

Week 4 – Part 1

5. 2nd loi de Newton dans un référentiel non galiléen – Coriolis

5.1. Force centrifuge et $\vec{g}$ apparent

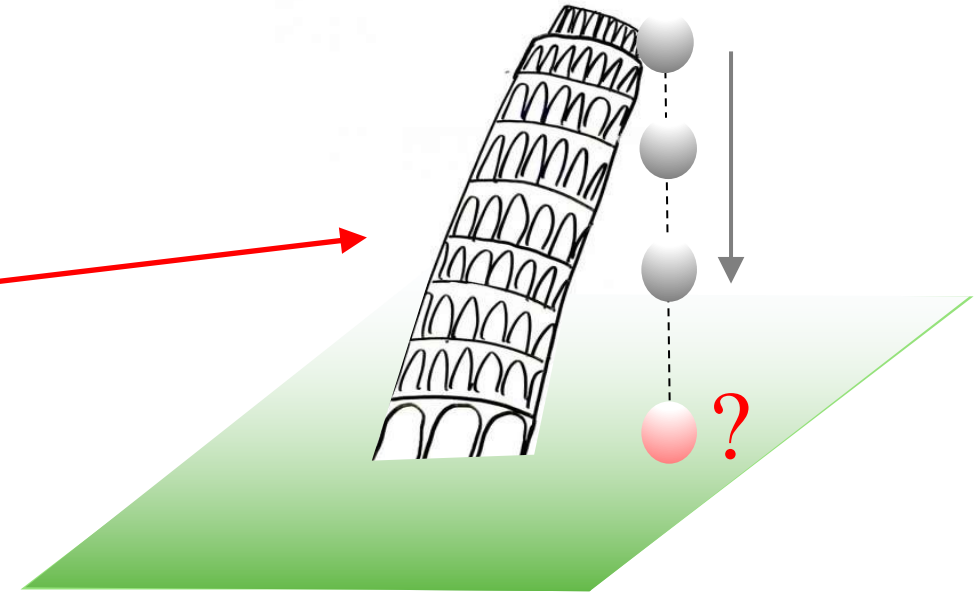
5.2. Force de Coriolis et chute libre



5. 2nd loi de Newton dans un référentiel non galiléen – Coriolis

La Terre est en rotation uniforme autour d'un axe passant par les pôles

⇒ Donc la Terre n'est pas un référentiel galiléen (rotation)

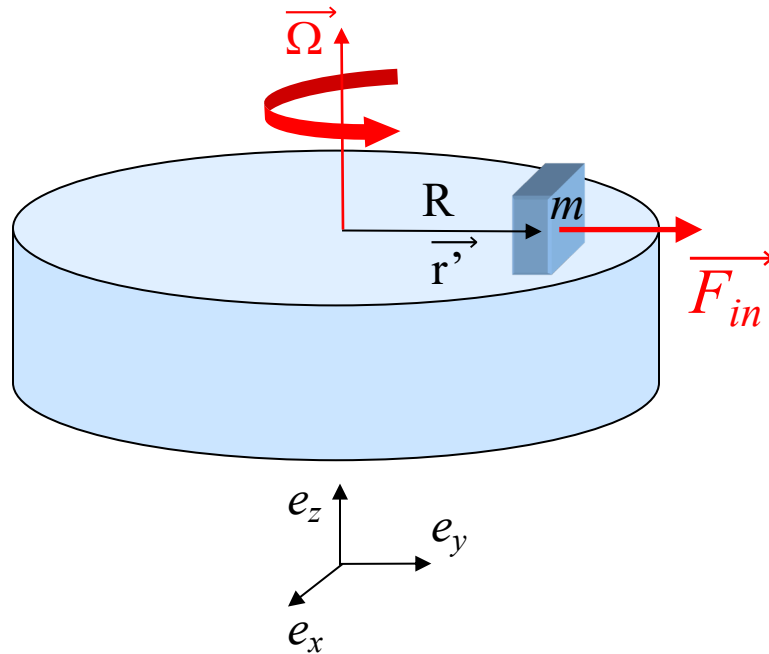


- Quelle est l'influence de la rotation de la Terre sur la chute libre d'un corps (position du point d'impact par rapport à la verticale du point de lâcher) ?
- Comment calculer la trajectoire pour un observateur se trouvant dans un repère lié à la Terre ?

5.1. Force centrifuge et $\vec{g}$ apparent

■ Cas d'un objet immobile dans un référentiel en rotation uniforme : $\vec{v}' = \vec{0}$ et $\vec{\Omega} = \text{cte}$

Si l'objet est immobile ($v' = 0$) alors la force de Coriolis est nulle. En revanche, l'objet est soumis à la force d'inertie, appelée aussi force centrifuge.



$$\vec{F}_{in} = -m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}') \quad \text{Force centrifuge}$$

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{r}' = -(\Omega R) \vec{e}_x$$

$$-\vec{\Omega} \wedge -(\Omega R) \vec{e}_x = \Omega^2 R \vec{e}_y$$

$$\boxed{\vec{F}_{in} = m\Omega^2 R \vec{e}_y}$$

Application numérique : pour une vitesse de rotation de 1 tour par seconde, un rayon de 1 m, et une masse de 100 kg, alors $F_{in} = 3944 \text{ N}$ soit $\sim 4g$

5.1. Force centrifuge et $\vec{g}$ apparent

■ Application de la force centrifuge : entraînement des astronautes



Bras de 9 m à ~ 1 t/sec

36g



Centrifugeuse à la Cité des étoiles (Russie)

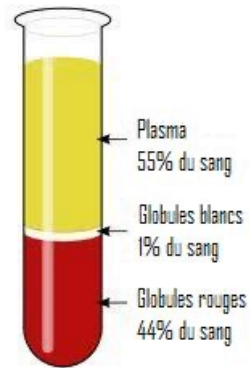
5.1. Force centrifuge et $\vec{g}$ apparent

■ Autres applications de la force centrifuge

Jus de fruits



Extrait du plasma sanguin



Combustible nucléaire

- L'énergie nucléaire est produite à partir d'**uranium 235**, qui représente seulement 0,7% de l'uranium naturel, le reste étant de l'**uranium 238**
- le processus d'enrichissement **augmente la proportion d'U-235** en le séparant de l'U-238

Centrifugeuse à gaz

- 1 L'uranium à l'état gazeux est introduit dans une **centrifugeuse**
- 2 Les molécules sont **séparées** grâce à la force centrifuge

- 3 L'**U-238**, plus **lourd**, est repoussé vers l'extérieur
- 4 L'**U-235**, plus **léger**, reste au centre

- 5 Le **gaz enrichi en U-235** part dans une 2^e centrifugeuse

- 6 Répétition du processus pour plus de concentration

- 7 Le gaz légèrement **appauvri** en U-235 est à nouveau utilisé pour la première étape

Usage civil : la majorité des centrales nucléaires utilisent de l'uranium enrichi de **3,5 à 5% d'U-235**

Usage militaire : une concentration d'au moins **90% d'U-235** est nécessaire pour fabriquer des armes nucléaires

Moteur

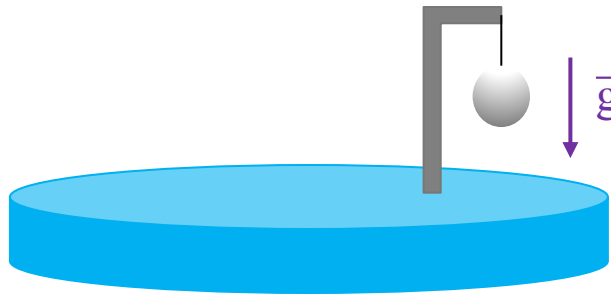
Sources : USNRC, World-nuclear.org

© AFP

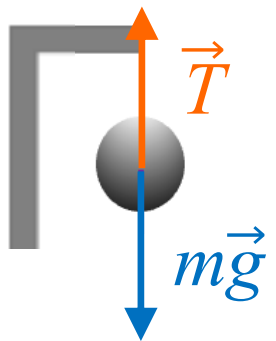
5.1. Force centrifuge et $\vec{g}$ apparent

■ Référentiel en rotation et influence sur le poids : $\vec{g}$ apparent

Référentiel galiléen
pas de rotation (R)

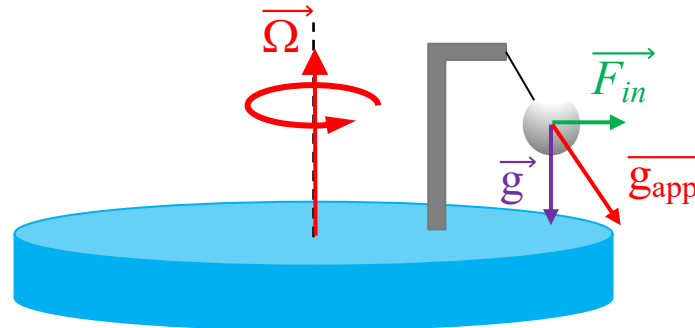


$$m\vec{a} = 0 = \vec{T} + m\vec{g}$$



$$\vec{T} = -m\vec{g}$$
$$T = mg$$

Référentiel non-galiléen
en rotation (R')



Le fil à plomb indique une direction différente de celle de $\vec{g}$.

L'intensité de la force de tension T n'est plus égale au poids.

La force extérieure qui s'applique sur la masse m est $m\vec{g}_{app}$, avec $\vec{g}_{app}$ le poids apparent ou effectif.

↙
*la masse est
immobile dans R'*

Pour un objet immobile dans R' ($v'=0$)

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}') \quad \text{centrifuge}$$

$$0 = \vec{F}_{ext,avec g} - m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}')$$

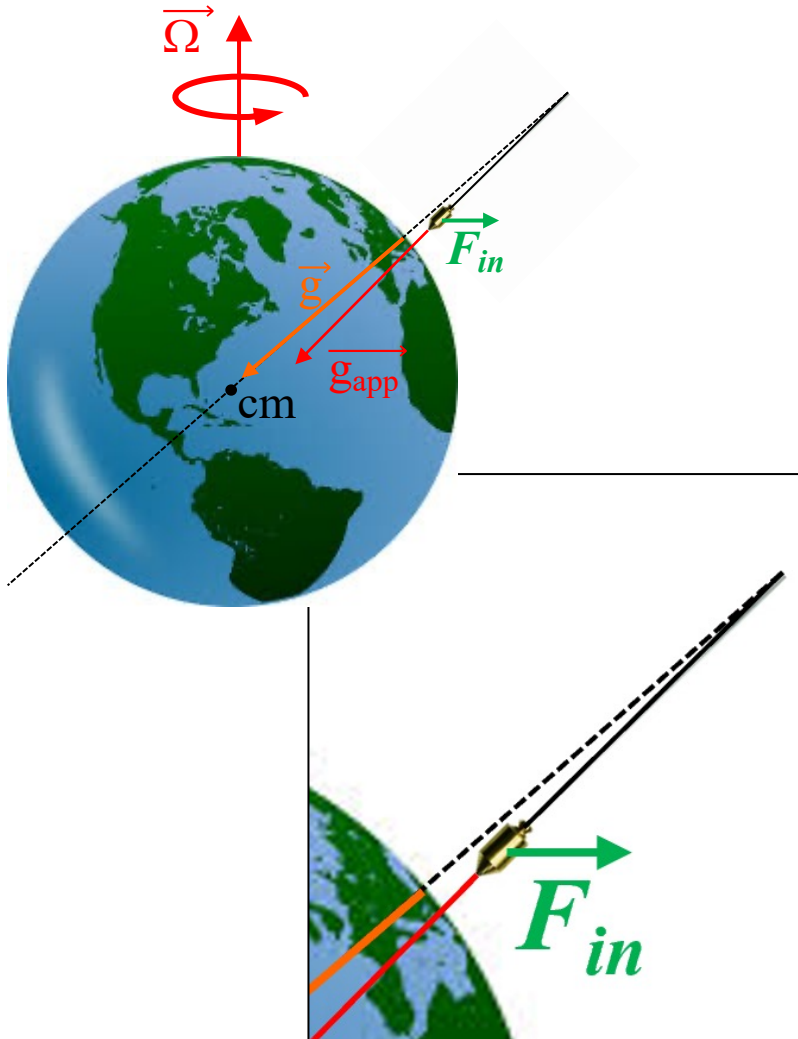
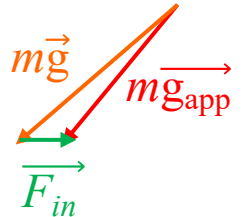
5.1. Force centrifuge et $\vec{g}$ apparent

■ $\vec{g}$ apparent sur la Terre

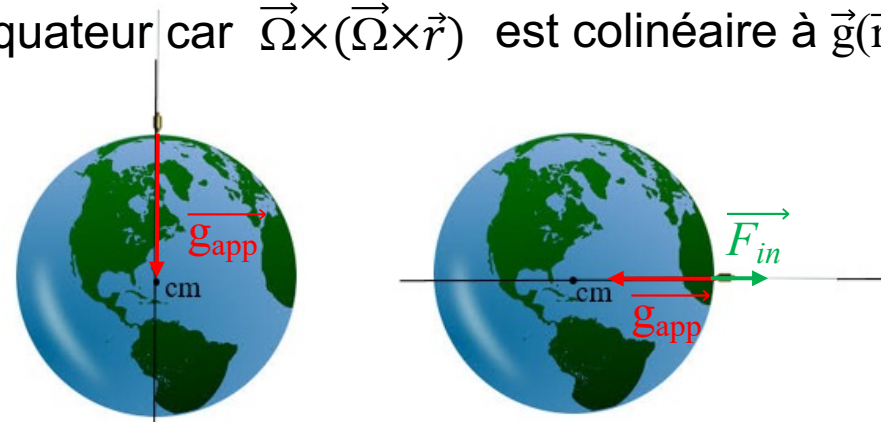
Un fil à plomb ne pointe pas exactement en direction du centre de la Terre en raison de la rotation de celle-ci qui induit une force centrifuge.

Soit $\vec{g}(\vec{r})$ l'accélération due au champ de gravitation, alors $\vec{g}(\vec{r})$ apparent est donné par :

$$\vec{g}_{app}(\vec{r}) = \vec{g}(\vec{r}) - \underbrace{\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})}_{\vec{F}_{in}}$$



Remarque : pas de déviation aux pôles car $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = 0$
ni à l'équateur car $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ est colinéaire à $\vec{g}(\vec{r})$



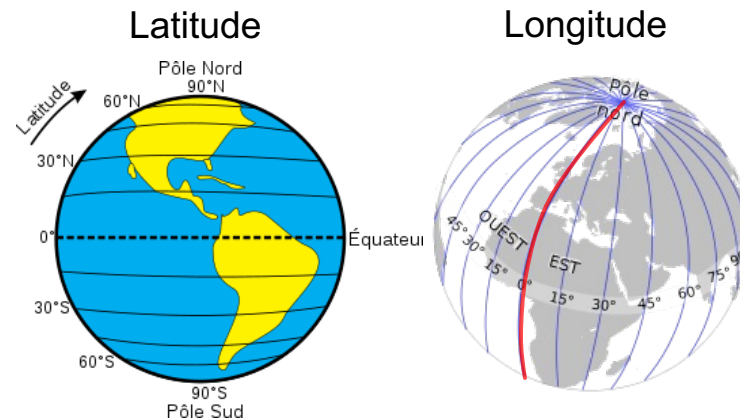
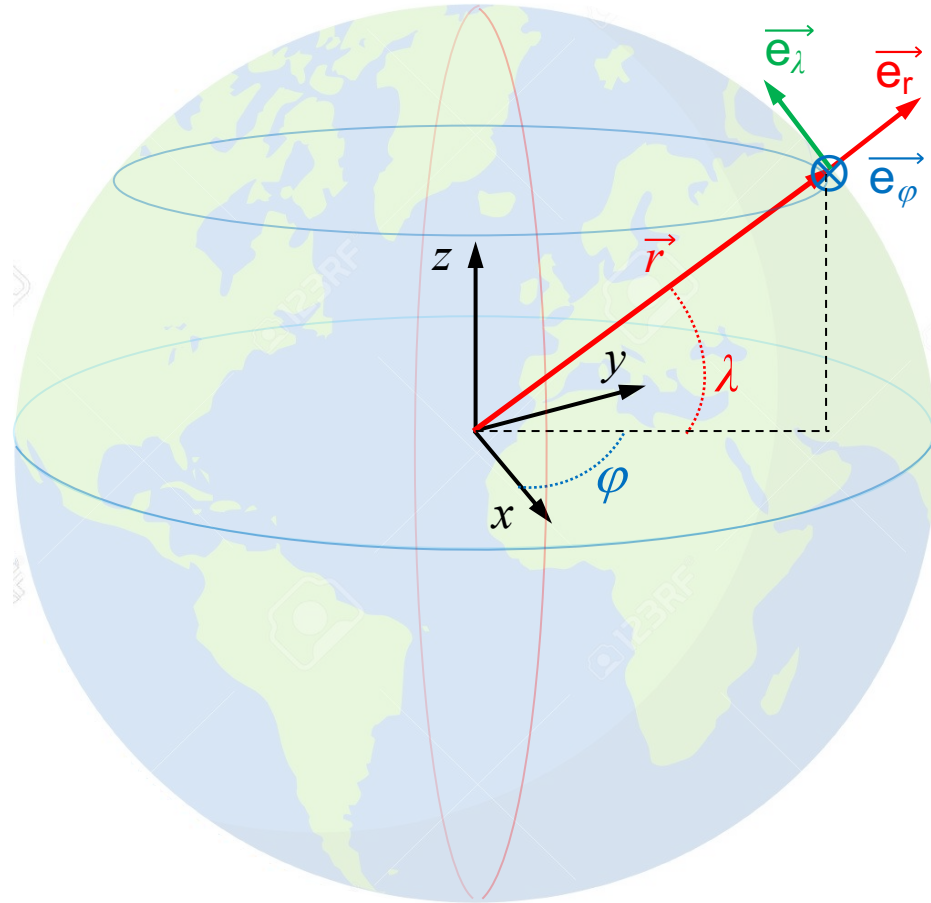
Rem : dans ce qui suit on utilisera la notation $\vec{r}$, $\vec{v}$, et $\vec{a}$ pour le référentiel Terre (R')

5.1. Force centrifuge et $\vec{g}$ apparent

■ Système de coordonnées terrestres : coordonnées géographiques

On définit un point sur la Terre par

- l'altitude h ($r = R_{\text{Terre}} + h$)
définie par rapport au niveau de la mer
- la latitude λ
définie par rapport à l'équateur ($\lambda = 0^\circ$)
- la longitude φ
définie par rapport au méridien de Greenwich ($\varphi = 0^\circ$)



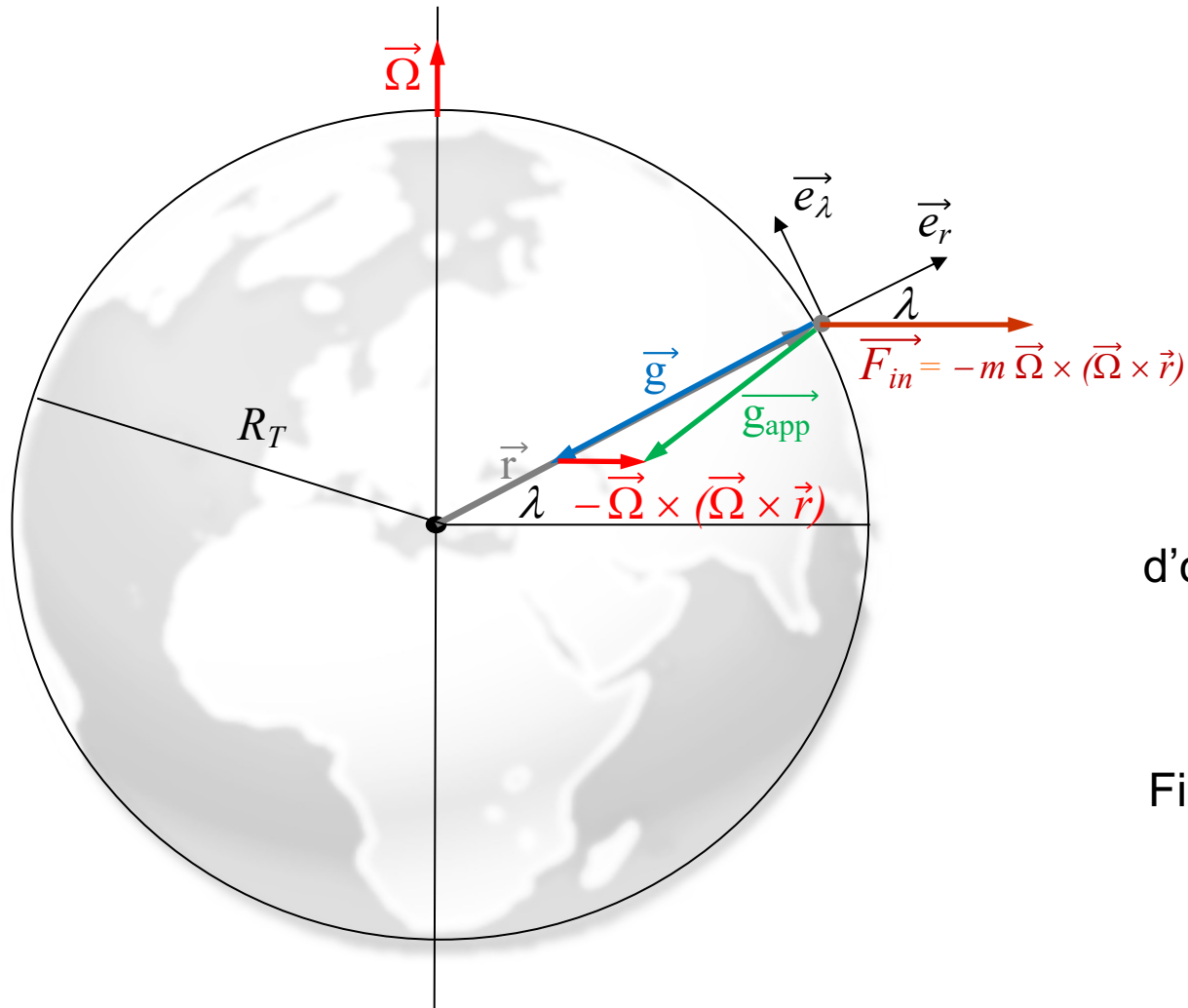
Observatoire de Greenwich (Londres)



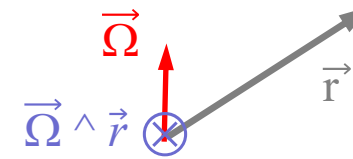
5.1. Force centrifuge et $\vec{g}$ apparent

■ Calcul de $\vec{g}$ apparent

$$\vec{g}_{\text{app}} = -g \vec{e}_r - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$$



On cherche à exprimer $-\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$ dans la base $\vec{e}_r \vec{e}_\lambda$



$$|\vec{\Omega} \wedge \vec{r}| = \Omega R_T \sin(\pi/2 - \lambda) = \Omega R_T \cos \lambda$$

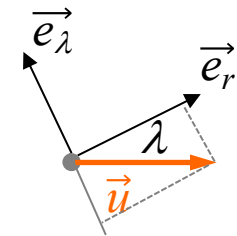


$$|-\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})| = \Omega \Omega R_T \cos \lambda \sin(\pi/2) = \Omega^2 R_T \cos \lambda$$

d'où $-\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) = \Omega^2 R_T \cos \lambda \vec{u}$

$\vec{u}$ vecteur unitaire

$$\vec{u} = -\sin \lambda \vec{e}_\lambda + \cos \lambda \vec{e}_r$$

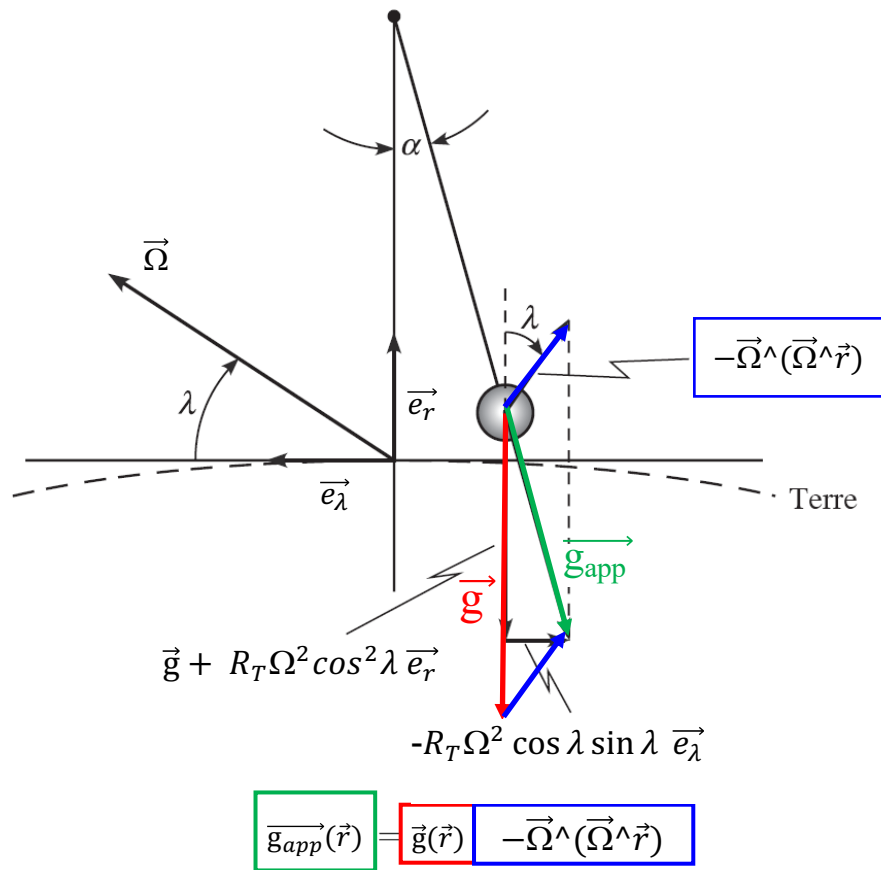


Finalement

$$\begin{aligned} \vec{g}_{\text{app}} &= -g \vec{e}_r + \Omega^2 R_T \cos \lambda [-\sin \lambda \vec{e}_\lambda + \cos \lambda \vec{e}_r] \\ &= [-g + \Omega^2 R_T \cos^2 \lambda] \vec{e}_r - \Omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda \vec{e}_\lambda \end{aligned}$$

5.1. Force centrifuge et $\vec{g}$ apparent

■ Calcul de $\vec{g}$ apparent



Le fil à plomb indique la direction de $\vec{g}_{app}$

*La déviation est vers le Sud dans l'hémisphère nord
La déviation est nulle à l'équateur et aux pôles*

La tension T détermine l'intensité de $\vec{g}_{app}$

$$g_{pol} = 9.81 \frac{m}{s^2} \text{ et } g_{eq} = 9.78 \frac{m}{s^2}$$

Déviation : angle α entre $\vec{g}$ et $\vec{g}_{app}$

$$\tan \alpha = \frac{R_T \Omega^2 \cos \lambda \sin \lambda}{g - R_T \Omega^2 \cos^2 \lambda} \approx 1.7 \cdot 10^{-3} \sin(2\lambda)$$

Au Maximum 0.1 deg !

5.2. Force de Coriolis et chute libre

■ Corps en chute libre

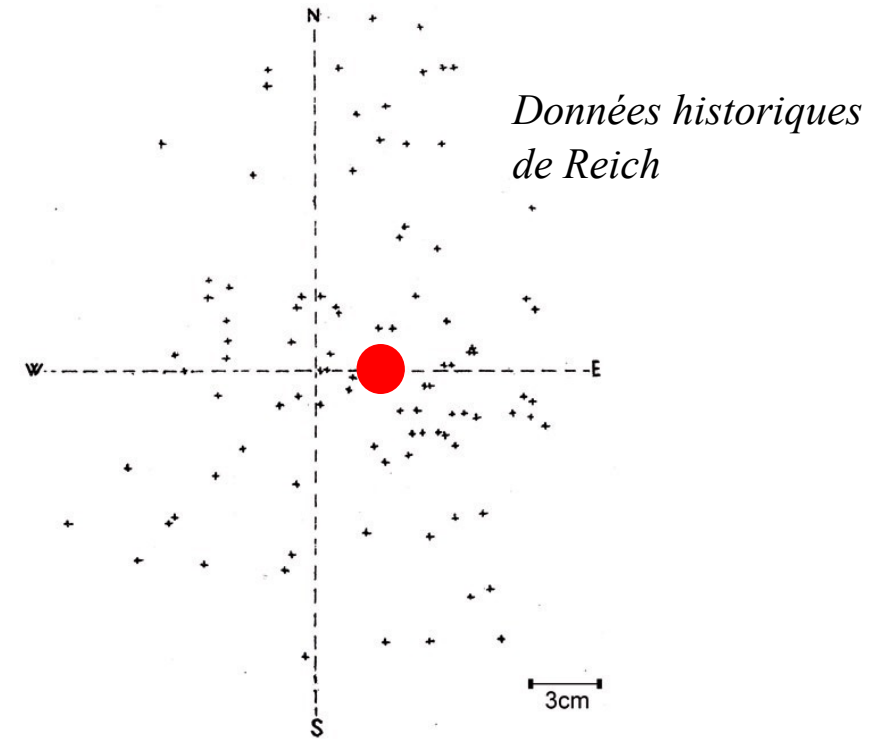
En 1833, Reich fait une expérience qui consiste à laisser tomber une bille dans un puits de mine d'une profondeur de 158 m. Il observe une déviation moyenne vers l'Est de 2,8 cm du point d'impact par rapport à la verticale du point de lâcher donnée par un fil à plomb.



puits de mine



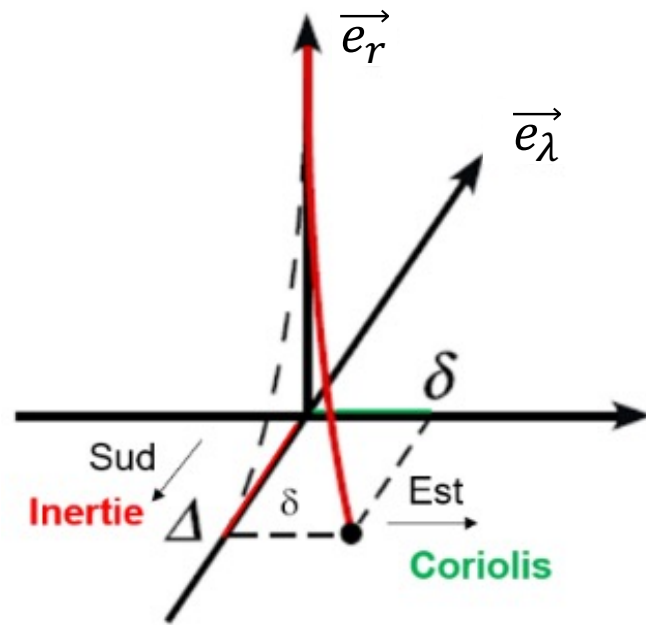
Ferdinand Reich
1799 - 1882



Source : J.G.Hagen, La rotation de la terre, ses preuves mécaniques anciennes et nouvelles, Tipografia Poliglotta Vaticana, Roma (1911)

5.2. Force de Coriolis et chute libre

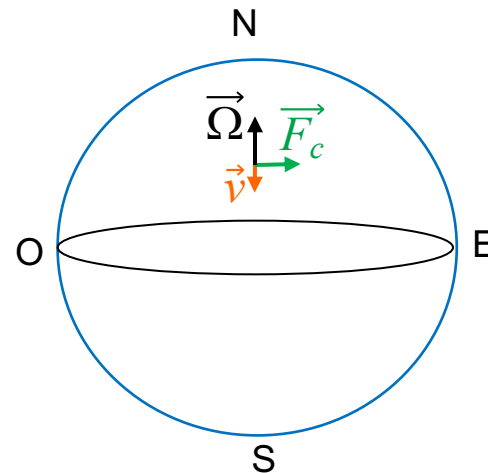
■ Déviation vers l'Est



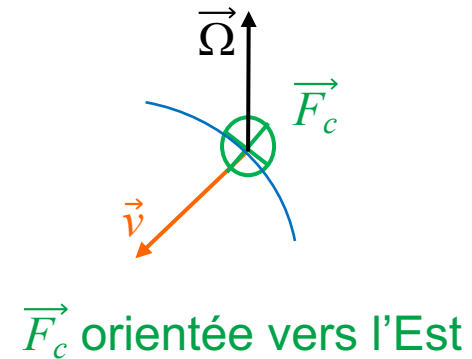
Hémisphère nord

Déviation due à la force de Coriolis

$$\text{Force de Coriolis : } \vec{F}_c = -2 m \vec{\Omega} \times \vec{v}$$



$\vec{v}$ à $t=0$ dirigée selon $\vec{g}_{app}$



$\vec{F}_c$ orientée vers l'Est

La force de Coriolis a pour conséquence une déviation vers l'Est du point de chute dans l'hémisphère nord (ou Sud)

5.2. Force de Coriolis et chute libre

■ Calcul de la déviation vers l'Est

Dans ce calcul, on applique la 2nd loi de Newton modifiée pour tenir compte de la rotation de la Terre en ajoutant la force d'inertie (incluse dans $\vec{g}_{app}$) et la force de Coriolis

$$m\vec{a}' = \sum \vec{F}_{ext} + \underbrace{\vec{F}_{Cor}}_{\text{Force de Coriolis}} + \underbrace{\vec{F}_{in}}_{\text{Force d'inertie}}$$

$$m\vec{a} = m\vec{g}_{app} + \vec{F}_c \quad \text{la force d'inertie (centrifuge) est incluse dans } \vec{g}_{app}$$

$$\text{avec } \vec{F}_c = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v} = -2m\vec{\Omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g}_{app} - 2\vec{\Omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

- On intègre une 1^{ère} fois :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{g}_{app}t - 2\vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{cte}$$

$$\text{avec } \vec{cte} = \vec{0} \text{ car } \vec{v}(t=0) = \vec{0}$$

- On intègre une 2^{ème} fois:

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}_{app}t^2 - 2\vec{\Omega} \times \int_0^t \vec{r} dt + \vec{cte}$$

$$\text{on pose } \vec{r} = \vec{0} \text{ à } t = 0 \text{ d'où } \vec{cte} = \vec{0}$$

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}_{app}t^2 - 2\vec{\Omega} \times \int_0^t \vec{r} dt$$

on suppose que la déviation latérale due à Coriolis est faible par rapport à la hauteur de chute :

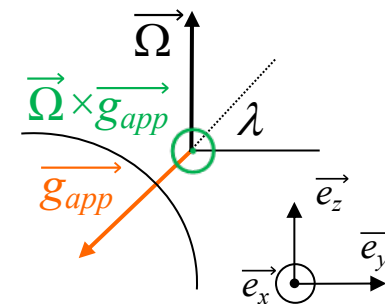
$$\vec{r} \approx \frac{1}{2}\vec{g}_{app}t^2$$

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}_{app}t^2 - 2\vec{\Omega} \times \int_0^t \frac{1}{2}\vec{g}_{app}t^2 dt = \frac{1}{2}\vec{g}_{app}t^2 - \frac{\Omega g_{app} t^3}{3} \cos \lambda \vec{e}_x$$

La déviation est suivant $-\vec{e}_x$ c'est à dire vers l'Est

$$\delta = -\frac{\Omega g_{app} t^3}{3} \cos \lambda = \frac{2}{3} \Omega h t \cos \lambda \quad \text{car} \quad t^2 \approx \frac{2h}{g_{app}}$$

Le calcul donne 2,6 cm pour 158 m de chute libre, soit très proche de la valeur expérimentale mesurée par Reich (2,8 cm)



Week 4 – Part 2

6. Bilan des forces : application des lois de Newton

6.1. Réaction d'un support

6.2. Mobile sur un plan incliné sans frottement

6.3. Force de frottement sec

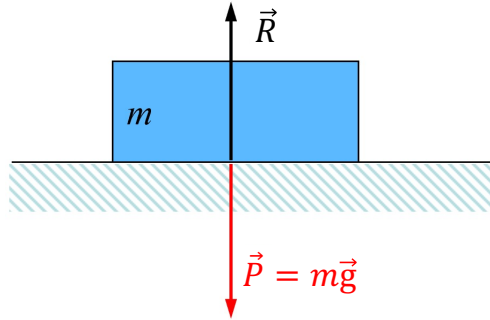
6.4. Mobile sur un plan incliné avec frottement



6.1. Réaction d'un support

■ Réaction d'une surface sur un objet

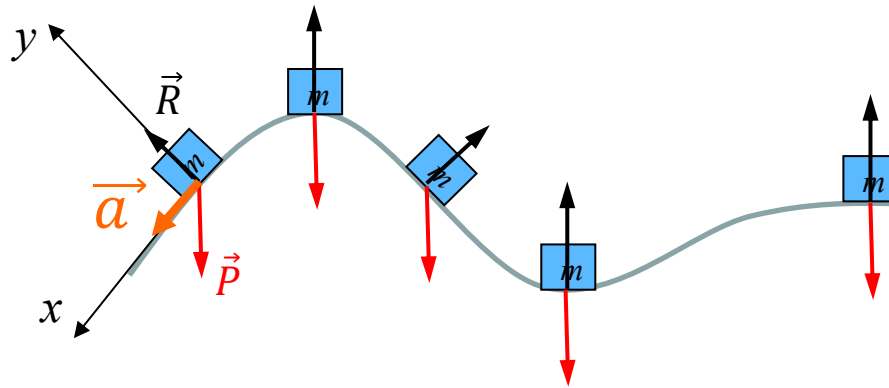
Objet immobile



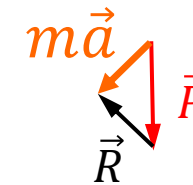
2nd loi de Newton : $m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R}$

Pas de mouvement $\Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = -\vec{P}$

Objet mobile



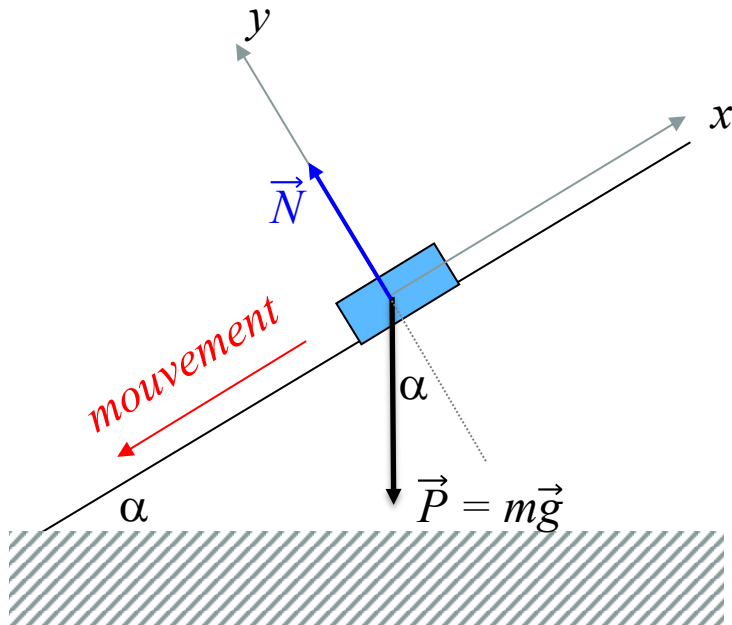
Objet en mouvement accéléré $\Rightarrow m\vec{a} = \vec{R} + \vec{P}$



La force de **réaction** $\vec{R}$ d'une surface sur un objet est toujours **normale** au support (elle est souvent appelée $\vec{N}$)

6.2. Mobile sur un plan incliné sans frottement

■ Mobile en chute libre



2nd loi de Newton : $m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{N}$

on projette $\left\{ \begin{array}{l} ma_x = -mg \sin\alpha + 0 \\ ma_y = 0 = -mg \cos\alpha + N \end{array} \right.$
avec $a_y = 0$ car mouvement suivant Ox

on trouve

$$a_x = -g \sin\alpha$$

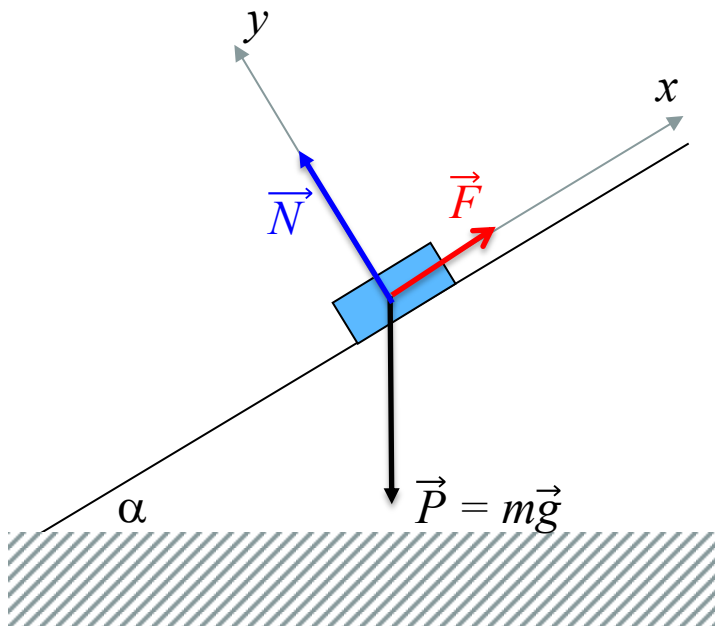
$$N = mg \cos\alpha$$

L'accélération correspond à la composante de $\vec{g}$ parallèle au plan incliné

N est la force de réaction du plan sur le mobile

6.2. Mobile sur un plan incliné sans frottement

■ Mobile en équilibre avec une force de maintien



$$\text{2nd loi de Newton : } m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}$$

A l'équilibre (pas de mouvement), l'accélération est nulle :

$$\vec{0} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}$$

$$\text{on projette } \begin{cases} ma_x = 0 = -mg \sin \alpha + 0 + F \\ ma_y = 0 = -mg \cos \alpha + N + 0 \end{cases}$$

on trouve

$$F = mg \sin \alpha$$

Force qui retient le mobile en équilibre

$$N = mg \cos \alpha$$

Réaction du support

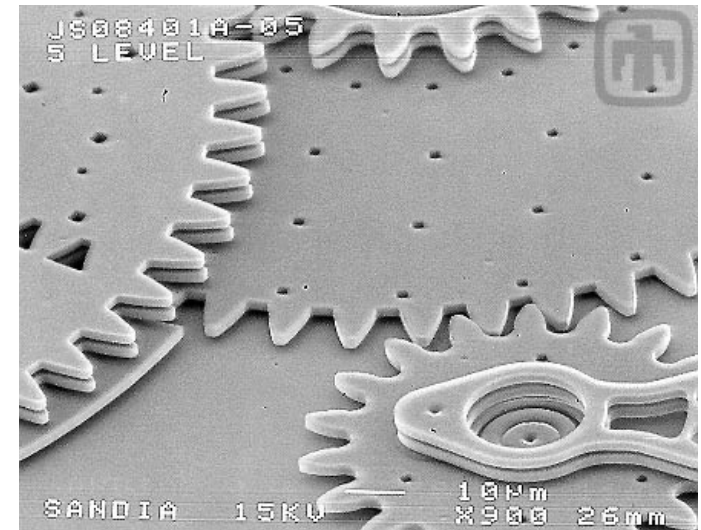
6.3. Force de frottement sec

■ Frottement entre deux surfaces

La science des frottements s'appelle la tribologie

L'origine du frottement fait intervenir plusieurs facteurs couvrant un large spectre de paramètres physiques :

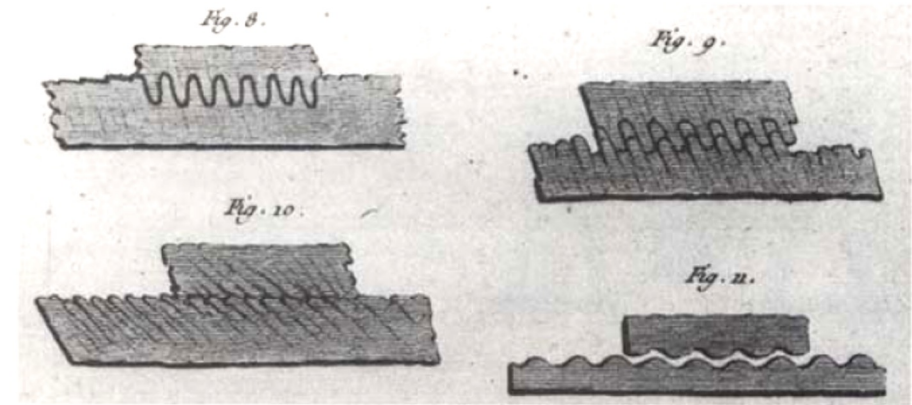
- Rugosité des surfaces
- Elasticité
- Plasticité
- Chimie des surfaces



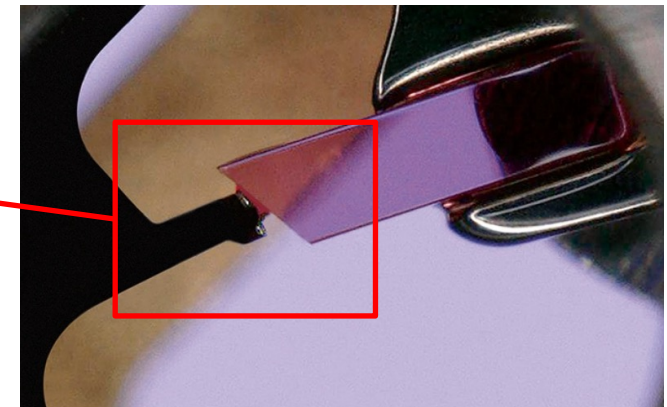
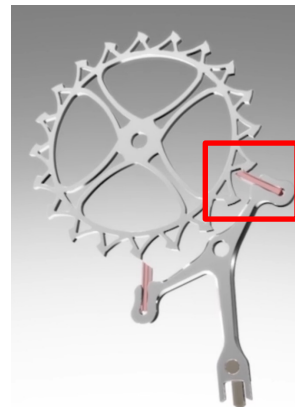
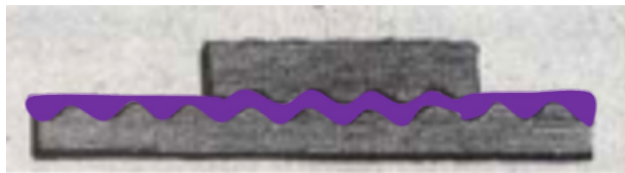
6.3. Force de frottement sec

■ Frottement entre deux surfaces

Dès le 18^{ème} siècle, Belidor et Coulomb associent la force de frottement d'un objet sur un autre à la rugosité des surfaces respectives.



Remarque : on peut réduire les forces de frottement sec avec un lubrifiant.

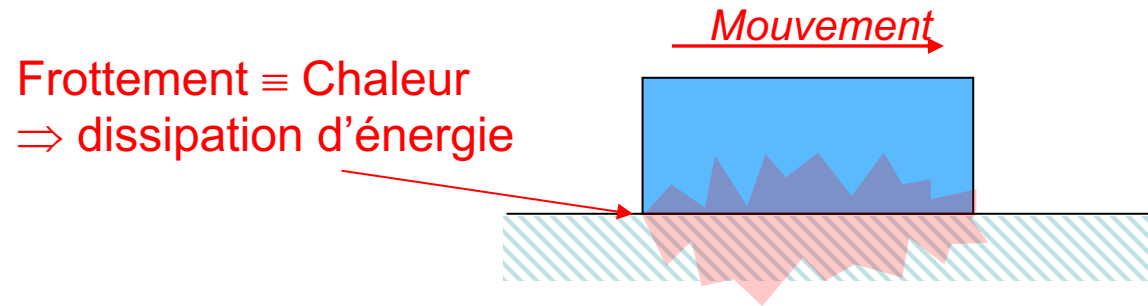


<https://www.rolex.com/fr/about-rolex-watches/science-friction.html>

6.3. Force de frottement sec

■ Frottement entre deux surfaces

Observation : « résistance » au déplacement $\Rightarrow$ dissipation d'énergie



Caractéristiques de la force de frottement sec :

- **différente si l'objet est en mouvement ou à l'arrêt**
- **proportionnelle à la force de réaction** (plus on appuie sur l'objet, plus le frottement est grand)
- **opposée au déplacement**

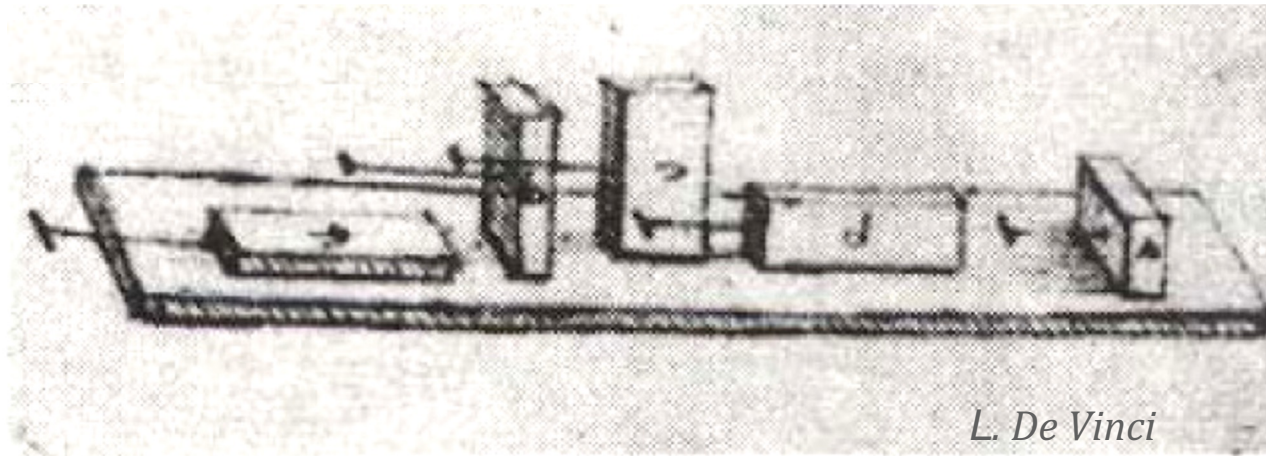
6.3. Force de frottement sec

■ Frottement entre deux surfaces

Observations

⇒ La force de frottement ne dépend en théorie pas de l'aire de contact :

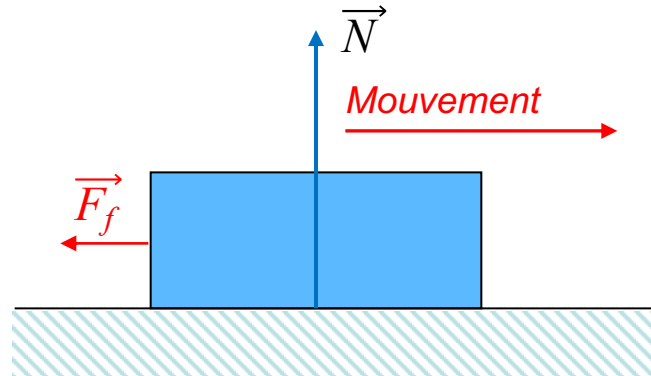
$$F_f = cte \times \text{pression} \times S = cte \times N/S \times S = cte \times N$$



Le facteur de proportionnalité entre F_f et N est appelé coefficient de frottement sec et est généralement noté μ

6.3. Force de frottement sec

■ Frottement entre deux surfaces



Il existe deux types de coefficient de frottement :

- Un coefficient de **frottement statique** qui détermine la force de frottement maximale avant la mise en mouvement d'un objet immobile.
- Un coefficient de **frottement dynamique (ou cinétique)** qui détermine la force de frottement qui s'exerce pendant le déplacement.

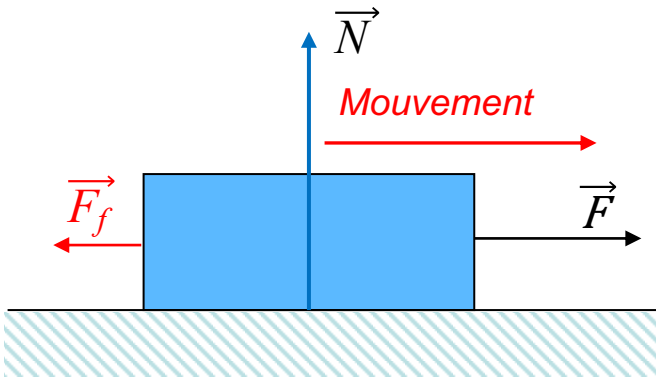
6.3. Force de frottement sec

■ Coefficients de frottement dynamique et statique

- **Frottement dynamique (cinétique)**

La force de frottement F_f est proportionnelle à la réaction N de la surface sur l'objet et s'oppose toujours au déplacement. Elle est donnée par la formule suivante :

$$||F_f|| = \mu_d ||N|| \quad \text{avec } \mu_d \text{ coefficient de frottement dynamique (cinétique)}$$



- **Frottement statique**

L'objet reste immobile alors qu'on lui applique une force $\vec{F}$ colinéaire à la direction du mouvement souhaité. Dans ce cas, nous avons $\vec{F}_f = -\vec{F}$ jusqu'à ce que l'objet se mette en mouvement (décrochage). Au décrochage, nous avons $||F_f|| = \mu_s ||N||$, avec μ_s coefficient de frottement statique.

$$||F_f|| \leq \mu_s ||N|| \quad \text{avec } \mu_s \text{ coefficient de frottement statique}$$

Lorsque l'objet décroche (mise en mouvement) $\Rightarrow ||F_f|| = \mu_s ||N||$

6.3. Force de frottement sec

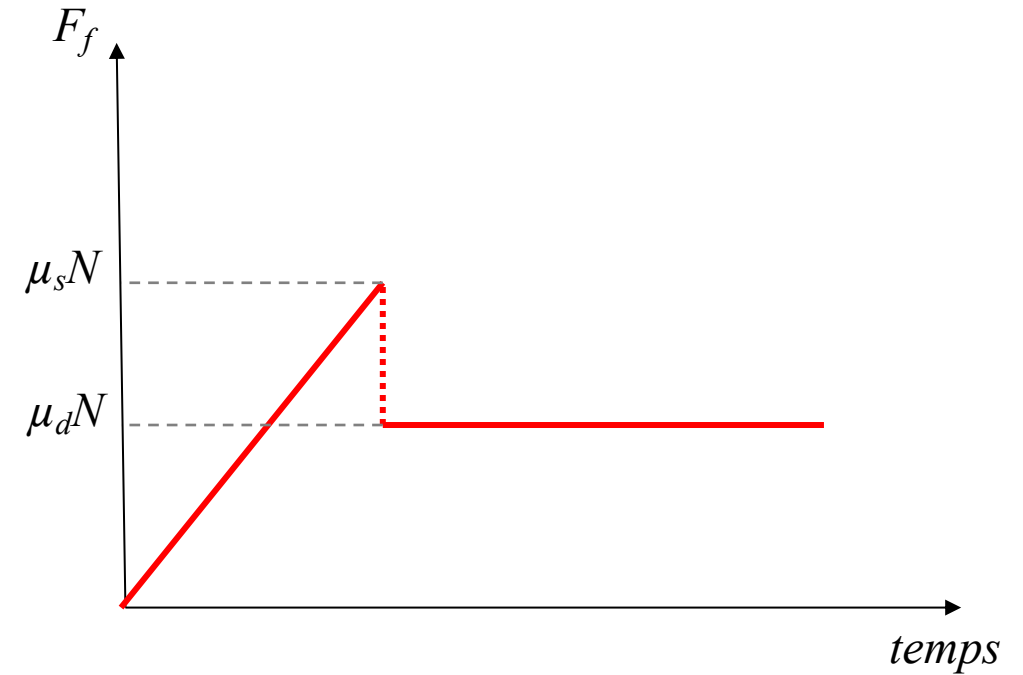
■ Coefficients de frottement statique et dynamique

Matériaux	μ_s	μ_d
Acier sur glace	0.1	0.05
Acier sur acier, sec	0.6	0.4
Acier sur acier, lubrifié	0.1	0.05
Bois sur bois	0.5	0.3
Téflon sur acier	0.04	0.04
Chaussures sur glace	0.1	0.05
Bottes de montagne sur rocher	1.0	0.8
Pneus de voiture sur béton sec	1.0	0.7
Caoutchouc sur asphalte	0.6	0.4

6.3. Force de frottement sec

■ Coefficients de frottement statique et dynamique

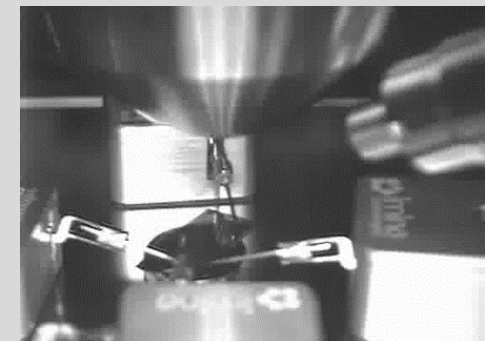
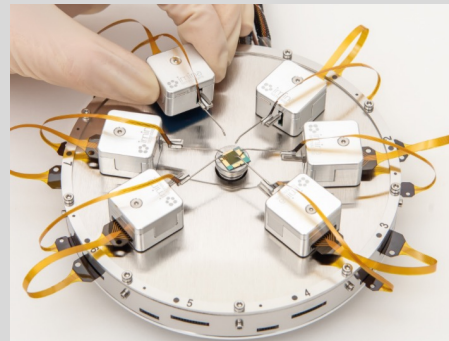
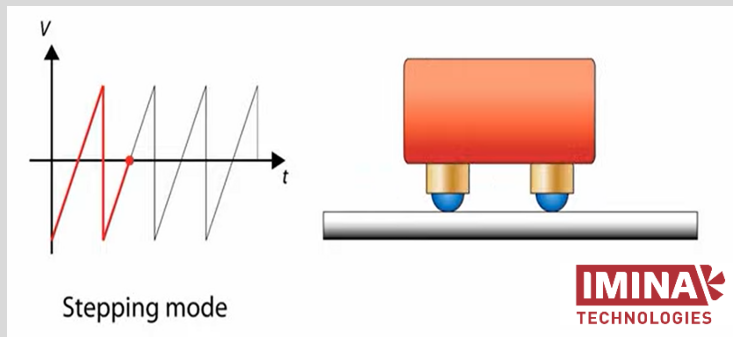
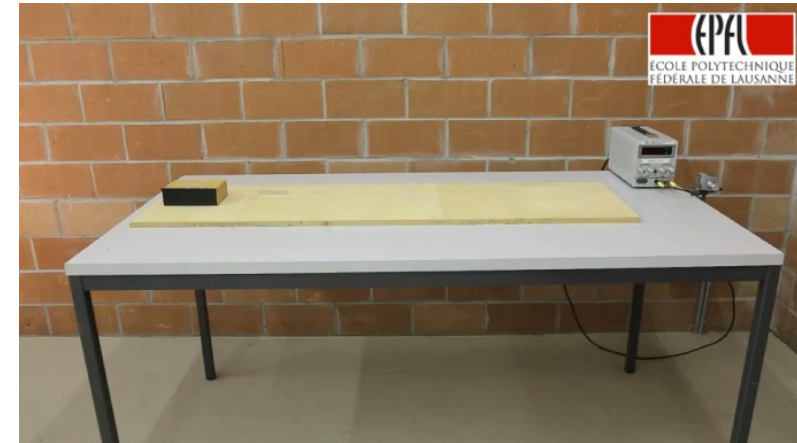
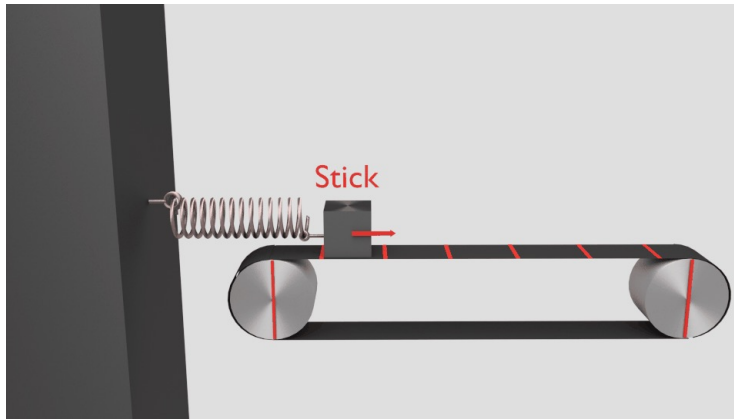
Expérience



6.3. Force de frottement sec

■ Coefficients de frottement dynamique et statique

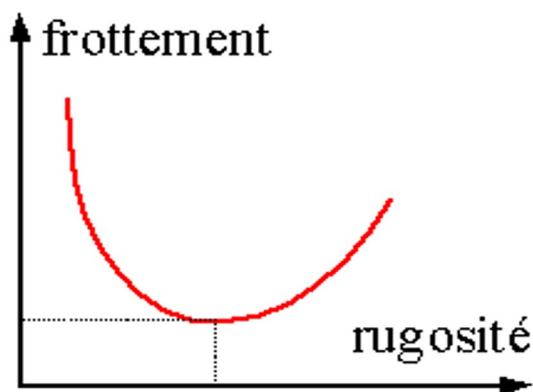
Application : « stick and slip »



6.3. Force de frottement sec

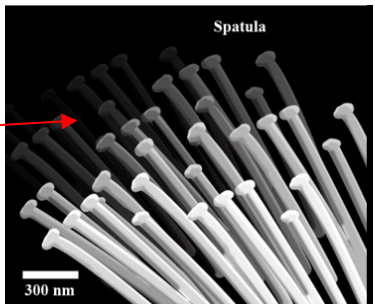
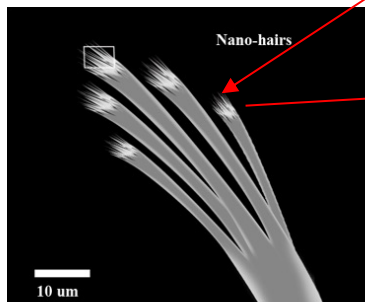
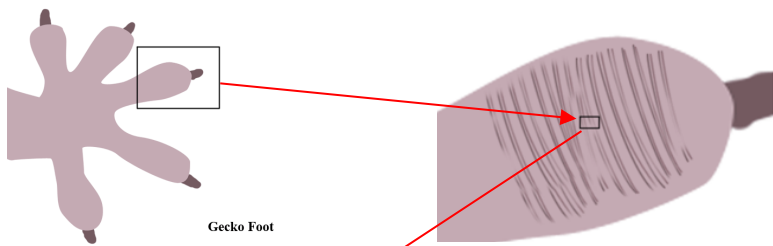
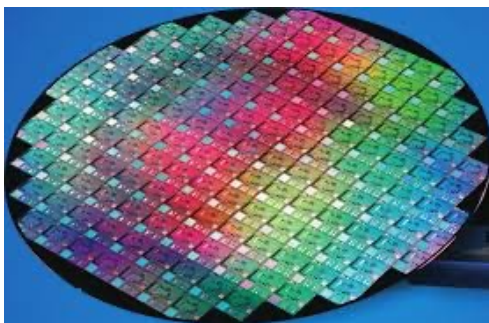
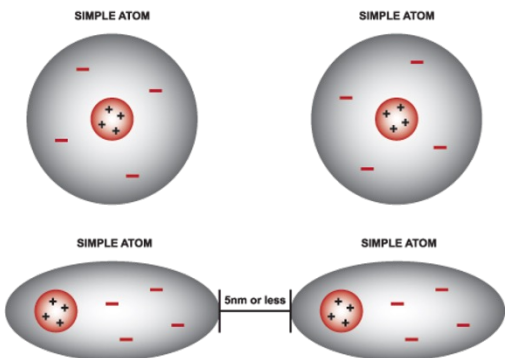
■ Coefficient de frottement statique « géant »

Information scientifique : rugosité de surface et frottement



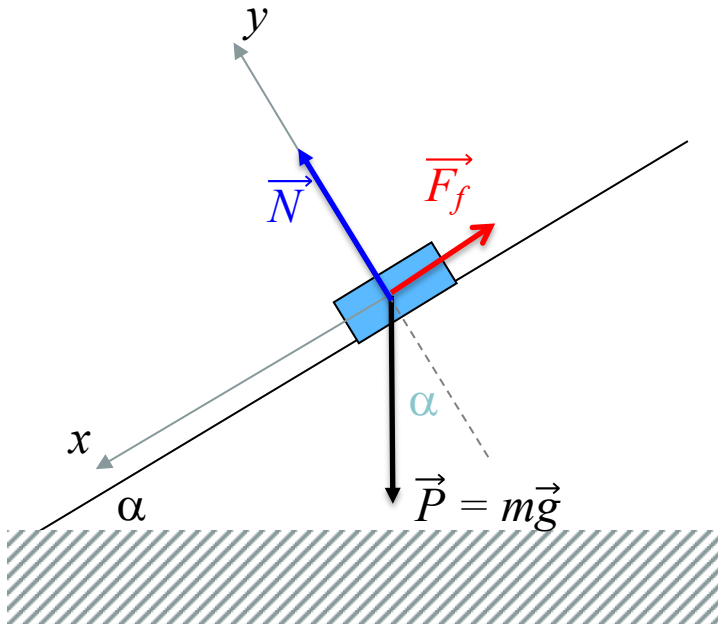
Pourquoi le frottement augmente lorsque la rugosité diminue?
Interactions entre atomes $\Rightarrow$ « collage moléculaire »

Forces de van der Waals



6.4. Mobile sur un plan incliné avec frottement

■ Mobile en équilibre sous l'effet d'un frottement sec



pas de mouvement

$$2^{\text{nd}} \text{ loi de Newton : } m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_f$$

force de frottement qui "retient" le mobile
avec un coefficient de frottement statique

Avant le décrochage, il n'y a pas de mouvement et l'accélération est donc nulle :

$$\vec{0} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_f$$

$$\text{On projette sur les axes } Ox, Oy : \begin{cases} ma_x = 0 = mg \sin \alpha + 0 - F_f \\ ma_y = 0 = -mg \cos \alpha + N + 0 \end{cases}$$

Finalement :

$$N = mg \cos \alpha \quad \text{force de réaction du support}$$

$$F_f = mg \sin \alpha \quad \text{force de frottement}$$

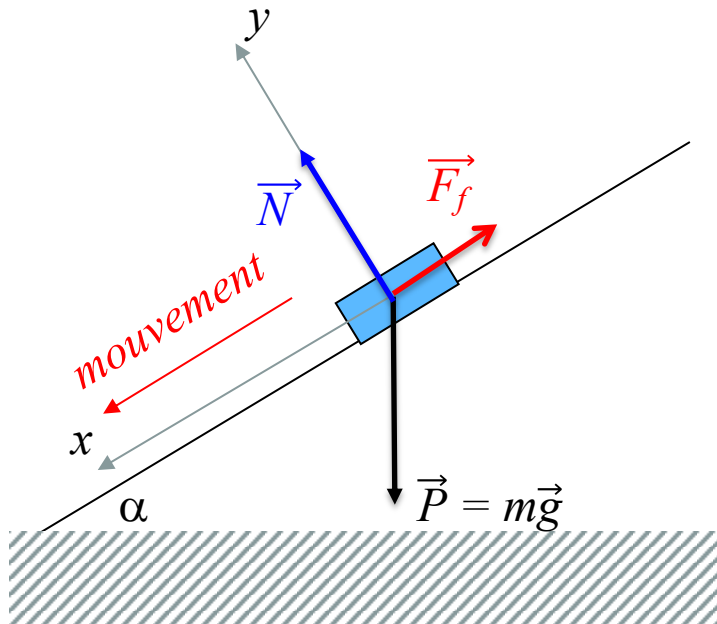
$$\text{Coefficient de frottement : } F_f = mg \sin \alpha = \mu_s N = \mu_s mg \cos \alpha$$

au point de décrochage

$$\text{soit } \boxed{\mu_s = \tan \alpha}$$

6.4. Mobile sur un plan incliné avec frottement

■ Décrochage d'un mobile sur un plan incliné avec frottement sec



Décrochage

Lorsque le mobile décroche, alors $a_x > 0 \Rightarrow mg \sin \alpha > F_f$

$\Rightarrow$ décrochage quand la composante du poids selon Ox devient plus grande que la force de frottement maximum

La force de frottement statique au moment du décrochage est

$$F_f = \mu_s N = \mu_s mg \cos \alpha$$

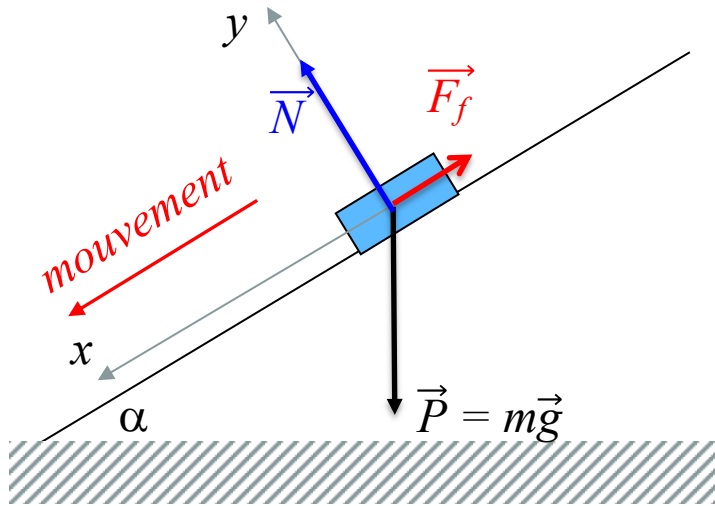
Nous avons donc $mg \sin \alpha > \mu_s mg \cos \alpha$ soit $\tan \alpha > \mu_s$

Condition de décrochage : $\alpha > \arctan(\mu_s)$

$\alpha_{lim} = \arctan(\mu_s)$: angle limite pour le décrochage

6.4. Mobile sur un plan incliné avec frottement

■ Glissement sur un plan incliné avec frottement sec

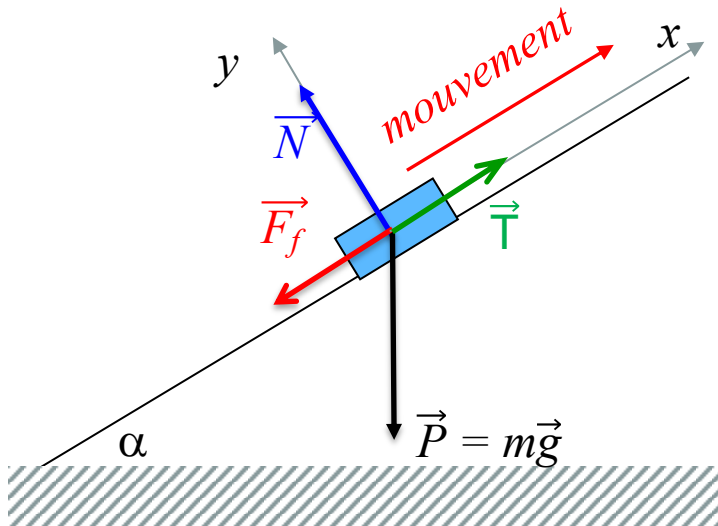


A) Mobile lâché sans vitesse pour un angle $\alpha > \alpha_{lim}$

$$\text{2nd loi de Newton : } m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_f$$

$$\text{on projette} \begin{cases} \text{sur Ox} & ma_x = mg \sin \alpha + 0 - F_f \quad \text{avec } F_f = \mu_d N \\ \text{sur Oy} & 0 = -mg \cos \alpha + N + 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha \end{cases}$$

$$\text{Et finalement } \boxed{a_x = g \sin \alpha - \mu_d g \cos \alpha}$$



B) Mobile tiré à vitesse constante ($a = 0$)

$$\text{2nd loi de Newton : } m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_f$$

$$\text{on projette} \begin{cases} \text{sur Ox} & 0 = -mg \sin \alpha + 0 + T - F_f \\ \text{sur Oy} & 0 = -mg \cos \alpha + N + 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha \end{cases}$$

$$\text{Et finalement } \boxed{T = mg (\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha)}$$