

Week 6 – Part 1

7. Travail; Energie, Principes de conservation

7.1. Introduction

7.2. Travail d'une force

7.3. Puissance



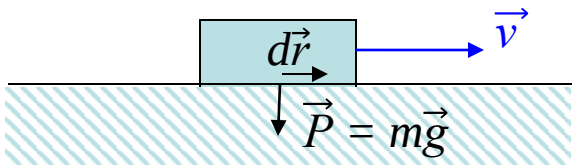
Travail et Puissance

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{Unité : [Nm] = joule [J]}$$

$$\text{soit } \delta W = F dr \cos \theta = F_t dr$$

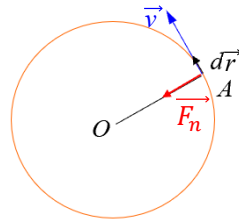
Définition : Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ est le produit de la distance parcourue par la composante de cette force le long du déplacement (=la projection de la force sur la tangente à la trajectoire)

Corollaire : le travail d'une force perpendiculaire au déplacement est nul



$$\delta W = \vec{P} \cdot d\vec{r} = 0$$

mouvement
circulaire



$$\delta W = \vec{F}_n \cdot d\vec{r} = 0$$

$$P_{inst} = \frac{\delta W}{dt}$$

Unité : joule/sec [J/s] = watt [W]

La puissance instantanée est une grandeur qui fournit une information sur la dynamique du mouvement.

C'est une indication sur la « vitesse » à laquelle le travail est dépensé.

$$P_{inst} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

La puissance moyenne pendant un intervalle Δt est

$$P_{moy} = W/\Delta t$$

Week 6 – Part 2

7. Travail; Energie; Principes de conservation

7.4. Energie cinétique

7.5. Energie potentielle

7.6. Energie mécanique



7.4. Travail et Energie cinétique

Travail élémentaire :

$$P_{inst} = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{\delta W}{dt} = F_t v \text{ avec } F_t = m (dv/dt) \text{ (2ieme loi de Newton)}$$

$$d'où \delta W = m (dv/dt) v dt = m v dv$$

$$\text{soit } W = \int_A^B F_t dl = \int_A^B m v dv = \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

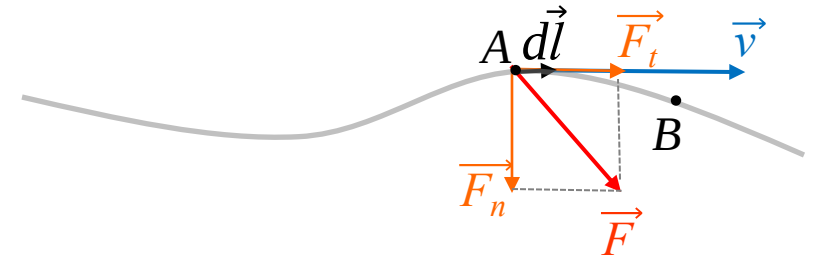
Expression du travail en fonction de l'énergie cinétique :

$$W = E_{c,B} - E_{c,A}$$



Théorème de l'énergie cinétique : quelles que soient la force F et la trajectoire parcourue, le **travail** de la particule de masse m correspond à la variation de la grandeur $\frac{1}{2}mv^2$ entre la fin et le début de la trajectoire.

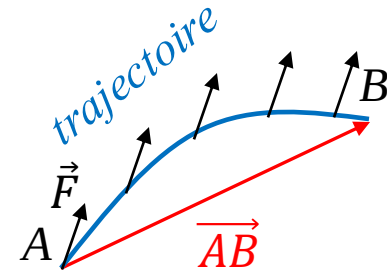
Cette grandeur est par définition **l'énergie cinétique** (E_c)



7.5. Travail et Energie potentielle

Soit une force $\vec{F}$ **constante (en direction et en norme)**. Le travail de cette force entre un point A et un point B s'écrit :

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{r} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$



$$\int_A^B d\vec{r} = \overrightarrow{AB}$$

On remarque que le travail ne dépend dans ce cas que de la position de A et de B , et ce, quelle que soit la trajectoire.

Le travail peut s'exprimer en fonction de la position de A et de B .
On définit alors une fonction qui a la grandeur d'une énergie et dont la valeur dépend de la position :

*C'est la fonction **Energie potentielle** (E_p)*

7.5. Energie potentielle

L'énergie potentielle $E_p(r)$ est une grandeur physique qui dépend de la position de la particule telle que

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} = -(E_{p,B} - E_{p,A})$$



Remarque : contrairement à l'énergie cinétique, W correspond à la valeur de l'énergie potentielle à l'état initial moins sa valeur à l'état final

Définition : l'énergie potentielle E_p est une fonction de la position de la particule telle que la différence entre sa valeur prise à l'état initial et celle à l'état final est égale au travail W .

- Cette différence est indépendante du chemin parcouru.
- Elle est définie à une constante près.

7.5. Energie potentielle *de pesanteur*

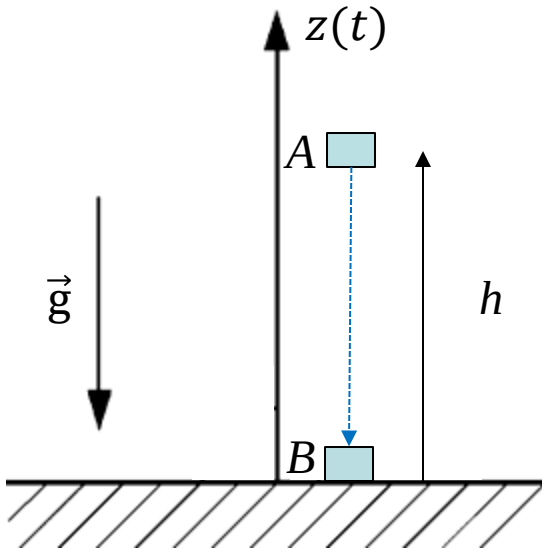
■ Exemple 1 : énergie potentielle due au champ de pesanteur terrestre

Travail du poids :

$$W = \int_h^0 m \vec{g} \cdot \vec{dz} = [-mgz]_h^0 = mgh$$

$$W = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = mgh$$

$$\begin{cases} E_{p,A} = mgh \\ E_{p,B} = 0 \end{cases}$$



Energie potentielle de pesanteur :

$$E_p(z) = mgz + cte$$

7.5. Energie potentielle d'un ressort

■ Exemple 2 : Energie potentielle d'un ressort

Déplacement élémentaire : $d\vec{l} = dx \vec{e}_x$

Force de rappel du ressort : $\vec{F} = -kx \vec{e}_x$

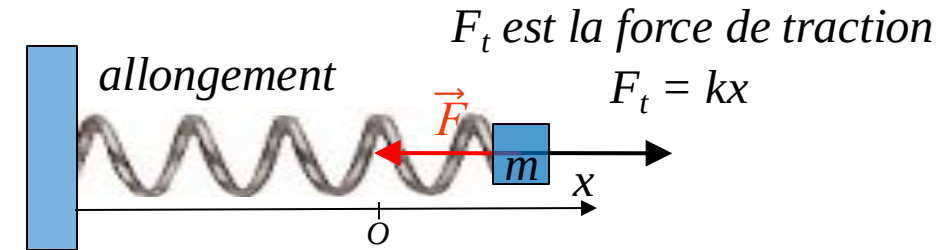
$$W = \int_A^B -kx \vec{e}_x \cdot dx \vec{e}_x = \int_A^B -kx dx = -k \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_A^B = -\frac{1}{2} kx_B^2 + \frac{1}{2} kx_A^2$$

$$W = \frac{1}{2} kx_A^2 - \frac{1}{2} kx_B^2$$

or par définition $W = E_{p,A} - E_{p,B}$

et par conséquent $E_p = \frac{1}{2} kx^2$

L'énergie potentielle est nulle pour $x=0$



7.6. Energie mécanique - conservation

Nous avons vu que le travail pouvait se calculer à partir de deux expressions différentes :

$$W = E_{c,B} - E_{c,A} \quad \text{différence de l'énergie **cinétique** prise entre état **final** et état **initial**}$$

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} \quad \text{différence de l'énergie **potentielle** prise entre état **initial** et état **final**}$$

$$\text{soit } W = E_{c,B} - E_{c,A} = E_{p,A} - E_{p,B}$$

$$\text{ou encore } \underbrace{E_{c,B} + E_{p,B}}_{\text{Energie mécanique en B}} = \underbrace{E_{c,A} + E_{p,A}}_{\text{Energie mécanique en A}}$$

Energie mécanique :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = cte$$

l'énergie mécanique est constante s'il n'y a pas de dissipation d'énergie (pas de force de frottement par exemple)

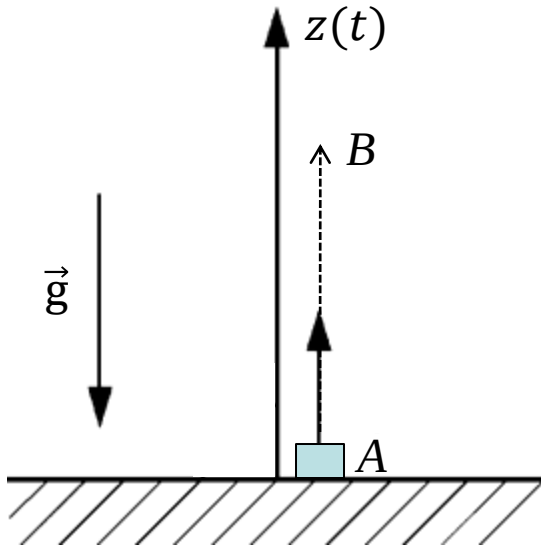


Exemple : la chute libre $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = cte$

7.6. Energie mécanique

■ Application de la conservation de l'énergie mécanique

Exercice 1 : calcul de la hauteur maximum à laquelle arrive une masse m lancée verticalement à la vitesse v_0 (on néglige les frottements de l'air)



$$\text{En } A : E(A) = E_c(A) + E_p(A) = \frac{1}{2} m v_0^2 + 0 \quad (\text{ici on prend } mgz=0 \text{ pour } z=0)$$

$$\text{En } B : E(B) = E_c(B) + E_p(B) = 0 + mgh$$

$$\text{Principe de conservation : } E(A) = E(B)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = mgh$$

Finalemment:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

7.6. Energie mécanique

■ Application de la conservation de l'énergie mécanique

Exemple 2 : calcul de la hauteur maximum à laquelle arrive une masse m lancée verticalement par un ressort de longueur l_0 au repos et comprimé d'une longueur d

Vitesse d'expulsion de la masse en A' :

$$\text{En } A : E(A) = E_c(A) + E_p(A) = 0 + \frac{1}{2} kd^2 \quad (\text{ici on prend } mgz = 0 \text{ pour } z = l_0 - d)$$

$$\text{En } A' : E(A') = E_c(A') + E_p(A') = \frac{1}{2} mv_0^2 + mgd$$

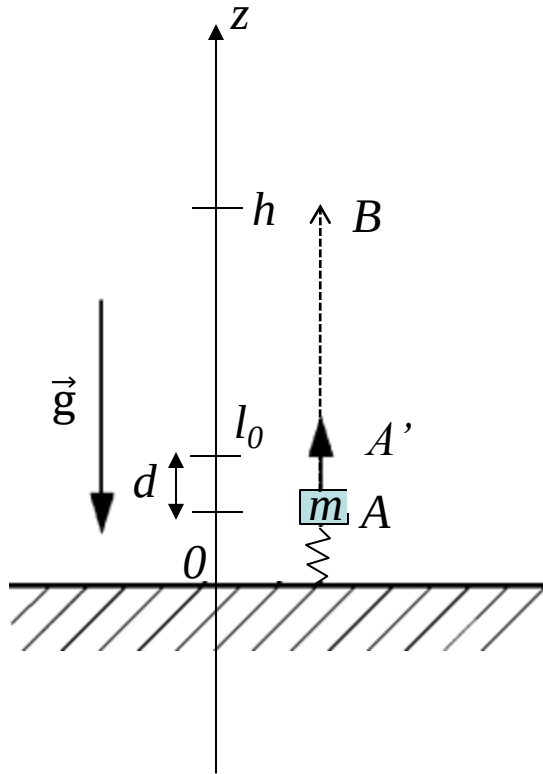
$$\text{avec } E(A) = E(A') : \frac{1}{2} mv_0^2 + mgd = \frac{1}{2} kd^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2/m} \sqrt{\frac{1}{2} kd^2 - mgd}$$

Hauteur h en B :

$$\text{En } A' : E(A') = E_c(A') + E_p(A') = \frac{1}{2} m v_0^2 + 0 \quad (\text{ici on prend } mgz = 0 \text{ pour } z = l_0)$$

$$\text{En } B : E(B) = E_c(B) + E_p(B) = 0 + mg(h-l_0)$$

$$\text{avec } E(A') = E(B) : \frac{1}{2} m v_0^2 = mg(h-l_0)$$

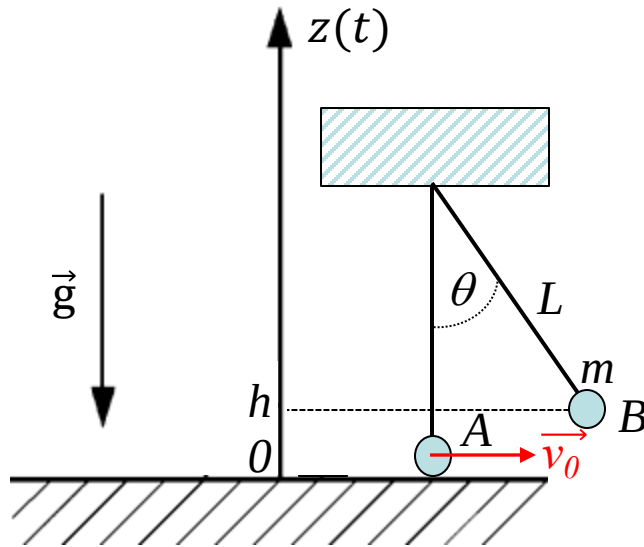


Finalemment :
$$h = \frac{1}{2mg} kd^2 - d + l_0$$

7.6. Energie mécanique

■ Application de la conservation de l'énergie mécanique

Exemple 3 : angle maximum atteint par la masse m d'un pendule lorsqu'il est lancé à la vitesse v_0 . Le fil du pendule est sans masse et de longueur L . *L'angle atteint reste inférieure à $\pi/2$.*



$$\text{En A : } E(A) = E_c(A) + E_p(A) = \frac{1}{2} m v_0^2 + 0$$

$$\text{En B : } E(B) = E_c(B) + E_p(B) = 0 + mgh$$

$$\text{avec } h = L - L\cos\theta = L(1 - \cos\theta)$$

$$\text{avec } E(A) = E(B) : \frac{1}{2} m v_0^2 = mgL(1 - \cos\theta)$$

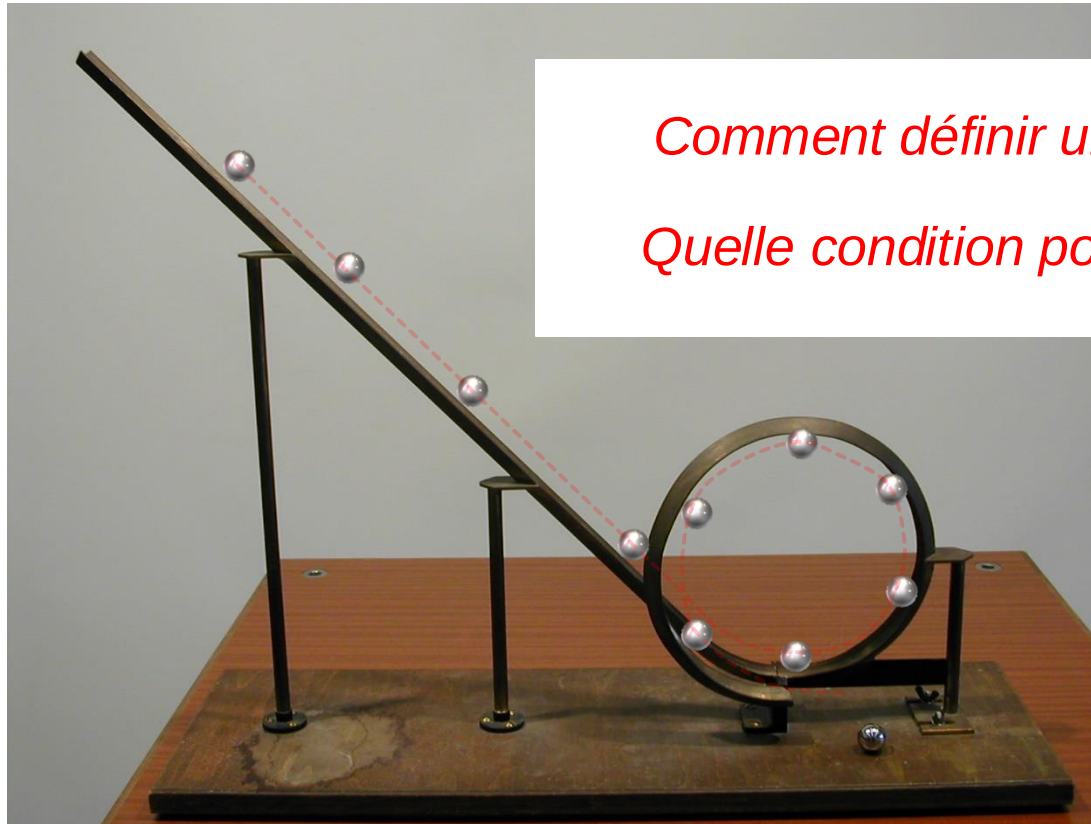
$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2gL} v_0^2$$

$$\text{Finalement : } \theta = \arccos\left(1 - \frac{1}{2gL} v_0^2\right)$$

7.6. Energie mécanique

■ Application de la conservation de l'énergie mécanique

Exemple 4 : calcul de la hauteur h du lâché de la bille telle qu'elle fasse le tour complet de la boucle sans décrocher, c'est-à-dire qu'elle reste au contact avec la glissière (on néglige les frottements)



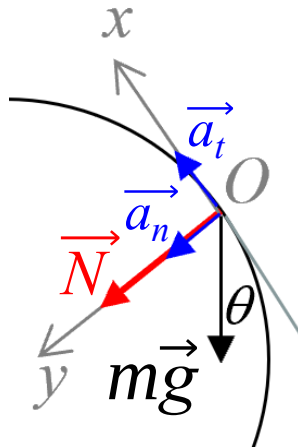
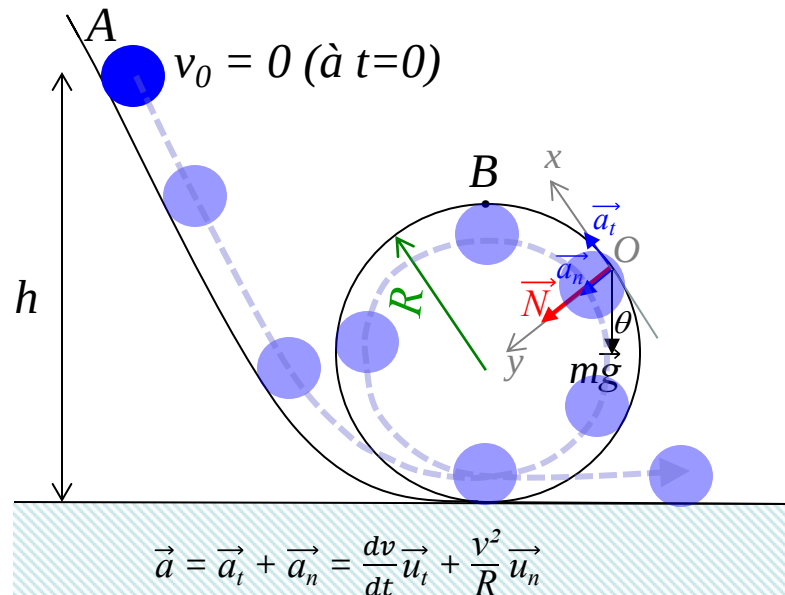
Comment définir un critère physique pour le décrochage ?

Quelle condition pouvons-nous écrire lorsqu'il y a décrochage ?

7.6. Energie mécanique

■ Application de la conservation de l'énergie mécanique

Exemple 4: suite...



La force $\vec{N}$ correspond à la réaction de la glissière sur la bille tant que celle-ci est en contact. La glissière circulaire impose alors à la bille un changement de direction et génère ainsi une accélération centripète égale à $\frac{v^2}{R}$.

a) Etude préliminaire du problème (dans repère de Frenet)

Forces extérieures : le poids et la réaction de la glissière

$$2^{\text{nd}} \text{ loi de Newton : } m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

$$\text{projection} \begin{cases} \text{Ox : } ma_t = -mg \cos \theta \\ \text{Oy : } ma_n = N + mg \sin \theta \end{cases}$$

$$\text{Mouvement circulaire (imposé par la glissière)} \Leftrightarrow \vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{u}_n$$

$$\text{d'où } m \frac{v^2}{R} = N + mg \sin \theta \Leftrightarrow N = m \frac{v^2}{R} - mg \sin \theta$$

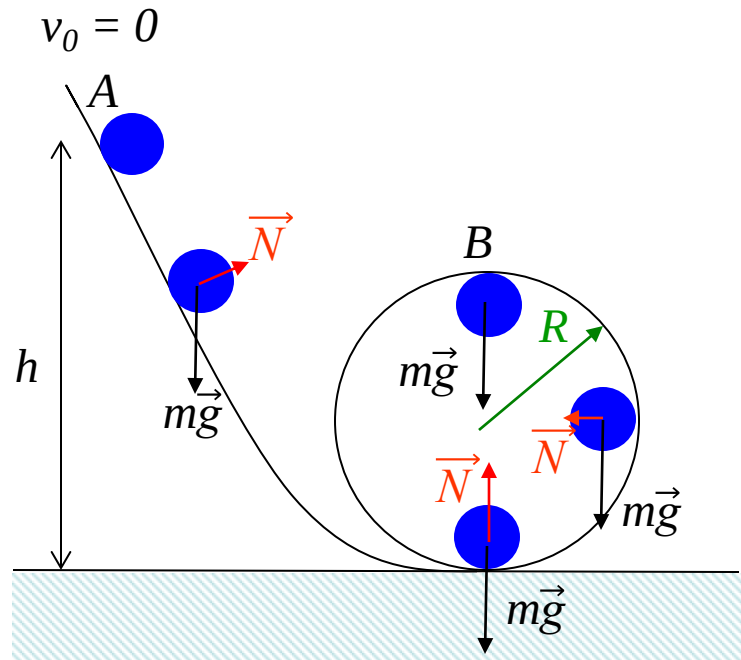
On remarque que N diminue quand θ augmente à partir de 0° et est minimum pour $\theta = 90^\circ$

$$\text{soit en B } (\theta = 90^\circ) \Leftrightarrow N_{\min} = m \frac{v^2}{R} - mg$$

7.6. Energie mécanique

■ Application de la conservation de l'énergie mécanique

Exemple 4: suite...



b) Condition de décrochage en B?

Lorsque $N=0$ alors la balle «n'appuie» plus sur la glissière. Ceci définit le point de décrochage

La réaction calculée au point a) est $N_{\min} = m \frac{v^2}{R} - mg$

La condition $N_{\min}=0$ conduit alors à $v = \sqrt{gR}$

c) Conservation de l'énergie

On prend l'énergie potentielle nulle au niveau du sol ($h=0$)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Au point A : } E_A = mgh \\ \text{Au point B : } E_B = mg(2R) + \frac{1}{2}mv^2 \end{array} \right\} E_A = E_B$$

$$\text{Soit } mgh = mg(2R) + \frac{1}{2}mgR \quad \text{with } v = \sqrt{gR}$$

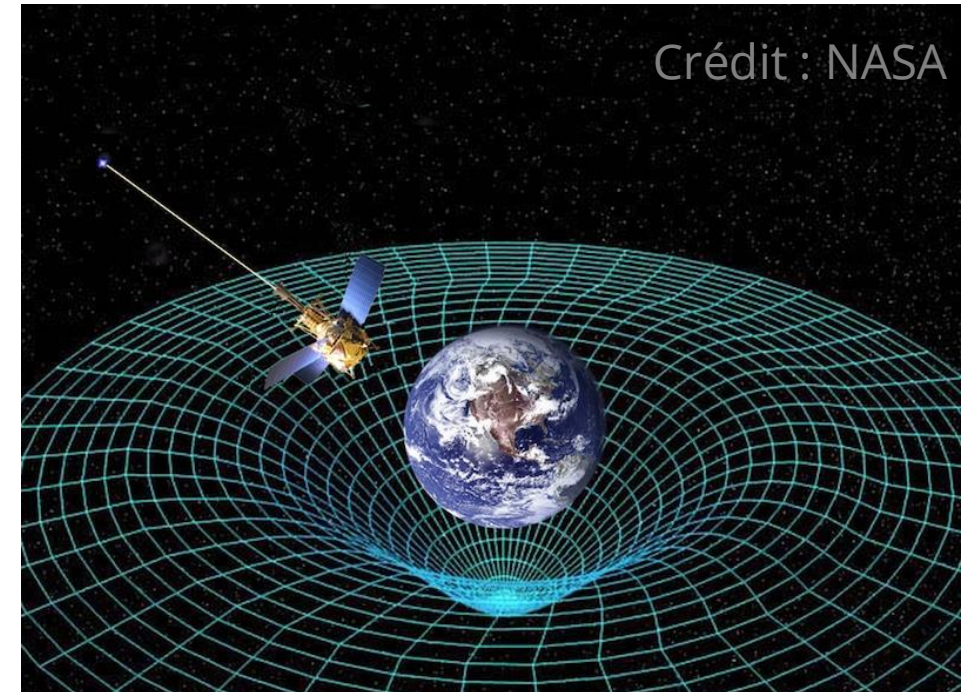
$$mgh = \frac{5}{2}mgR \Rightarrow \boxed{h = \frac{5}{2}R}$$

Week 6 – Part 3

7. Travail; énergie; principes de conservation

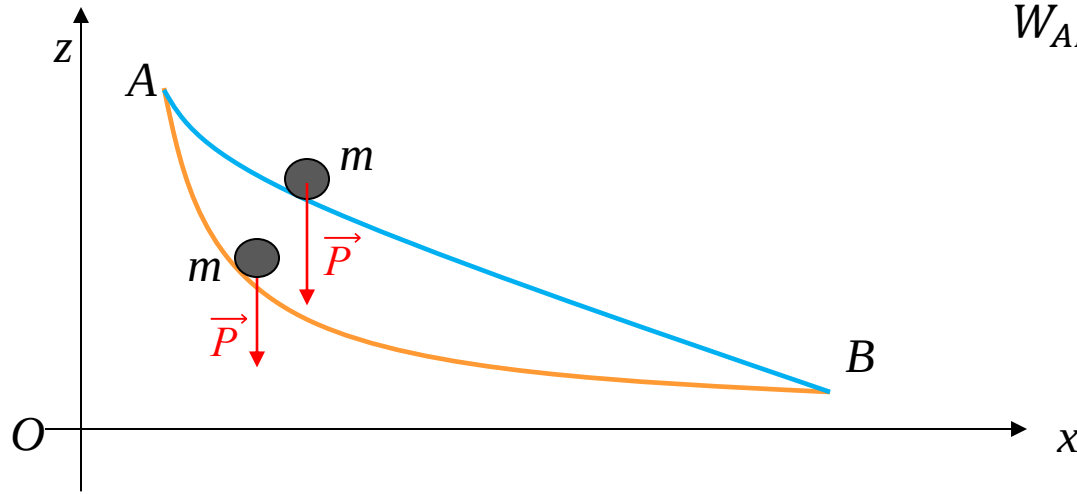
7.7. Force conservative

7.8. Force non-conservative



7.7. Force conservative

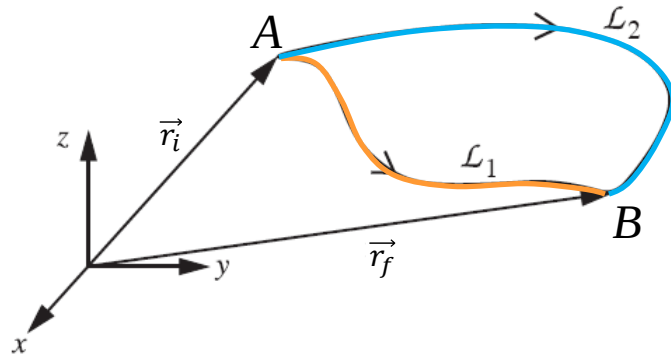
■ Définition



$$W_{AB} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -mgdz = -mg(z_B - z_A)$$

➡ *Le travail **ne dépend pas** du chemin parcouru*

Le poids est une force dite « conservative »



La force F est appelée conservative si son travail **ne dépend pas** du chemin parcouru

$$W_{\mathcal{L}_1} = W_{\mathcal{L}_2}$$

7.7. Force conservative

Si F est une force conservative alors elle possède les propriétés suivantes :

$$W_{\mathcal{L}_1} = W_{\mathcal{L}_2} \quad \text{Le travail ne dépend pas du chemin parcouru}$$

$$\oint \delta W = 0 \quad \text{Le travail est nul sur une trajectoire fermée}$$

$$W = -(U_f - U_i) \quad U(r) \text{ est une fonction appelée « potentiel »}$$

$$\vec{F}(r) = -\frac{dU(r)}{dr} \vec{e}_r \quad \text{On dit que la force dérive d'un potentiel } U(r)$$

$\frac{\partial}{\partial x}$: signifie « dérivée partielle » par rapport à x

exemple:

$$f(x,y) = 2x+3y-1$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2 \text{ et } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3$$

Cette écriture est correcte si F ne dépend que d'une seule variable. L'écriture générale est :

$$\vec{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial U(r)}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial U(r)}{\partial z} \vec{e}_z$$

Opérateur nabla ∇ ou $\vec{\nabla}$

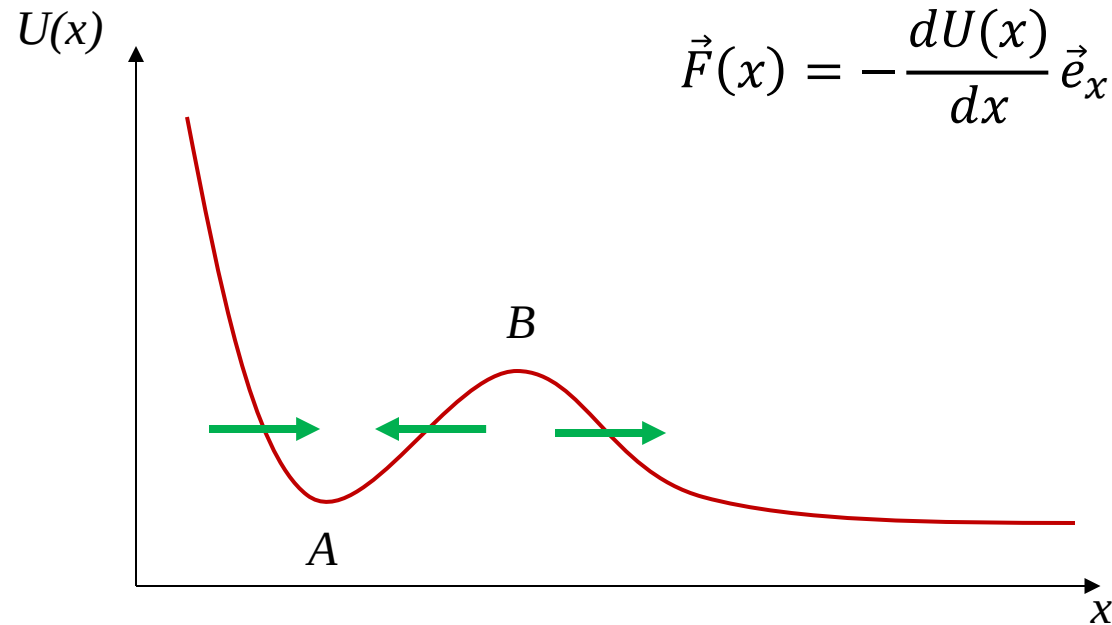
$$\nabla: \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} U(r) = -\nabla U(r)$$

$\overrightarrow{\text{grad}}$: gradient

7.7. Force conservative

■ Energie potentielle, force, et position d'équilibre



Cas du champ de pesanteur:

$$U(z) = mg \cdot z$$

Cas du ressort:

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

La dérivée de la fonction $U(x)$ étant nulle en A et B, la force y est donc nulle

$\Rightarrow$ ces points correspondent à une position d'équilibre

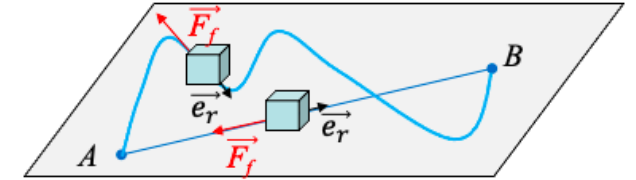
A représente un minimum de la fonction $U(x)$: c'est une position d'équilibre stable

B représente un maximum de la fonction $U(x)$: c'est une position d'équilibre instable

7.8. Force non-conservative

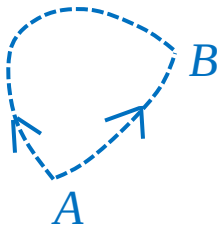
■ Cas d'une force de frottement

L'énergie mécanique $E = E_c + E_p$ d'un système n'est plus constante lorsque celui-ci est soumis à une force de frottement



Soit W' le travail de la force de frottement, la variation d'énergie mécanique correspond au travail de la force de frottement

$$(E_c + E_p)_B - (E_c + E_p)_A = W' \text{ avec } W' < 0 \Rightarrow \text{perte d'énergie vers l'extérieur}$$



Le travail de la force de frottement entre A et B est différent pour les deux trajets

$$(E_B - E_A)_{\text{trajet 1}} \neq (E_B - E_A)_{\text{trajet 2}}$$

*Une force de frottement est une force «**non-conservative**»*

7.8. Force non-conservative

■ Cas d'une force de frottement

Exercice : Un bloc est lancé sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale avec une vitesse v_0 . Il subit une force de frottement sec F_f . Quelle distance L parcourt-il avant de s'arrêter ?

$$\text{Etat initial : } E_i = E_{c,i} + E_{p,i} = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0$$

$$\text{Etat final : } E_f = E_{c,f} + E_{p,f} = 0 + mgh = mgL \sin \alpha$$

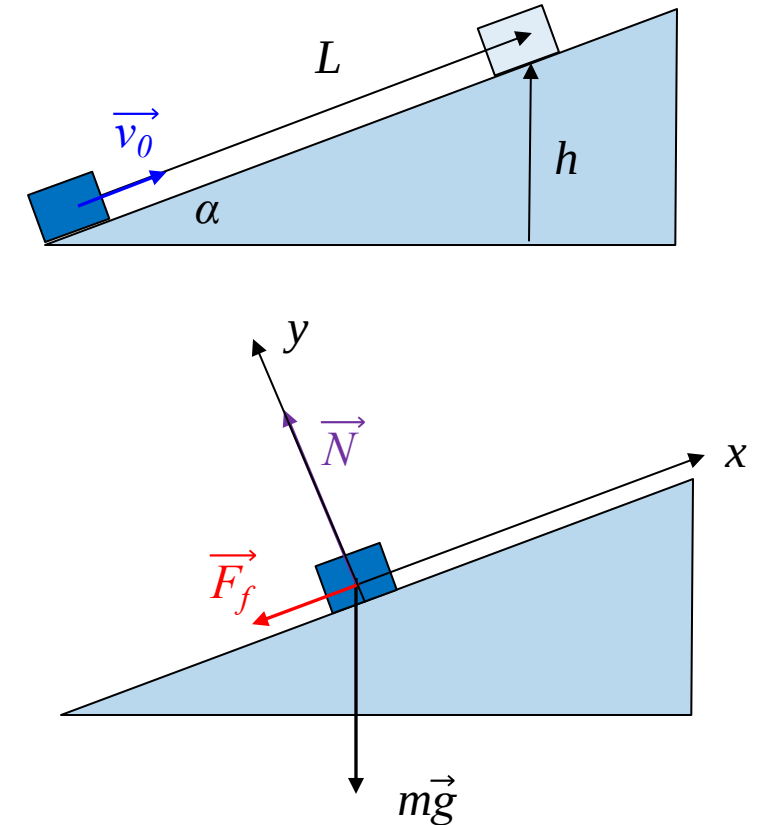
$$\text{Travail de la force de frottement : } W' = \int_0^L \vec{F}_f \cdot d\vec{x} = -L F_f$$

$$E_f - E_i = W' = -L F_f = -L \mu_c N$$

$$2^{\text{nd}} \text{ loi de Newton sur } Oy : 0 = N - mg \cos \alpha \Rightarrow N = mg \cos \alpha$$

$$E_f - E_i = mgh = mgL \sin \alpha - \frac{1}{2}mv_0^2 = -L \mu_c mg \cos \alpha$$

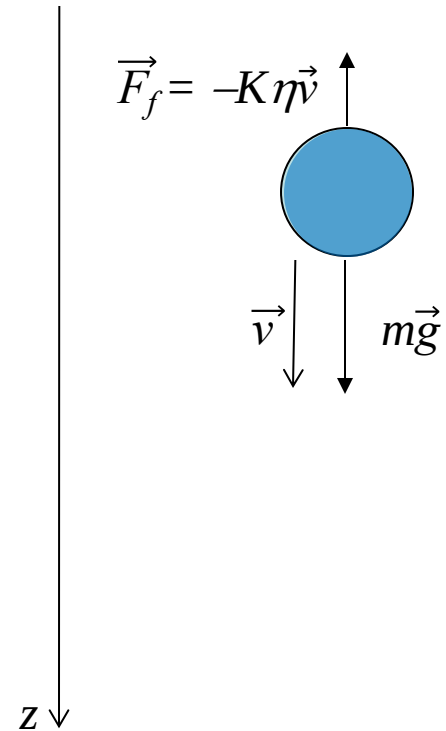
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgL (\sin \alpha + \mu_c \cos \alpha) \Rightarrow L = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu_c \cos \alpha)}$$



7.8. Force non-conservative

■ Dissipation de l'énergie pour un frottement fluide

On s'intéresse à la chute libre d'un objet dans un fluide en tenant compte de la force de frottement fluide (on néglige ici la poussée d'Archimède)



$\vec{F}_f = -K\eta\vec{v}$: force de frottement fluide

Energie dissipée = travail de la force de frottement : $\delta W' = -K\eta\vec{v} \cdot d\vec{l} = -K\eta v dl$

$$\delta W' = -K\eta v dl = -K\eta v v dt = -K\eta v^2 dt$$

avec $\delta W'$ travail effectué par la force de frottement pendant dt

La variation d'énergie mécanique est égale à l'énergie dissipée par la force de frottement fluide :

$$d(E_c + E_p) = d\left(\frac{1}{2}mv^2 - mgz\right) = \delta W' = -K\eta v^2 dt$$

Ou encore $\frac{d(E_c + E_p)}{dt} = -K\eta v^2$

puissance dissipée

On remarque celle-ci varie comme le carré de la vitesse

Etat stationnaire : $v = v_{lim}$ avec $v_{lim} = \frac{mg}{K\eta} \Rightarrow \frac{d(E_c + E_p)}{dt} = -\frac{m^2 g^2}{K\eta}$

On cherche à construire un jeu de miniflipper. Un ressort, de longueur au repos l_0 est utilisé pour propulser une masse m qui glisse avec frottements (μ_c) sur une surface horizontale. La propulsion a lieu en comprimant le ressort de la distance x , le trou à atteindre est à la distance d mesurée quand le ressort est au repos. Quelle doit être la constante de raideur du ressort choisi pour que cela fonctionne ?

