Exercice 1 Un architecte d'urbanisme veut créer une chute d'eau artificielle dans un parc. de l'eau circulant à une vitesse de $1,70$ m/s dans un canal horizontal va tomber du haut d'un mur vertical d'une hauteur de $h = 2,35$ m et tomber dans un bassin.

a) Est-ce que l'espace entre le mur et le point de chute de l'eau sera suffisant pour laisser passer un piéton ? (estimer à la louche la largeur d'un piéton)

b) Pour présenter son projet au conseil municipal de la ville, l'architecte doit produire une maquette à l'échelle 1/12. Quelle doit être la vitesse de l'eau dans le canal pour que l'espace entre le mur et le point de chute de l'eau soit à l'échelle ?

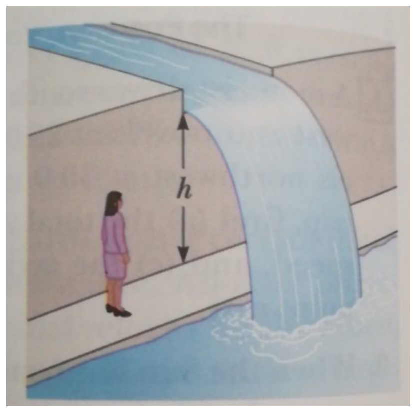

FIGURE 1 – Schématisation de la situation

Exercice 2 Depuis 2015, la société Novespace utilise un avion de type airbus A310 pour effectuer des vols paraboliques dans le cadre de la recherche. Les vols paraboliques se déroulent tous de la même manière, comme le montre la figure . L'avion part d'une altitude de 24000 pieds soit 7315 m pour atteindre une altitude de 31000 pieds soit 9450 m. De la, il se met à suivre une trajectoire parabolique avec une vitesse initiale de 143 m/s et un angle initial de 45°. Il termine cette phase parabolique avec une vitesse de 143 m/s et un angle de 45°, le nez incliné vers le bas. C'est durant cette période que l'avion est en situation de microgravité et que les scientifiques se sentent comme en apesanteur et peuvent mener leurs expériences.

a) Déterminer la vitesse de l'avion au sommet de la parabole

b) Déterminer l'altitude de l'avion au sommet de la parabole

c) Combien de temps l'avion passe-t-il en microgravité ?

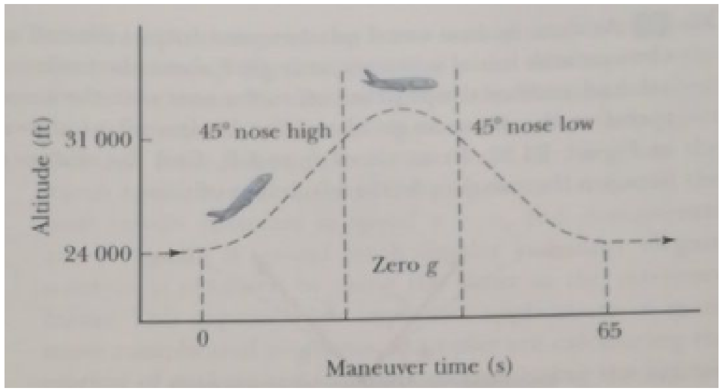

FIGURE 2 – Courbe suivie par l'avion

Exercice 3 Une balle de baseball d'une masse $m = 0.80$ kg est frappée à hauteur d'homme et part de la batte avec une vitesse de $v = 18$ m·s^{-1} et un angle de $\theta = 15°$ de l'horizontale. Trouver la distance x à laquelle la balle touche le sol.
Considérer à présent que la balle est frappée au repos à l'horizontale pour atteindre une vitesse de 18 m·s^{-1} avec une accélération uniforme durant 170 ms. Trouver la distance le long de laquelle la balle est accélérée.

Exercice 4 Obélix aime sculpter des menhirs. Mais ce qu'il aime par dessus tout, c'est les lancer sur les romains. En sortant du village, Obélix voit déguerpir un romain et lance un menhir dessus. Il lance le menhir avec une vitesse de 15 $[m/s]$ et à l'angle optimal. Rappeler quel est l'angle optimal pour un tir balistique parabolique où la source et la cible sont à la même hauteur et trouver à quelle distance se trouve le romain qu'Obélix a visé.

Exercice 5 Un agent infiltré de la CIA dispose d'informations sur une clé USB et a été arrêté. Il doit a tout prix se débarrasser de cette clé. Depuis sa cellule, une fenêtre donne sur une rivière située à la même altitude et à une distance $d = 15$ m . En sachant que l'agent peut lancer avec une vitesse maximale de 11 m/s, avec quel angle doit-il lancer la clé pour être sur qu'elle atteigne la rivière ?

Exercice 6 A la fin des cours, Titeuf décide de faire un tour de tourniquet avec Vomito mais veut lui jouer un tour. Lorsque la vitesse angulaire du tourniquet dépasse $3,5$ rad·s^{-1}, Vomito se met à vomir. En sachant que le tourniquet a un diamètre de $1,5$ m, est-il possible pour Titeuf de faire vomir Vomito ?
Indication : estimer en gros à quelle vitesse Titeuf peut propulser le tourniquet

Réponses

1. (a) On trouve le point d'impact au sol à $x_f = 1,18$ m. C'est à priori suffisant pour un piéton

   (b) on trouve $0,49$ m·s^{-1}

2. a) 101 m·s^{-1}

   b) 9960 m environ (soit 32000 pieds ce qui est une altitude correcte pour le vol d'un avion)

   c) $20,6$ s

3. Une étude balistique donne $x_f = 21$ m. On trouve une accélération sur $1,53$ m.

4. L'angle optimal pour un tir balistique où la cible est à la même hauteur que la source est de $\theta = 45°$. Alors une étude balistique donne le romain à une distance $d = 22,5$ m.

5. L'étude balistique arrive à un angle impossible. On trouve $\alpha = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{d \cdot g}{v_0^2}\right)$. L'agent ne peux pas sauver les données. En effet, en lançant avec l'angle optimal de 45°, la clé peut au maximum arriver à environ 12 mètres.

6. on trouve $v = 2,625$ m·s^{-1}, ce qui représente $9,45$ km/h, ce qui est plausible pour Titeuf. On peut envisager qu'il puisse courir au moins un faible temps à cette vitesse.

Solutions

Solution 1

a) Déterminons les équations horaires pour avoir des expressions de z (position verticale) et x (position horizontale) en fonction du temps pour l'eau.

En partant des accélerations et intégrant deux fois par rapport au temps, nous avons pour z :

$$a_z(t) = -g \tag{1}$$
$$v_z(t) = -gt + C_1 \tag{2}$$
$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2 \tag{3}$$

ou les constantes 1 et 2 sont déterminées par les conditions initiales :
— la vitesse initiale sur la direction verticale est nulle : $C_1 = 0$
— la position initiale sur la direction verticale est : $C_2 = h = 2.35$
Ainsi on obtient :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \tag{4}$$

En raisonnant de la même façon pour x, on obtient avec les conditions initiales $v_x(0) = v_0 = 1.7m \cdot s^{-1}$ et $x(0) = 0$ les équations horaires suivantes :

$$a_x(t) = 0 \tag{5}$$
$$v_x(t) = v_0 \tag{6}$$
$$x(t) = v_0 t \tag{7}$$

Pour trouver le point d'impact au sol, il est nécessaire de trouver le temps auquel le jet d'eau arrive à une hauteur nulle, donc résoudre l'équation de second degré $z(t_c) = 0$. On trouve ainsi :

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.692s \tag{8}$$

Et en ré-insérant ce temps dans l'équation de x(t), on obtient :

$$x_f = x(t_c) = v_0 * t_c = 1.18m \tag{9}$$

On trouve le point d'impact au sol à $x_f = 1,18$ m. C'est à priori suffisant pour un piéton.

b) La maquette a donc des dimensions **physiques** (distances) divisées par 12 :
$h^m = h/12 = 0.1258m$ et $x_f^m = x_f/12 = 0.0981m$
En recalculant le nouveau temps de chute en reprenant l'expression (8) avec la nouvelle valeur de h, on obtient : $t_c^m = 0.2s$.
Finalement, en reprenant l'expression (9) et isolant la vitesse, on trouve $v_0^m = 0,49$ m·s^{-1}

Solution 2

a) L'angle étant $\theta = 45ř$, la vitesse initiale se décompose ainsi :

$$\vec{v_i} = v_i * (\cos 45\vec{e}_x + \sin 45\vec{e}_z) = \frac{\sqrt{2}}{2} * 143 * (\vec{e}_x + \vec{e}_z) = 101 * (\vec{e}_x + \vec{e}_z) \tag{10}$$

Donc la vitesse en direction verticale ou horizontale vaut 101 m·s^{-1}.

b) Pour déterminer l'altitude, il nous faut les équations horaires sur la verticale et l'horizontale. Il est possible de les déterminer en suivant la même procédure que dans l'exercice précédent, question (a), pour z(t) et x(t). Ici les conditions initiales sont :

— la vitesse initiale sur la direction horizontale et verticale est la même et a été calculée dans la question précédente : $v_z(0) = v_x(0) = 101m/s$
— la position initiale (en mètres) de l'avion est le point (0 ;9450), donc : $z(0) = 9450m$ et $x(0) = 0m$

Ainsi, les équations horaires pour z et x sont :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 101t + 9450 \tag{11}$$

$$x(t) = 101t \tag{12}$$

Le temps mis pour arriver au sommet de la parabole est déterminé par :

$$t_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{101}{2 * (-1/2) * g} = 10.3s \tag{13}$$

Finalement, en remplaçant ce résultat dans z(t), on trouve une altitude au sommet de 9960 m environ (soit 32000 pieds ce qui est une altitude correcte pour le vol d'un avion).

c) Le temps en microgravité est aussi le double du temps pour arriver à l'altitude maximale une fois le vol en parabole commencé, par symétrie. Donc $t_{mg} = 2 * t_S = 20,6$ s.

Solution 3

Hypothèse : Dans cette correction nous prenons la hauteur d'un homme comme 1.8m .

La vitesse initiale se décompose comme suit :

$$\vec{v}_0 = v_x(0)\vec{e}_x + v_z(0)\vec{e}_z = 18 * (\cos 15\vec{e}_x + \sin 15\vec{e}_z) \tag{14}$$

L'abscisse initiale est prise comme nulle et l'ordonnée comme la hauteur d'un homme : (0 ; 1.8)m
Ainsi, en appliquant les conditions initiales ci-dessus et le calcul des équations horaires vu dans les exercices précédents, on obtient :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 18\cos(15)t + 1.8 \tag{15}$$

$$x(t) = 18\sin(15)t \tag{16}$$

Pour trouver la distance d'impact de la balle, il est nécessaire de trouver le temps de chute en résolvant $z(t_c) = 0$ (équation du second degré résolue par un discriminant et en gardant le seul temps positif) puis de l'insérer dans l'équation pour x(t). On trouve ainsi :

$$t_c = 1.245s \tag{17}$$

$$x_f = x(t_c) = 21.64m \tag{18}$$

Une étude balistique donne donc environ $x_f = 21$ m.

Dans la deuxième partie de l'exercice, nous étudions la phase ou la batte "pousse" la balle. Le mouvement étant rectiligne et l'accélération constante, les équations horaires sont ici :

$$a(t) = a = cste \tag{19}$$

$$v(t) = a * t \tag{20}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}a * t^2 \tag{21}$$

Au temps final (durée de l'accélération), nous avons :

$$v(t_f) = 18m \cdot s^{-1} = a * t_f \tag{22}$$

$$a = \frac{18}{t_f} = 105.882m \cdot s^{-2} \tag{23}$$

$$x(t_f) = d = \frac{1}{2}a * t_f^2 = 1.53m \tag{24}$$

On trouve une accélération sur $1,53$ m.

Solution 4
L'angle optimal pour un tir balistique où la cible est à la même hauteur que la source est de $\theta = 45°$.

Ainsi, la vitesse initiale est ici :

$$\vec{v}_i = v_i * (\cos 45\vec{e}_x + \sin 45\vec{e}_z) = \frac{\sqrt{2}}{2} * 15 * (\vec{e}_x + \vec{e}_z) \tag{25}$$

De plus, la hauteur étant la même, les équations horaires sont ici :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 15 * \frac{\sqrt{2}}{2}t \tag{26}$$

$$x(t) = 15 * \frac{\sqrt{2}}{2}t \tag{27}$$

En raisonnant toujours de la même façon pour trouver le temps de chute (on élimine la possibilité $t_c = 0$s pour des raisons évidentes) et la distance finale associée, on trouve après une étude balistique que le romain est à une distance $d = 22,5$ m.

Solution 5 L'étude balistique est faite en gardant l'angle comme variable. En prenant les conditions initiales données, les équations horaires sont :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t \tag{28}$$

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)t \tag{29}$$

En égalant $x(t_c)$ à d et isolant α, on arrive à un angle impossible. On trouve $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{d \cdot g}{v_0^2}\right)$. L'agent ne peux pas sauver les données.
En effet, en lançant avec l'angle optimal de 45°, la clé peut au maximum arriver à environ 12 mètres.

Solution 6 On utilise l'expression suivante :

$$v_{\text{lim}} = r * \omega_{\text{lim}} = \frac{D}{2} * \omega_{\text{lim}} = 2.625 m \cdot s^{-1} = 9,45 km/h \tag{30}$$

C'est plausible pour Titeuf. On peut envisager qu'il puisse courir au moins un faible temps à cette vitesse.