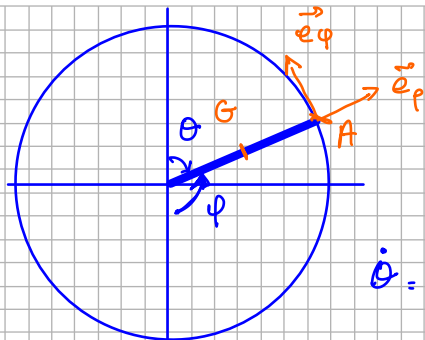
└ XI-1. Chute d'une barre.



└ XI. Dynamique du solide indéformable : applications

└ XI-1. Chute d'une barre.

Analyse du vecteur accélération



A mouvement circulaire rayon l
G ————— $l/2$

$$\vec{a}(A) = -\rho \dot{\varphi}^2 \vec{e}_\rho + \rho \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$= -l \dot{\varphi}^2 \vec{e}_\rho + l \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$= -l \ddot{\theta} \vec{e}_\rho - l \ddot{\theta} \vec{e}_\varphi$$

$$= -l \ddot{\theta} \vec{e}_\rho - l l^2 \sin \theta \ddot{\theta} \vec{e}_\varphi$$

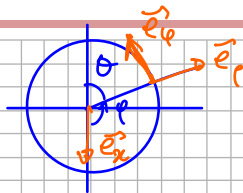
$$\vec{a}_A(t) = -l \ddot{\theta}(t) \vec{e}_\rho - l l^2 \sin \theta(t) \ddot{\theta} \vec{e}_\varphi$$

└ XI. Dynamique du solide indéformable : applications

└ XI-1. Chute d'une barre.

Composante verticale de $\vec{a}_A$: $\vec{a}_A \cdot \vec{e}_x$

$$\vec{a}_A \cdot \vec{e}_x = -l \ddot{\theta}^2 \underbrace{\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_x}_{-\cos\theta} - l \omega^2 \sin\theta \underbrace{\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_x}_{-\sin\theta}$$



$$= l \ddot{\theta}^2 \cos\theta + l \omega^2 \sin^2\theta = l \ddot{\theta}^2 \cos\theta + \cancel{l} \cdot \frac{3}{2} \frac{g}{\cancel{l}} \sin^2\theta$$

$$\vec{a}_A \cdot \vec{e}_x = l \ddot{\theta}^2 \cos\theta + \frac{3}{2} g \sin^2\theta$$

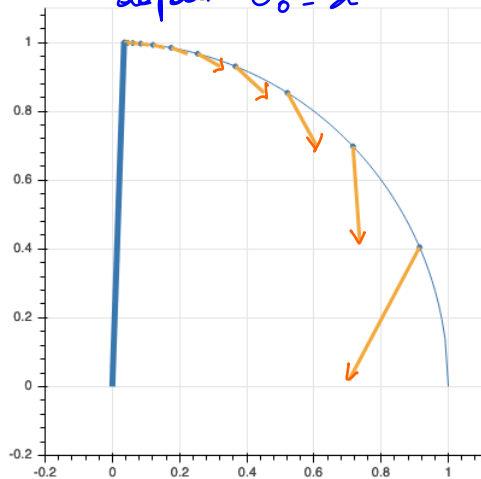
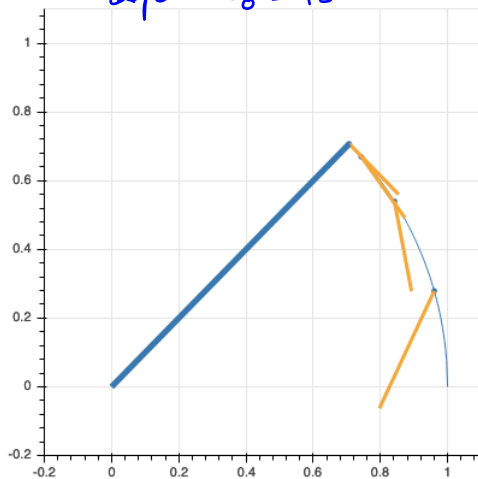
$$\text{à } t=0 \quad \dot{\theta}=0$$

$$\vec{a}_G \cdot \vec{e}_x = \frac{1}{2} \left(l \ddot{\theta}^2 \cos\theta + \frac{3}{2} g \sin^2\theta \right)$$

$$\text{à } t=0 \quad \vec{a}_A \cdot \vec{e}_x = \frac{3}{2} g \sin^2\theta \quad \text{et} \quad \vec{a}_G \cdot \vec{e}_x = \frac{3}{4} g \sin^2\theta$$

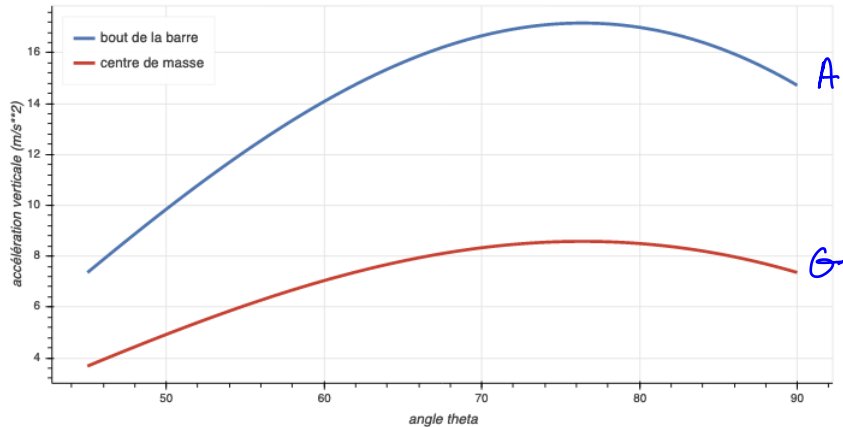
└ XI. Dynamique du solide indéformable : applications

└ XI-1. Chute d'une barre.

départ $\theta_0 = 2^\circ$ départ $\theta_0 = 45^\circ$ 

└ XI. Dynamique du solide indéformable : applications

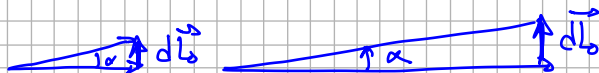
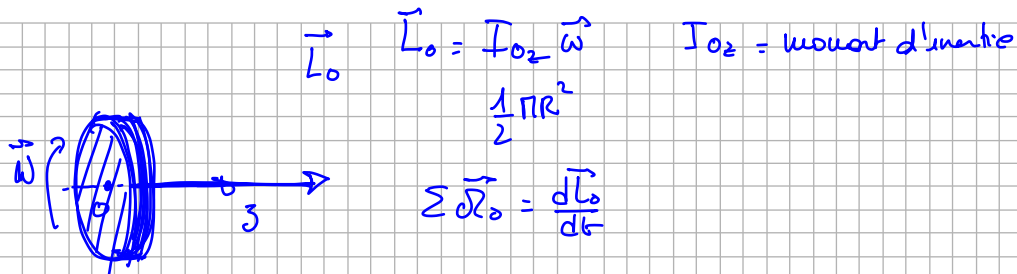
└ XI-1. Chute d'une barre.



└ XI. Dynamique du solide indéformable : applications

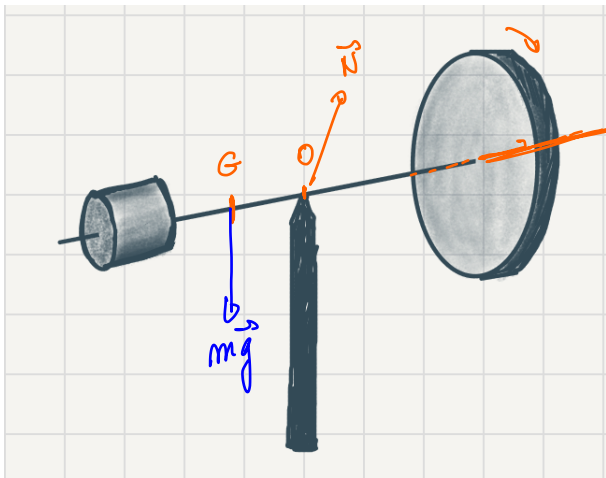
└ XI-2. Mouvement gyroscopique

XI-2. Mouvement gyroscopique



- XI. Dynamique du solide indéformable : applications

- XI-2. Mouvement gyroscopique



$$\sum \vec{\mathcal{L}}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

$$\vec{p} = m\vec{g}$$

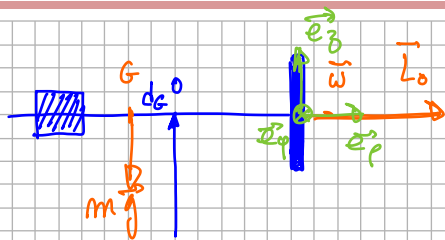
$$\vec{N} \text{ en } \vec{o}$$

$$\sum \vec{\mathcal{L}}_O = \underbrace{\vec{OO} \wedge \vec{N}}_{\vec{o}} + \vec{OG} \wedge m\vec{g}$$

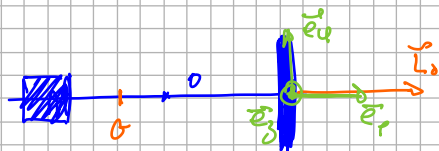
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_{O2} \dot{\vec{\omega}} = \vec{OG} \wedge m\vec{g}$$

└ XI. Dynamique du solide indéformable : applications

└ XI-2. Mouvement gyroscopique



$$\begin{aligned}\sum \vec{\mathcal{L}}_O &= \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OG} \wedge m\vec{g} \\ &= -d_G \vec{e}_r \wedge (-mg \vec{e}_3) \\ &= d_G mg \underbrace{\vec{e}_r \wedge \vec{e}_3}_{-\vec{e}_\varphi}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sum \vec{\mathcal{L}}_O &= -d_G mg \vec{e}_\varphi \\ \vec{L}_O &= I_{O3} \vec{\omega} \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_{O2} \dot{\vec{\omega}}\end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_{O2} \frac{d}{dt}(\omega \vec{e}_r) = I_{O2} \omega \dot{\vec{e}}_r = I_{O2} \omega \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$-d_G mg \vec{e}_\varphi = I_{O2} \omega \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\dot{\varphi} = - \frac{d_G mg}{I_{O2} \omega}$$

- XI. Dynamique du solide indéformable : applications

- XI-2. Mouvement gyroscopique

le gyroscope se met en rotation autour de l'axe vertical
à la vitesse angulaire $\dot{\varphi} = \Omega = - \frac{d_G mg}{I_{Oz} \omega}$

Ce mouvement s'appelle la précession

