

Week 8 – Part 1

9. L'oscillateur harmonique

9.1. L'oscillateur harmonique – modèle

9.2 L'oscillateur harmonique

9.3. L'oscillateur harmonique – traitement par l'énergie

9.4. L'oscillateur harmonique – traitement par le gradient



9. L'oscillateur harmonique

- Le mouvement oscillatoire est très fréquent dans la nature.
- Un système qui oscille est appelé un « oscillateur ».

Exemples de phénomènes oscillatoires (???)

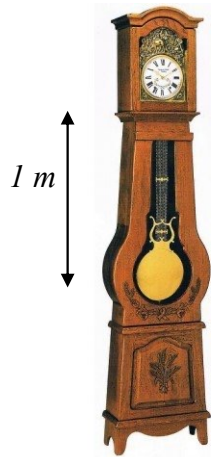
- Voix (cordes vocales)
- Pendule
- Ressort
- Montre mécanique
- Montre à quartz
- Circuit électrique RLC (radio)



Mouvement oscillatoire ⇒ réaction d'un système soumis à une force de rappel non constante avec dissipation de l'énergie faible ou nulle

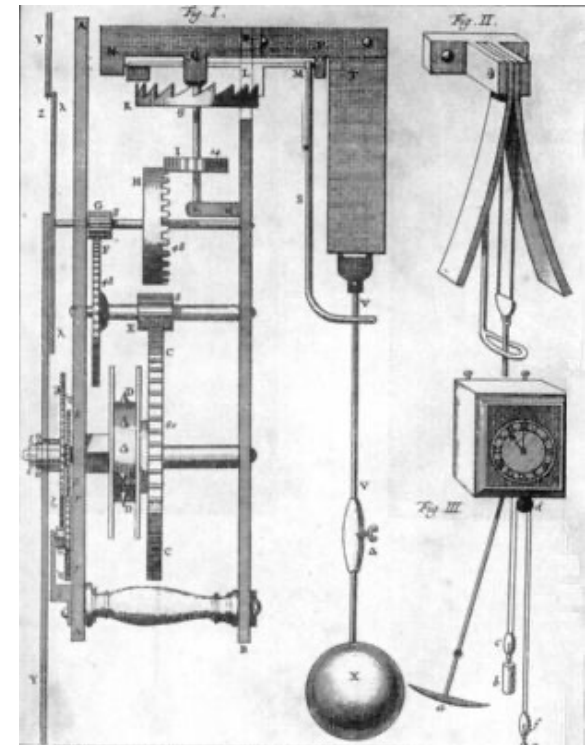
9. L'oscillateur harmonique

■ Une application des oscillateurs : l'horloge



Première horloge à pendule construite par l'horloger S. Coster en collaboration avec C. Huygens à La Haye en **1657**

précision: $10^{-3} - 10^{-4} s$



1777 : l'horloger suisse Abraham Louis Perrelet crée la première montre automatique (horloge marine)

Horloge atomique basée sur des transitions interatomiques

précision : $10^{-16} - 10^{-18} s$

<http://www.heure-exacte.net/>

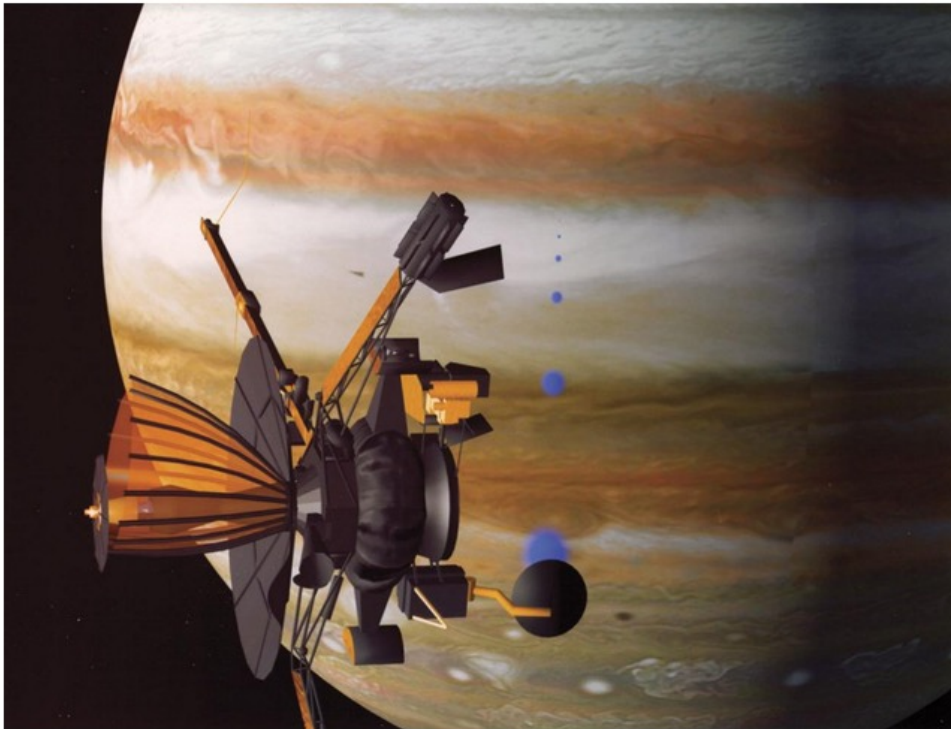


<https://www.hautehorlogerie.org/fr/encyclopedie/lexique-de-lhorlogerie/s/atomique-horloge/>

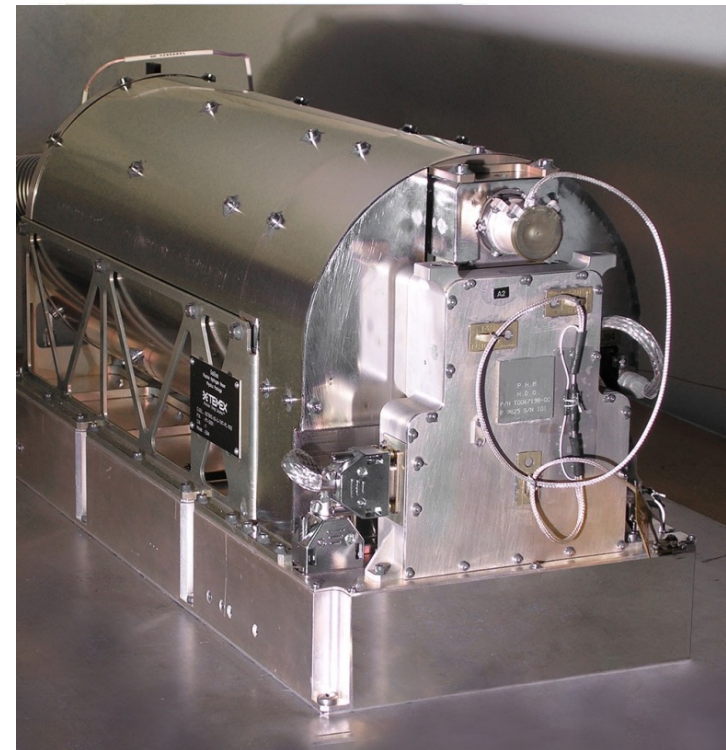
9. L'oscillateur harmonique

L'horloge atomique la plus précise est neuchâteloise

Innovation Le «Laboratoire temps fréquence» à l'Université de Neuchâtel a présenté, mercredi, un nouveau modèle 10 fois plus précis.



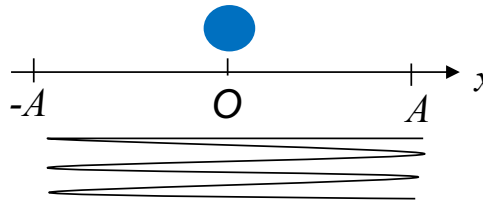
Les horloges atomiques sont au cœur du système de géolocalisation européen Galileo.



*Horloge
Atomique
pour
Galileo
Précision
 10^{-9} sec*

*Navigation
Par GPS!*

9.1. L'oscillateur harmonique – modèle



Par définition, un objet ponctuel se déplaçant le long d'un axe Ox présente un mouvement sinusoïdal lorsque son déplacement en fonction du temps est donné par

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \sin(\omega_0 t + \phi')$$

avec A amplitude du mouvement
 ω_0 pulsation
 ϕ (ϕ') phase initiale (à $t=0$) avec $\phi' = \phi + \frac{\pi}{2}$
 déterminée par les conditions initiales

La position de la particule se répète à un intervalle de temps régulier: **période** : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ unité: s

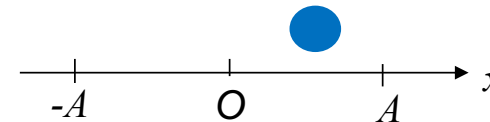
La **fréquence** $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ unité: s^{-1} ou Hz

Si ω_0 est indépendante de l'amplitude $\Rightarrow$ oscillateur harmonique

9.1. L'oscillateur harmonique – modèle

■ La position

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

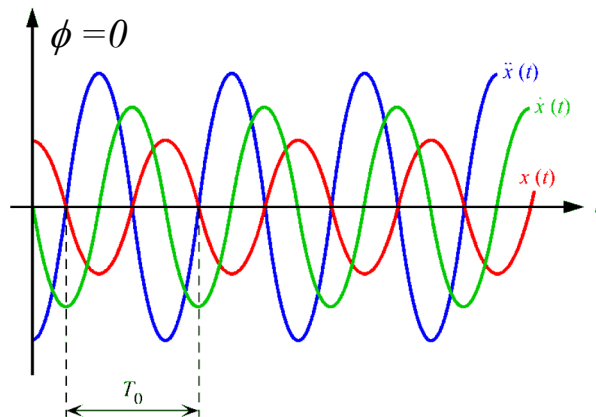


■ La vitesse

$$\dot{x} = v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

■ L'accélération

$$\ddot{x} = a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2 x$$

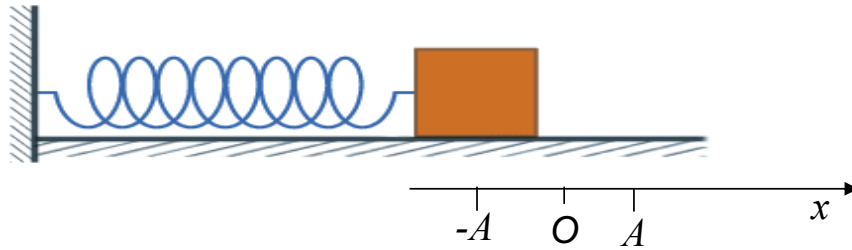


L'accélération est toujours
proportionnelle et opposée au

déplacement: $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$

9.2. L'oscillateur harmonique

■ L'oscillateur « masse et ressort » (sans la force de gravitation g)



On applique la 2nd loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{F}$ avec $\vec{F} = -k\vec{x}$ Force de rappel du ressort

Equation du mouvement (projection sur Ox) :

$$F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \text{ soit } \ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

Equation différentielle
du mouvement

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

9.2. L'oscillateur harmonique

■ L'oscillateur « masse et ressort » (sans la force de gravitation g)

On peut remarquer que la relation $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$ est aussi obtenue en posant $x = A \cos (\omega_0 t + \phi)$

Les solutions de l'équation différentielle $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ sont donc de la forme :

$$x(t) = A \cos (\omega_0 t + \phi)$$

A, ϕ sont des constantes du mouvement qui dépendent des conditions initiales

En posant $\phi' = \phi + \frac{\pi}{2}$, nous avons :

$$x(t) = A \sin (\omega_0 t + \phi')$$

Cette forme est aussi une solution de l'équation de mouvement

9.2. L'oscillateur harmonique

■ Etude des solutions de l'équation de mouvement $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ et $x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t)$ sont des solutions particulières qui décrivent un mouvement oscillatoire avec des conditions initiales telles que

- la masse est en $x=x_0$ à $t=0$ pour $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$
- la masse est en $x=0$ à $t=0$ pour $x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t)$

Une autre solution serait $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 (t - t_0))$ si la masse est en $x=x_0$ à $t=t_0$

Cette solution peut être réécrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 \cos(\omega_0 (t - t_0)) = x_0 \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t_0) + x_0 \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t_0) \\&= A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \text{ avec } A = x_0 \cos(\omega_0 t_0) \text{ et } B = x_0 \sin(\omega_0 t_0) \\&= x_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \text{ avec } \phi = -\omega_0 t_0\end{aligned}$$

En résumé, la solution peut s'écrire sous différentes formes :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 (t - t_0))$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \Rightarrow \text{écriture la plus courante}$$

Toutes ces solutions sont équivalentes. Elles décrivent le mouvement d'un oscillateur harmonique.
Les constantes t_0 , x_0 , ϕ , A , B , sont définies par les conditions initiales.

9.2. L'oscillateur harmonique

■ L'oscillateur « masse et ressort » avec la force de gravitation g

Equation de mouvement du ressort avec une masse m dans un champ de pesanteur :

Projection sur Ox de la 2nd loi de Newton : $ma = -kx + mg = -k\left(x - \frac{mg}{k}\right)$

or $\frac{mg}{k} = x_{eq}$ d'où $ma = -k(x - x_{eq})$

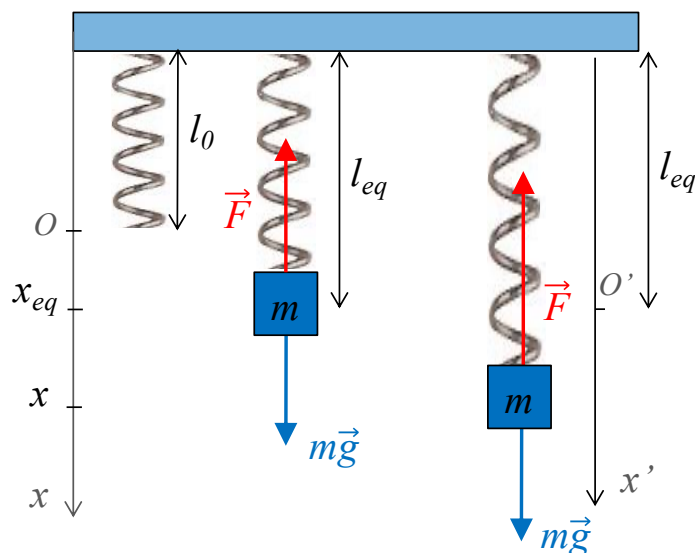
En prenant un repère $O'x'$ tel que $x'=0$ corresponde à la position d'équilibre et $x' = x - x_{eq}$, nous avons :

$$ma = m \frac{d^2x'}{dt^2} = -kx'$$

soit

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \omega_0^2 x' = 0$$

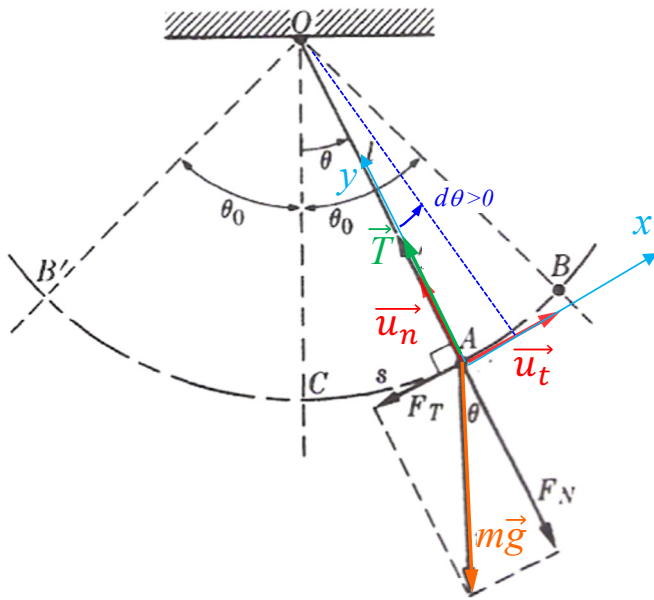
Equation différentielle du mouvement *g n'apparaît pas*



La pesanteur ne fait que changer la position d'équilibre mais pas le mouvement oscillatoire !!!

9.2. L'oscillateur harmonique

■ **Le pendule** *Système le plus simple : une masse m au bout d'un fil de longueur l*



Equation du mouvement – Repère de Frenet :

$\vec{T}$ est la tension du fil (de masse négligeable)

$m\vec{g}$ est le poids

mg peut se décomposer en une force normale F_N et une force tangentielle F_T

2nd loi de Newton : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$

Projection sur Ox : $ma_T = F_T = -mg \sin \theta$

On rappelle que pour un mouvement circulaire $a_T = R \frac{d\omega}{dt} = R \frac{d^2\theta}{dt^2}$

avec $R = l$ d'où $a_T = l \frac{d^2\theta}{dt^2}$

9.2. L'oscillateur harmonique

■ Le pendule

$$a_T = l \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{avec} \quad ma_T = -mg \sin\theta$$

$$\text{Finalement} \quad ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin\theta \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0}$$

Pour les faibles amplitudes, c'est-à-dire pour **les petits angles**, alors $\sin\theta \approx \theta$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

Les solutions sont de la forme : $\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$ ($= \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi')$)

Rem. 1 : La période du pendule vaut $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow$ indépendante de la masse

Rem. 2 : analogie avec le ressort $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

9.2. L'oscillateur harmonique

■ Le pendule

Equation du mouvement – Coordonnées polaires :

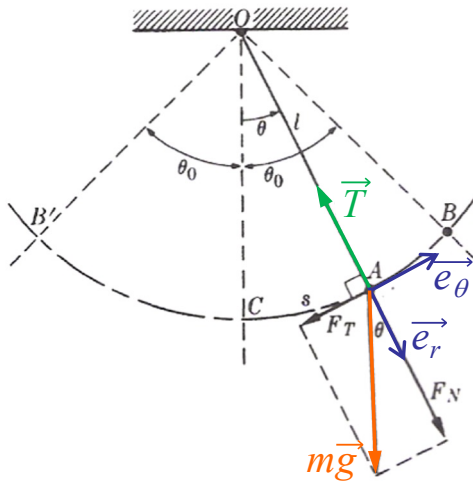
Accélération en coordonnées polaires

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = 2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}$$

$$r = l = \text{cte} \Rightarrow \dot{r} = 0$$

$$d'où a_\theta = l \ddot{\theta}$$



2nd loi de Newton (projection sur $\vec{e}_\theta$) :

$$ml \ddot{\theta} = -mg \cdot \sin \theta$$

Pour de petits angles ($\sin \theta \approx \theta$):

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

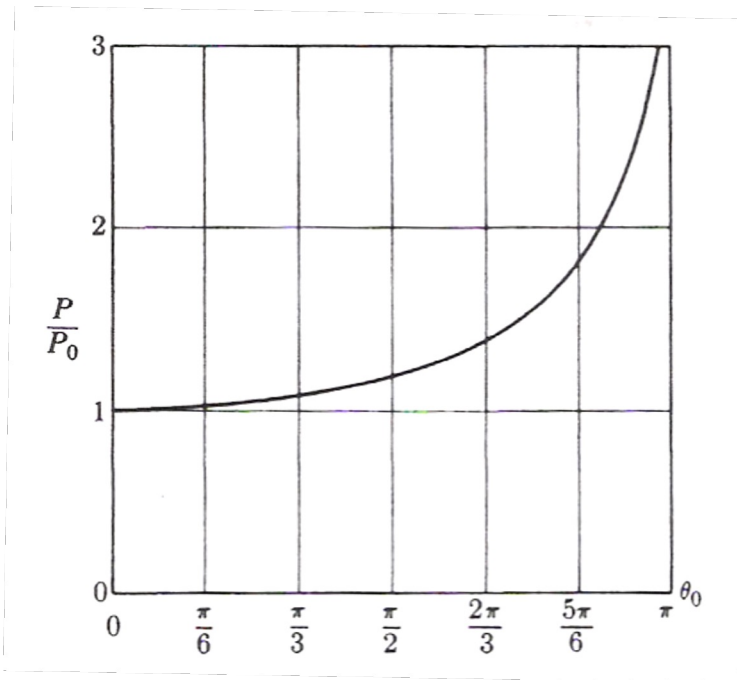
$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

9.2. L'oscillateur harmonique

■ Le pendule

Evolution de la période avec l'amplitude pour un pendule réel

L'approximation $\sin\theta \approx \theta$ n'est plus valable et la période dépend alors de l'amplitude



$\Rightarrow$ le pendule n'est pas un oscillateur harmonique pour les grandes amplitudes ($\theta \gtrsim 15^\circ$)

Evolution de la période P en fonction de θ_0 (i.e. amplitude) par rapport à P_0 (période calculée pour de petits angles)

9.2. L'oscillateur harmonique

■ Energie mécanique d'un oscillateur « masse et ressort »

Energie cinétique :

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

$$\text{or } \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \text{ et } x^2 = A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) \quad ,$$

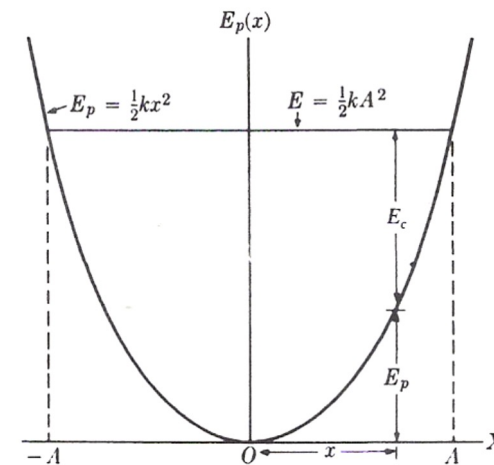
$$E_c = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (A^2 - x^2)$$

*L'énergie cinétique est maximum pour $x=0$
et nulle aux extrémités ($x=\pm A$)*

Energie potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$$

*L'énergie potentielle est nulle pour
 $x=0$ et maximum aux extrémités*



$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

Energie mécanique de l'oscillateur

*L'énergie mécanique est constante au
cours du mouvement (pas de dissipation)*

9.3. L'oscillateur harmonique – traitement par l'énergie

■ Equation du mouvement à partir de l'énergie mécanique

Energie potentielle : $E_p = \frac{1}{2} k x^2$

Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

Energie mécanique : $E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$

L'énergie mécanique est constante (conservation de l'énergie) : $\frac{d}{dt} E = 0$

$$\frac{d}{dt} E = 0 = \frac{1}{2} m 2 \dot{x} \ddot{x} + \frac{1}{2} k 2 \dot{x} x = \dot{x} [m \ddot{x} + kx]$$

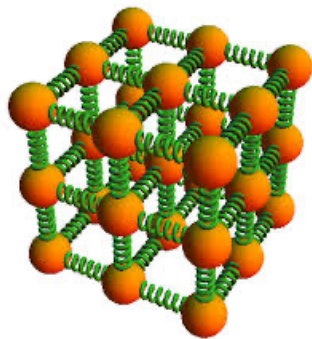
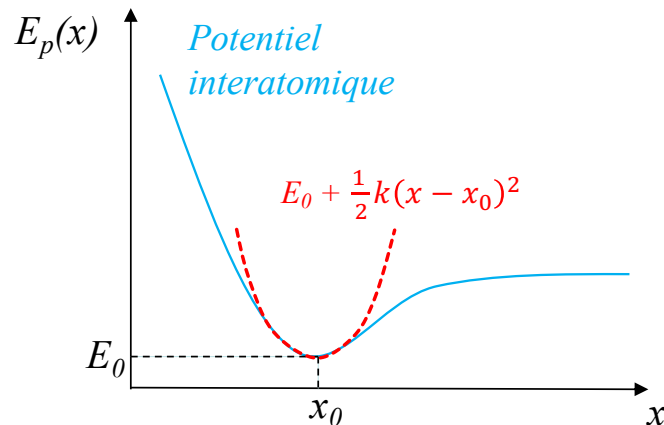
La seule solution non triviale est $m \ddot{x} + kx = 0$

soit avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$ *Equation différentielle de l'oscillateur harmonique*

9.3. L'oscillateur harmonique – traitement par l'énergie

■ Equation du mouvement à partir de l'énergie mécanique

*Approximation harmonique
du potentiel interatomique*



Energie potentielle :

$E_p(x)$ présente un minimum en $x_0 \Rightarrow$ développement de Taylor autour de ce point

$$E_p(x) = E_0 + \frac{x-x_0}{1!} \left(\frac{dE_p}{dx} \right)_{=0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \left(\frac{d^2E_p}{dx^2} \right) + \dots \approx E_0 + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \left(\frac{d^2E_p}{dx^2} \right)$$

$$E_p(x) \approx E_0 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \quad \text{avec} \quad k = \left(\frac{d^2E_p}{dx^2} \right)_{\text{courbure en } x_0} \quad \text{développement au 2ème ordre}$$

Energie mécanique :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + E_0$$

L'énergie mécanique est constante (si pas de dissipation) :

$$\frac{d}{dt}E = 0 = \frac{1}{2}m 2 \dot{x} \ddot{x} + \frac{1}{2}k 2 \dot{x} (x - x_0) = \dot{x} [m \ddot{x} + k(x - x_0)]$$

La seule solution non triviale est $m \ddot{x} + k(x - x_0) = 0$

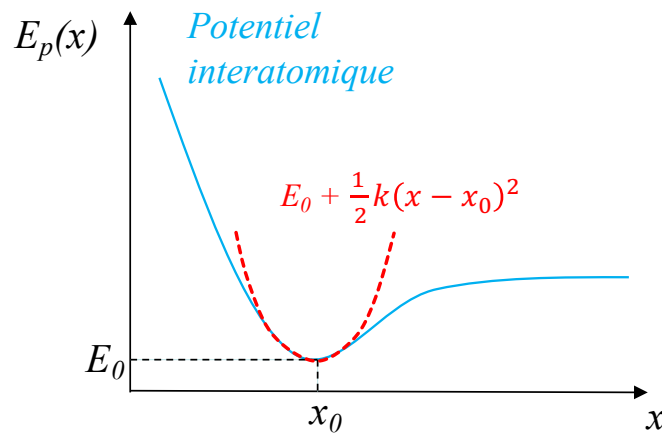
Soit avec $x' = x - x_0$

$$\text{et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x'}{dt^2} + \omega_0^2 x' = 0} \quad \text{Equation différentielle de l'oscillateur harmonique}$$

9.4. L'oscillateur harmonique – traitement par le gradient

■ Equation du mouvement à partir du potentiel et du gradient

Hors programme



Potentiel du ressort (dans l'approximation parabolique) :

$$E_p(x) \approx E_0 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \quad \text{avec} \quad k = \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)$$

Force dérivant d'un potentiel :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p = -\frac{dE_p(x)}{dx} \vec{e}_x$$

$$\vec{F} = -k(x - x_0) \vec{e}_x$$

2nd loi de Newton : $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - x_0)$

soit avec $x' = x - x_0$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

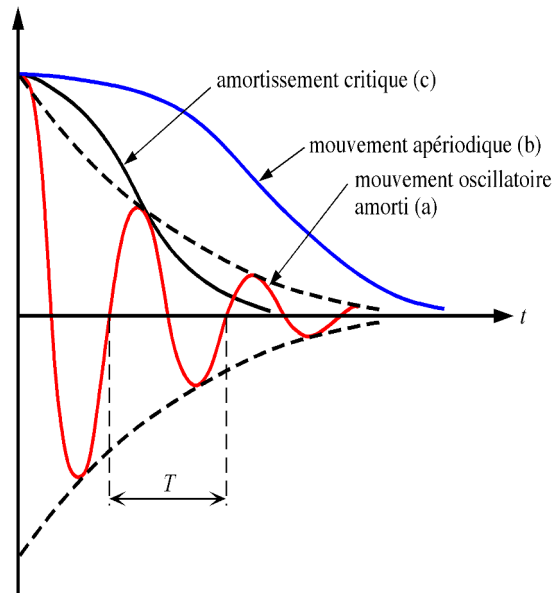
$$\boxed{\frac{d^2 x'}{dt^2} + \omega_0^2 x' = 0}$$

Equation différentielle de l'oscillateur harmonique

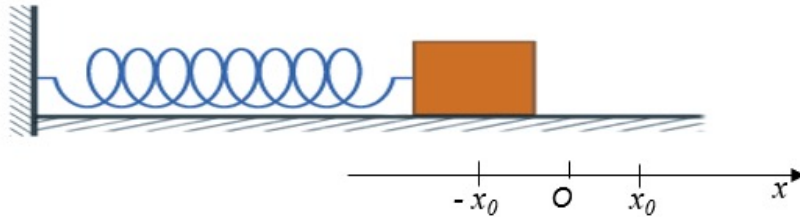
Week 8 – Part 2

9. L'oscillateur harmonique linéaire libre

9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide



L'oscillateur harmonique libre



Ressort + Masse

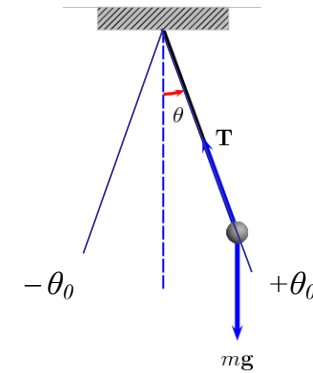
Equation du mouvement :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Les solutions sont de la forme :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi) (= x_0 \sin(\omega_0 t + \phi'))$$

avec x_0 amplitude du mouvement
 ω_0 pulsation propre de l'oscillateur
 ϕ (ϕ') phase initiale (à $t=0$)



Pendule

Equation du mouvement :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Approximation petits angles ($\sin \theta \approx \theta$)

Les solutions sont de la forme :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi) (= \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi'))$$

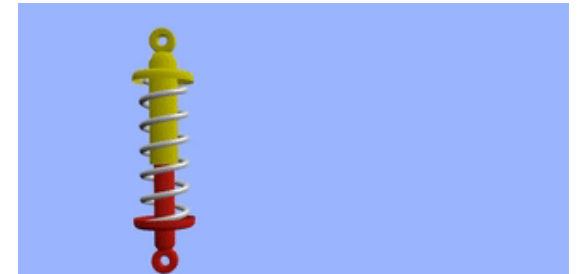
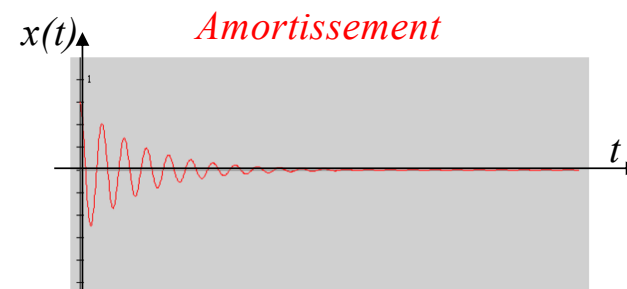
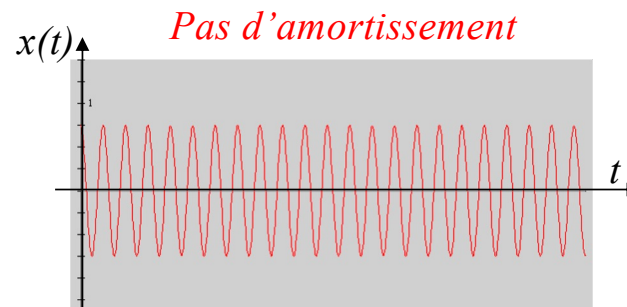
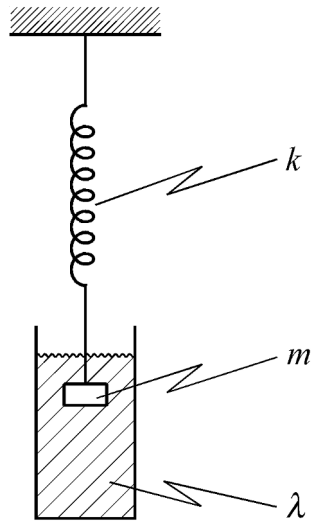
avec θ_0 amplitude du mouvement
 ω_0 pulsation propre de l'oscillateur
 ϕ (ϕ') phase initiale (à $t=0$)

Si ω_0 est indépendante de l'amplitude $\Rightarrow$ oscillateur harmonique

La position de la particule se répète à un intervalle de temps régulier (période) $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

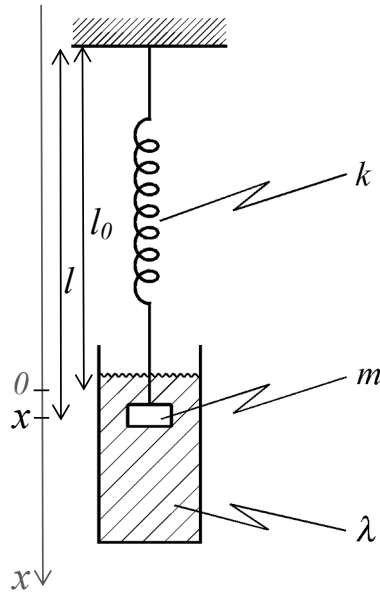
■ Amortissement d'un oscillateur



Application : amortisseur

9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

■ Ressort plongeant dans un liquide (sans force de gravitation)



La force de rappel du ressort est $\vec{F} = -k\vec{r}$ avec $\vec{r} = (l - l_0)\vec{e}_x = x\vec{e}_x$

La force de frottement fluide en régime laminaire est $\vec{F}_f = -K\eta\vec{v}$

2nd loi de Newton : $m\vec{a} = -k\vec{r} - K\eta\vec{v}$

(on ne tient pas compte ici de la pesanteur ni de la poussée d'Archimède pour simplifier le problème)

On projette sur Ox : $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - K\eta \frac{dx}{dt}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{K\eta}{m} \frac{dx}{dt} = 0$$

Et finalement

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

avec $\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} & \text{Pulsation de l'oscillateur non amorti} \\ \lambda = \frac{K\eta}{2m} & \text{Coefficient d'amortissement} \end{cases}$

9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

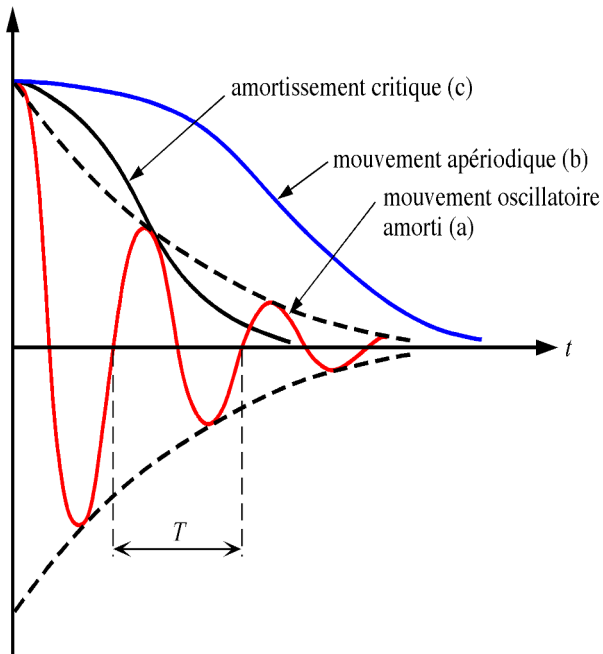
■ Ressort plongeant dans un liquide (sans force de gravitation)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

λ définit le type d'amortissement

Le coefficient d'amortissement λ définit 3 différents régimes :

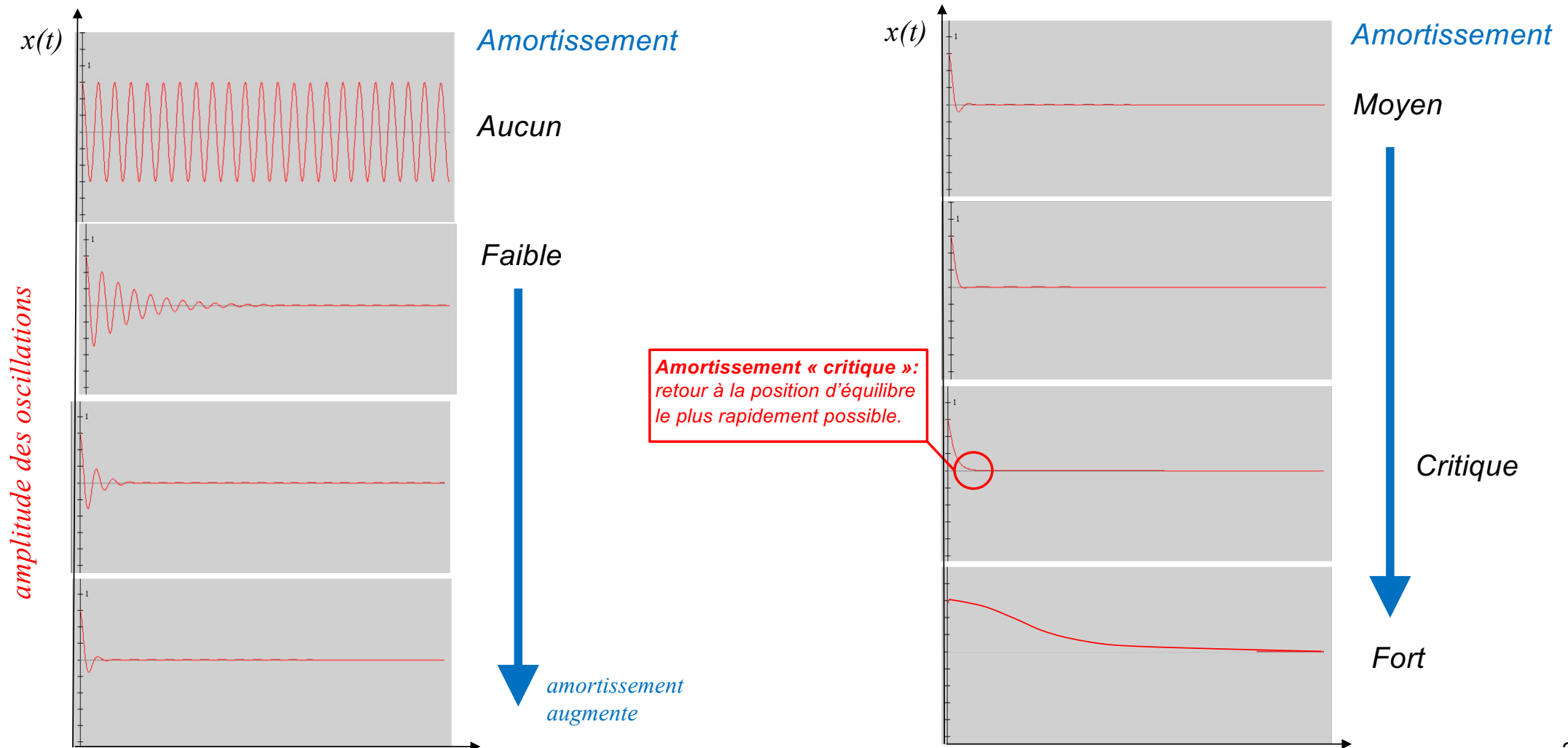
- Amortissement **faible** ($\lambda < \lambda_c$ petit) : oscillations dont l'amplitude diminue continûment. La période est plus grande que celle de l'oscillateur harmonique non amorti.
- Amortissement **critique** pour une valeur λ_c . Correspond à un retour à la position d'équilibre le plus rapidement possible sans la moindre oscillation.
- Amortissement **fort** ($\lambda > \lambda_c$ grand) : Le système n'oscille plus et revient lentement à l'équilibre.



On remarque que l'on retrouve l'équation d'un oscillateur libre pour $\lambda=0$

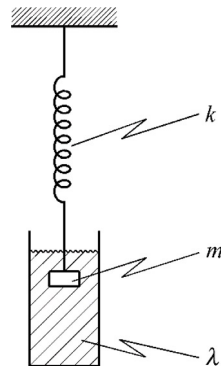
9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

■ Ressort plongeant dans un liquide (sans force de gravitation)

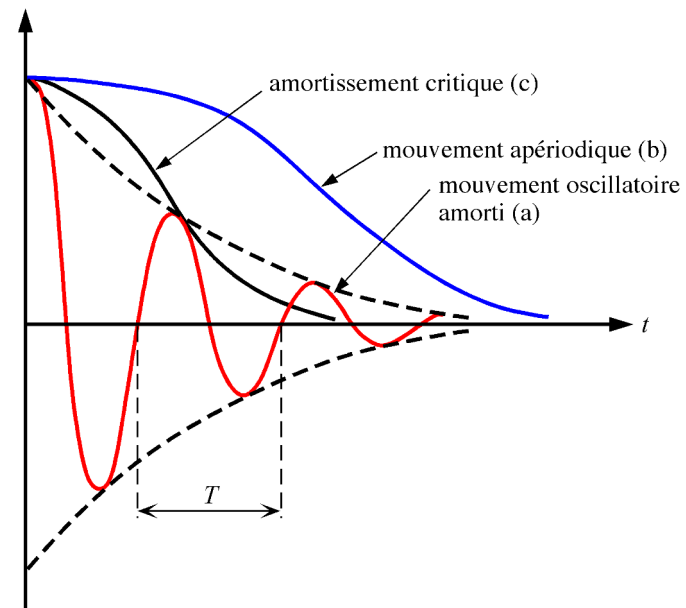


9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

■ Ressort plongeant dans un liquide (sans force de gravitation)



$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

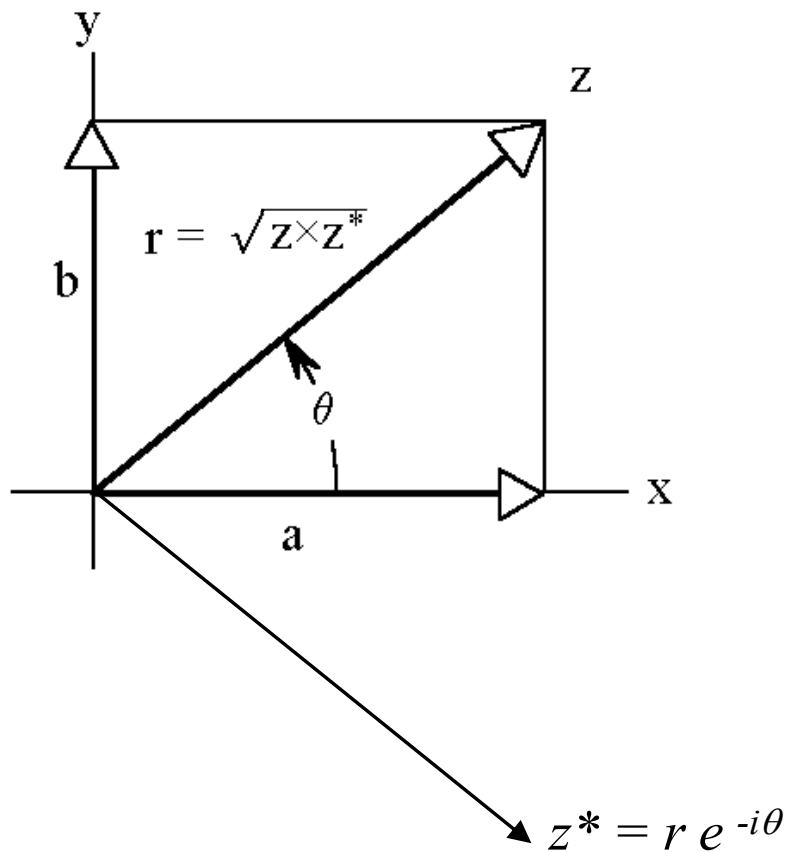


Comment résoudre cette équation différentielle ?

⇒ On passe par les nombres complexes

9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

■ Nombres complexes



Soit le nombre complexe z :

$$z = a + ib = r e^{i\theta}$$

Partie réelle : $\Re(z) = a = r \cos \theta$

Partie imaginaire : $\Im(z) = b = r \sin \theta$

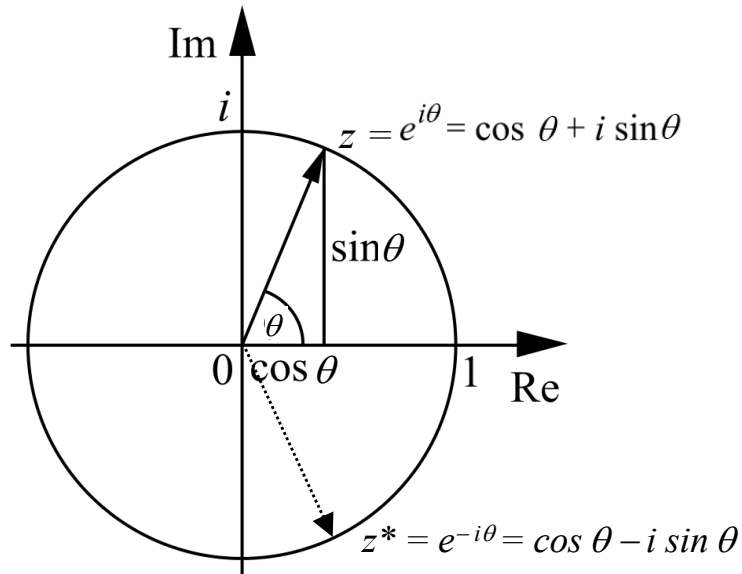
Module : $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argument : $\arg(z) = \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Complexe conjugué : $z^* = a - ib = r e^{-i\theta}$

9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

■ Nombres complexes



Soit le nombre complexe z de norme 1 :

$$z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$z^* = e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$\text{avec } \begin{cases} \cos \theta = \operatorname{Re}\{e^{i\theta}\} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta = \operatorname{Im}\{e^{i\theta}\} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

Nous pouvons alors écrire $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) = A \frac{e^{i(\omega t + \varphi_0)} + e^{-i(\omega t + \varphi_0)}}{2}$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

avec C_1, C_2 des nombres complexes indépendants du temps

9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

■ Nombres complexes

Résolution de l'équation différentielle du mouvement pour l'oscillateur harmonique non amorti ($\lambda=0$)

Equation du mouvement : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$

On pose comme solution générale (fonction d'essai) : $x(t) = C e^{\gamma t}$

On injecte $x(t) = C e^{\gamma t}$ dans l'équation différentielle (1)

On trouve $\gamma^2 C e^{\gamma t} + \omega_0^2 C e^{\gamma t} = 0 \Leftrightarrow C e^{\gamma t} (\gamma^2 + \omega_0^2) = 0$

La solution non-triviale est $(\gamma^2 + \omega_0^2) = 0$ soit $\gamma^2 = -\omega_0^2$

or $i^2 = -1$ donc $\gamma^2 = i^2 \omega_0^2$ et finalement $\gamma = \pm i \omega_0$ 2 solutions possible pour γ

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$$

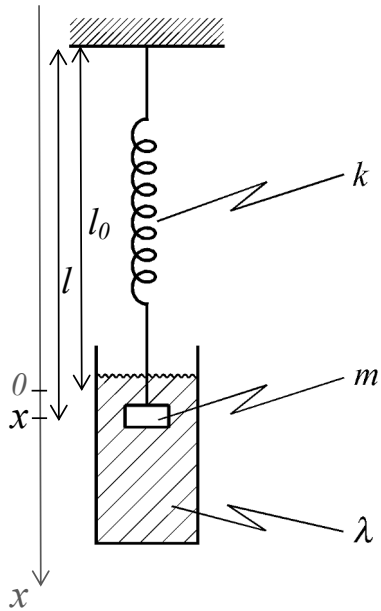
La solution générale est une combinaison linéaire des solutions particulières avec $\gamma = +i\omega_0$ et $\gamma = -i\omega_0$

ϕ est le déphasage défini par les conditions initiales à $t=0$

9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

■ Résolution de l'éq. diff. du mouvement pour l'oscillateur libre amorti ($\lambda \neq 0$)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1) \quad \text{On cherche les solutions de cette équation différentielle}$$



Technique de résolution :

i) on prend une fonction d'essai du type $x(t) = C e^{\gamma t}$

ii) on la substitue dans l'équation différentielle (1) $\Rightarrow C e^{\gamma t} (\gamma^2 + 2\lambda\gamma + \omega_0^2) = 0$

la solution non-triviale est $\gamma^2 + 2\lambda\gamma + \omega_0^2 = 0$

$\gamma^2 + 2\lambda\gamma + \omega_0^2 = 0$ est une équation du second degré du type $ax^2 + bx + c = 0$

les solutions x_1, x_2 de cette équation se calculent à partir du discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\text{et } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

■ Résolution de l'éq. diff. du mouvement pour l'oscillateur libre amorti ($\lambda \neq 0$)

Nous cherchons les solutions de $\gamma^2 + 2\lambda\gamma + \omega_0^2 = 0$

avec $a = 1, b = 2\lambda, c = \omega_0^2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{soit } \begin{cases} \gamma_1 = -\lambda + (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2} \\ \gamma_2 = -\lambda - (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2} \end{cases}$$

La solution générale est la somme des solutions particulières avec γ_1 et γ_2

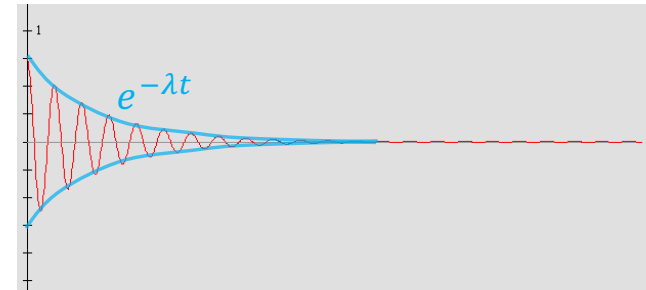
$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t} \quad \text{avec } A_1 \text{ et } A_2 \text{ des constantes} \\ &= e^{-\lambda t} \left(A_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} \right) \end{aligned}$$

9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

■ Amortissement faible $\lambda < \omega_0$

Nous avons $\gamma_{1,2} = -\lambda \pm (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2}$

avec $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$



avec $\omega = (\omega_0^2 - \lambda^2)^{1/2}$

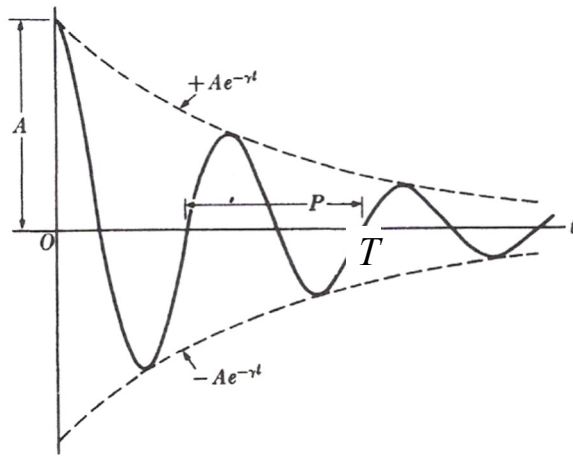
Il existe donc deux valeurs pour γ : $\gamma_1 = -\lambda + i\omega$ et $\gamma_2 = -\lambda - i\omega$

La solution générale est la somme des solutions particulières γ_1, γ_2 : $x(t) = A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t}$

soit $x(t) = e^{-\lambda t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t})$ avec $\omega = (\omega_0^2 - \lambda^2)^{1/2}$

9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

■ Amortissement faible $\lambda < \omega_0$



Solution de l'équation du mouvement :

$$x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} & \text{pulsation} \\ T = \frac{2\pi}{\omega} & \text{période} \\ \phi & \text{déphasage} \end{cases}$$

On détermine les constantes A et ϕ à partir des conditions initiales à $t = 0$

Exemple de conditions initiales à $t=0$: $x(0) = x_0$ et $v(0) = 0$

$$x(0) = A \cos \phi = x_0$$

$$\Rightarrow A = \frac{x_0}{\cos \phi}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(-\lambda) \cos(\phi) - A\omega \sin(\phi) = 0$$

$$\Rightarrow \tan \phi = -\frac{\lambda}{\omega}$$

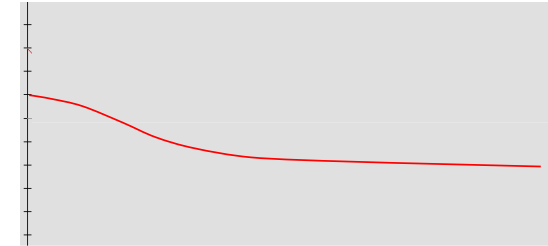
9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

■ Amortissement fort $\lambda > \omega_0$

Nous avons $\gamma_{1,2} = -\lambda \pm (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2}$

avec $\lambda^2 - \omega_0^2 > 0$

soit $\gamma_{1,2} = -\lambda \pm \omega$ avec $\omega = (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2}$



Il existe donc deux valeurs pour γ : $\gamma_1 = -\lambda + \omega$ et $\gamma_2 = -\lambda - \omega$

La solution générale est la somme des solutions particulières γ_1, γ_2 : $x(t) = A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t}$

Les solutions sont alors

$$x(t) = e^{-\lambda t} (A_1 e^{\omega t} + A_2 e^{-\omega t})$$

*Mouvement apériodique
(plus d'oscillations)*

Les constantes sont définies par les conditions initiales à $t=0$

Par exemple : $x(0) = x_0$ et $v(0) = 0$

$$\text{alors } A_1 = x_0 \frac{\omega + \lambda}{2\omega}, A_2 = x_0 \frac{\omega - \lambda}{2\omega}$$

9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

■ Amortissement critique $\lambda = \omega_0$

Dans ce cas particulier $\Delta=0$, et les solutions de l'équation différentielle sont alors de la forme

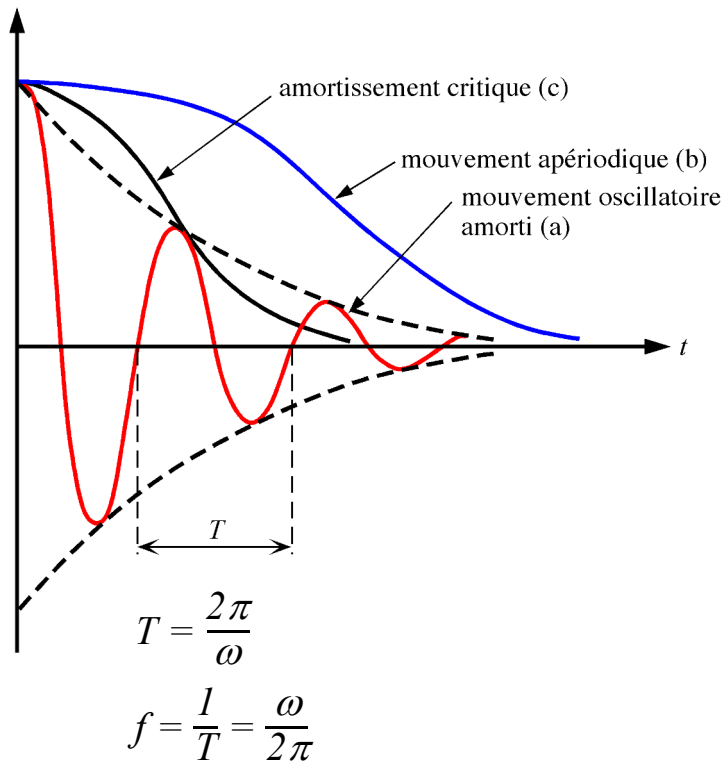
$$x(t) = (A + Bt) e^{-\lambda t}$$



Amortissement critique : retour à la position d'équilibre le plus rapidement possible sans aucune oscillation

9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

Résumé des différents régimes d'amortissement en fonction de λ $\lambda = \frac{K\eta}{2m}$ Coefficient d'amortissement

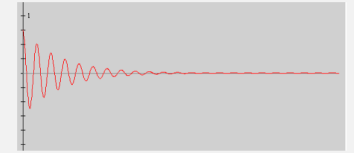


- **Amortissement faible :** $\lambda < \omega_0$

Mouvement oscillatoire avec amplitude décroissante et avec $\omega < \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\text{avec } \omega = (\omega_0^2 - \lambda^2)^{1/2}$$

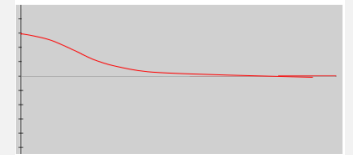


- **Amortissement fort :** $\lambda > \omega_0$

Mouvement aperiodique (plus d'oscillations)

$$x(t) = e^{-\lambda t} (A_1 e^{\omega t} + A_2 e^{-\omega t})$$

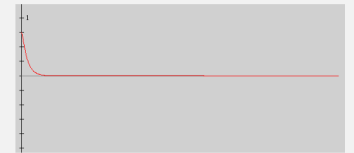
$$\text{avec } \omega = (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2}$$



- **Amortissement critique :** $\lambda = \omega_0$

Retour à la position d'équilibre le plus rapidement possible sans aucune oscillation

$$x(t) = (A + Bt) e^{-\lambda t}$$

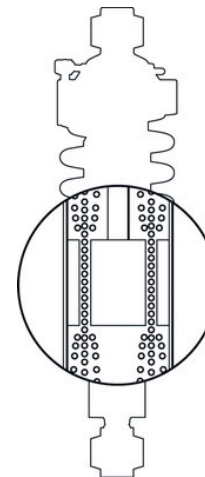
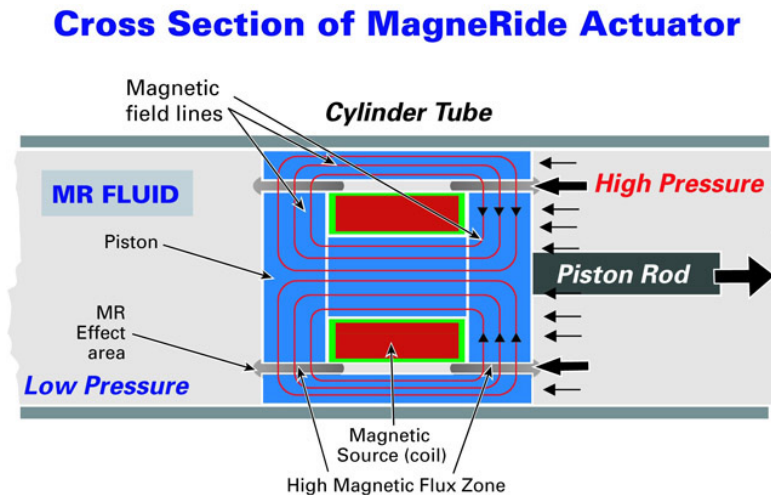


9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

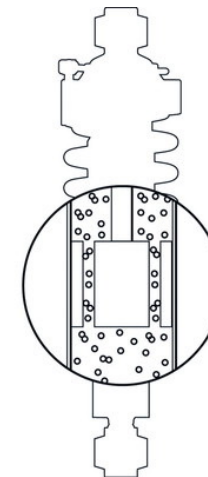
Application : amortisseur « dynamique »

La réponse de l'amortisseur peut-être contrôlée en tant réel (temps de réaction de quelques ms) en changeant les propriétés du fluide, c'est à dire en jouant sur le coefficient d'amortissement λ .

Pour ce faire, on applique un champ électrique dans une bobine qui crée un champ magnétique. Celui-ci ordonne des particules magnétiques présentes dans le fluide de l'amortisseur, ce qui en modifie sa viscosité, et par conséquent λ .



*avec champ
magnétique*



*sans champ
magnétique*

