

# Week 9 – Part 3

## 9. L'oscillateur harmonique linéaire

9.6. Oscillateur forcé

9.7. Oscillateurs couplés



9.8. Analogie entre oscillateurs mécanique et électrique

## 9.6. Oscillateur forcé

### ■ Résumé

Equation du mouvement :

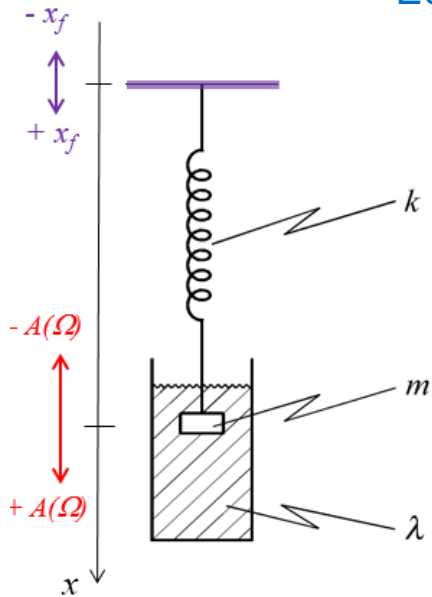
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \cos(\Omega t)$$

avec

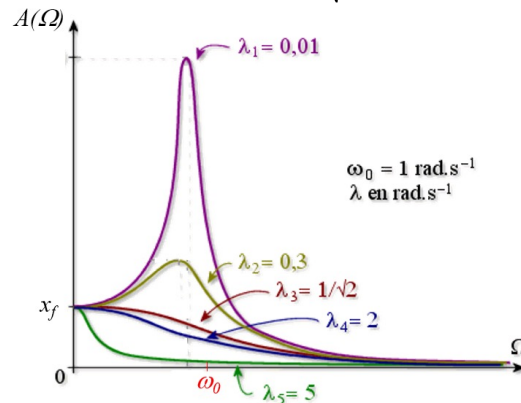
$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{k/m} & \text{Pulsation propre du ressort libre} \\ \lambda = \frac{K\eta}{2m} \\ f = \frac{F_e}{m} = \frac{kx_f}{m} \end{cases}$$

Solution :

$$x(t) = A(\Omega) \cos(\Omega t + \Psi(\Omega))$$

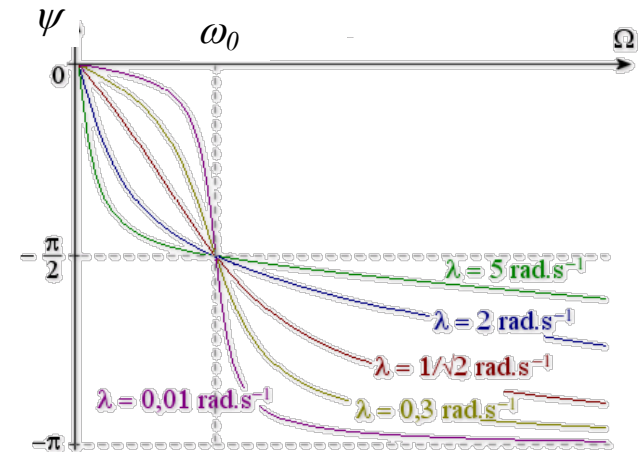


Amplitude  $A(\Omega) = x_f \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$



Pulsation de résonance :  $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$

Déphasage  $\psi(\Omega) = \arctan \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$



## 9.6. Oscillateur forcé

### ■ Analyse énergétique

La force de frottement fluide entraîne une dissipation de l'énergie.

Sur une période  $T$ :  $E_{diss} = -W' = - \int_0^T \vec{F}_f \cdot \vec{v} dt$  avec  $\vec{F}_f = -K\eta \vec{v}$   
 $T = \frac{2\pi}{\Omega}$   travail de la force de frottement

or  $x = A \cos(\Omega t + \Psi)$

d'où  $v = -A \Omega \sin(\Omega t + \Psi)$

$$\text{Soit } E_{diss} = \int_0^T K\eta v^2 dt = \int_0^T K\eta A^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t + \Psi) dt = K\eta A^2 \Omega^2 \frac{\pi}{\Omega} = K\eta A^2 \Omega \pi$$

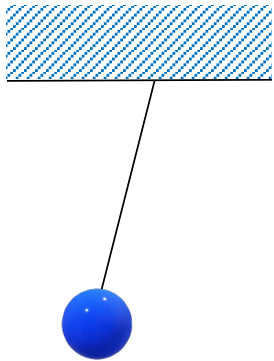
$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

Puissance dissipée moyenne:  $\langle P_{diss} \rangle = \frac{E_{diss}}{T} = \frac{1}{2}K\eta A^2 \Omega^2$

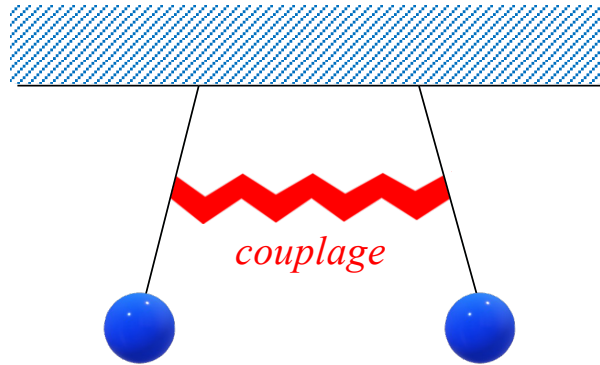
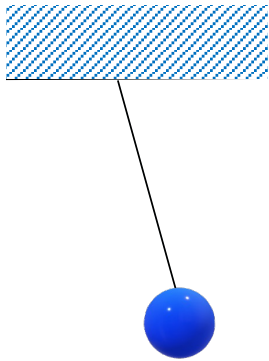
Remarque: on peut montrer que la puissance dissipée moyenne est maximum pour  $\Omega = \omega_0$

## 9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

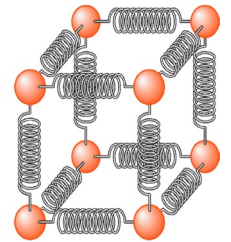
### ■ Introduction



Ocillateurs libres indépendants  
- oscillateurs non couplés



Ocillateurs libres en interaction  
- oscillateurs **couplés**



*Cristal : l'interaction entre les atomes (liaison chimique) peut être assimilée à un ressort*

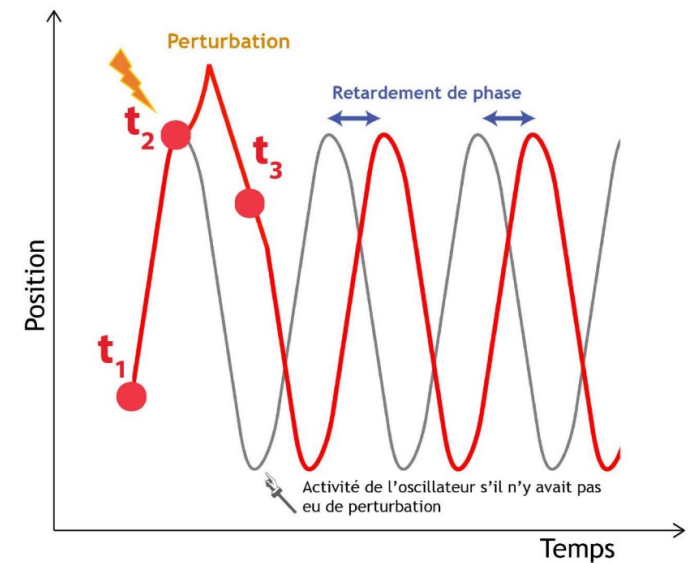
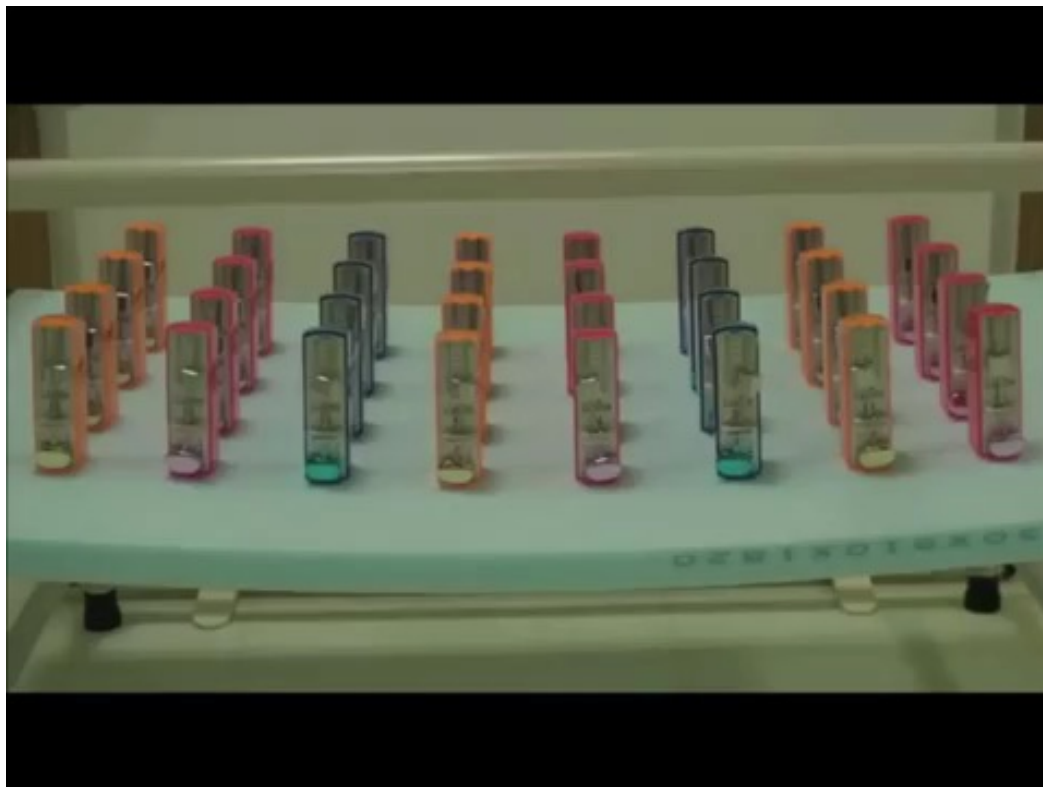
*⇒ très grand nombres d'oscillateurs couplés*



**Huygens** découvre en 1665 que deux horloges placées côte à côte se synchronisent. Les balanciers bougent en phase.

## 9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

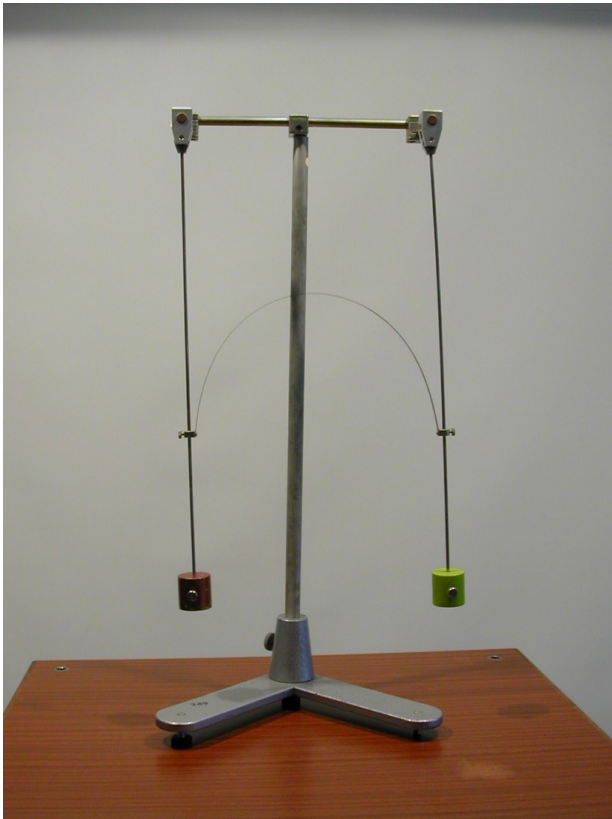
### ■ Synchronisation d'oscillateurs couplés



*Un concert nocturne de lucioles (© Robin Meier)*

## 9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

Application des oscillateurs couplés : amortissement d'un oscillateur



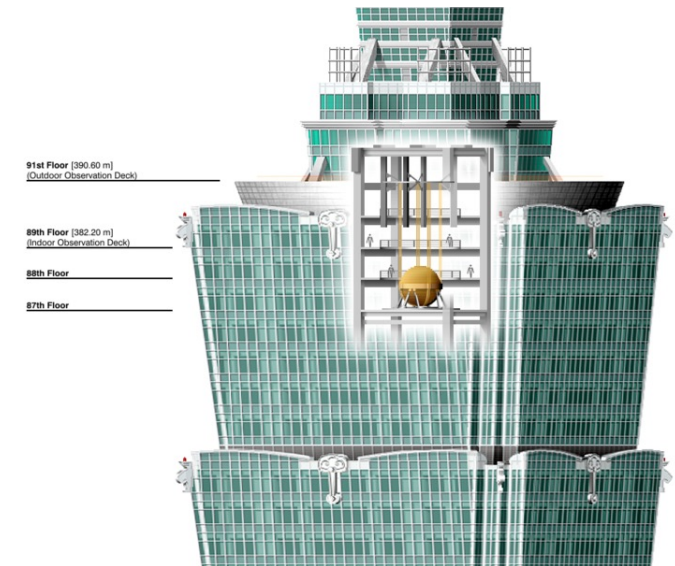
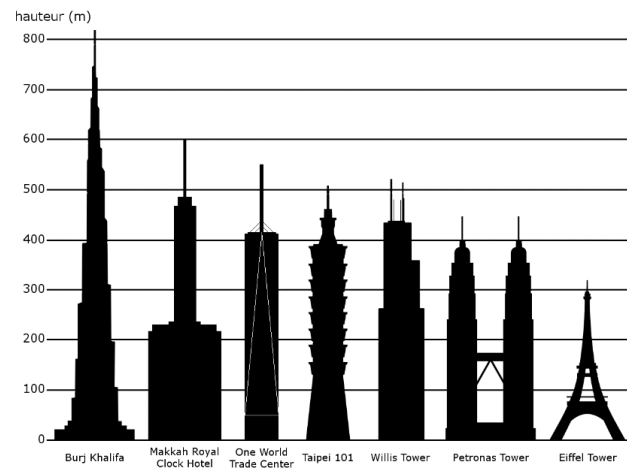
## 9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

### Application des oscillateurs couplés : amortissement d'un oscillateur

#### La tour Taipei 101 (Taiwan)



Une tour est un oscillateur 509 m de hauteur

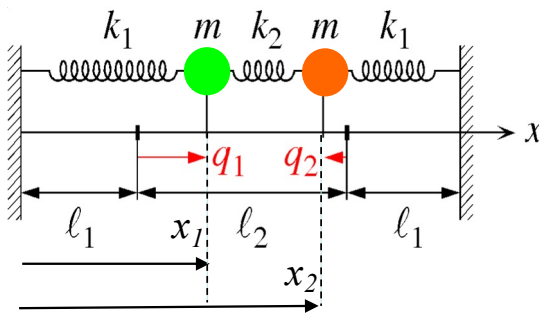


La tour est un oscillateur qui a une fréquence propre. Sous l'effet d'une onde se propageant dans le sol et provoquée par un tremblement de Terre, l'amplitude des mouvements de la tour peut être amplifiée (oscillateur forcé). Un deuxième oscillateur est alors placé au sommet de la tour (un pendule d'environ 700 tonnes). Celui-ci est couplé à la tour de telle sorte que les mouvements de cette dernière sont transférés au pendule. Les oscillations du pendule sont ensuite amorties par des vérins hydrauliques (dissipation de l'énergie).



## 9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

### ■ Cas de 3 ressorts et 2 masses identiques



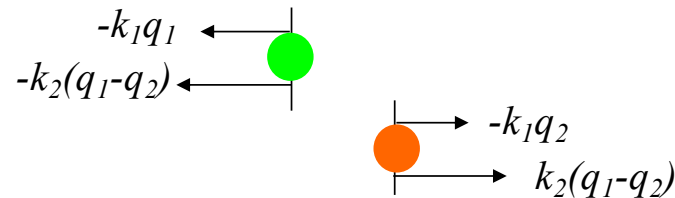
$$q_1 = x_1 - l_1$$

$$q_2 = x_2 - l_2 - l_1$$

$l_1, l_2 + l_1$  sont les positions d'équilibre

$q_1$  et  $q_2$  sont les écarts par rapport aux positions d'équilibre

*Bilan des forces*



*2<sup>nd</sup> loi de Newton*

$$\bullet m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = m \frac{d^2 q_1}{dt^2} = -k_1 q_1 - k_2 (q_1 - q_2)$$

$$\bullet m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = m \frac{d^2 q_2}{dt^2} = -k_1 q_2 + k_2 (q_1 - q_2)$$

2 équations de mouvement  
qui couplent les 2 masses

## 9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

### ■ Cas de 3 ressorts et 2 masses identiques

*Equations du mouvement des deux masses*

$$\left. \begin{array}{l} \text{●} \quad m\ddot{q}_1 + (k_1 + k_2)q_1 - k_2q_2 = 0 \\ \text{●} \quad m\ddot{q}_2 - k_2q_1 + (k_1 + k_2)q_2 = 0 \end{array} \right\} \text{ces équations sont couplées } (q_1 \text{ et } q_2 \text{ dans chaque équation})$$

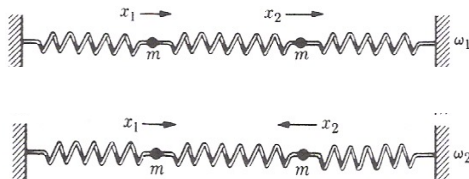
*Forme générale des solutions des modes propres (mouvement particulier des 2 masses):*

$$q_1 = C_1 \cos(\omega t + \varphi), \quad q_2 = C_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

**Rem:**  $\omega$  et  $\varphi$  ne sont pas connues. Nous savons seulement que les solutions doivent s'écrire sous la forme  $\cos(\omega t + \varphi)$ . Il faudra donc les déterminer.

Modes propres :

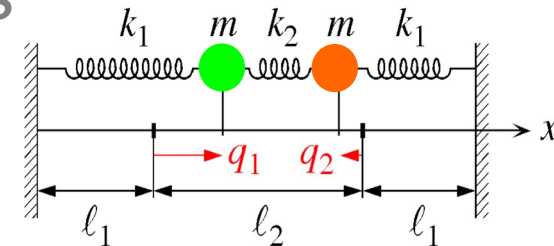
*Ressorts couplés*



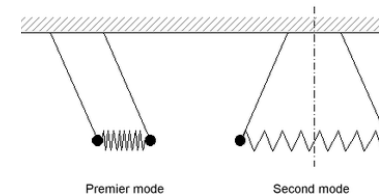
*mouvement en phase*



*mouvement en opposition de phase*



*Pendules couplés*



## 9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

### ■ Cas de 3 ressorts et 2 masses identiques

On injecte  $q_1 = C_1 \cos(\omega t + \varphi)$ ,  $q_2 = C_2 \cos(\omega t + \varphi)$

dans

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 + (k_1 + k_2)q_1 - k_2q_2 &= 0 && \bullet \\ m\ddot{q}_2 - k_2q_1 + (k_1 + k_2)q_2 &= 0 && \bullet \end{aligned}$$

et nous trouvons deux équations couplées:

$$\begin{aligned} \bullet & (-m\omega^2 + k_1 + k_2)C_1 - k_2C_2 = 0 \\ \bullet & -k_2C_1 + (-m\omega^2 + k_1 + k_2)C_2 = 0 \end{aligned}$$

Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  dépendent des conditions initiales

Nous cherchons ici à déterminer les solutions de la pulsation  $\omega$

## 9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

$$\begin{aligned}
 &(-m\omega^2 + k_1 + k_2)C_1 - k_2C_2 = 0 \\
 &-k_2C_1 + (-m\omega^2 + k_1 + k_2)C_2 = 0
 \end{aligned}
 \quad \text{sous forme matricielle} \quad
 \underbrace{\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}}_D
 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système d'équations admet une infinité de solutions si le déterminant  $D$  de la matrice est nul

$$\det D = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} = 0$$

soit 
$$(-m\omega^2 + k_1 + k_2)^2 - k_2^2 = 0$$

Equation caractéristique qui détermine  $\omega$

Nous avons finalement deux solutions pour  $\omega$

$$i) -m\omega^2 + k_1 + k_2 = +k_2 \Leftrightarrow \omega_+ = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$$

$$ii) -m\omega^2 + k_1 + k_2 = -k_2 \Leftrightarrow \omega_- = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}$$

Rem:  $\omega_+ < \omega_-$

## 9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

- **Mode propre « acoustique »**  $\omega_+$   $\omega_+ = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$  le ressort central ( $k_2$ ) est *inactif*

$$q_1(t) = q_2(t) = C_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+)$$



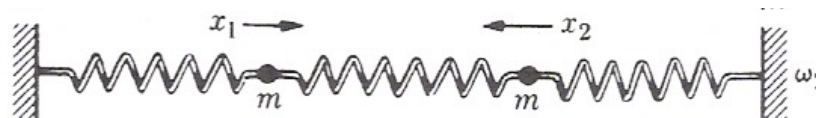
*Les masses se déplacent en phase*

- **Mode propre « optique »**  $\omega_-$   $\omega_- = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}$

$$q_1(t) = -q_2(t)$$

$$q_1(t) = C_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)$$

$$q_2(t) = -C_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)$$



*Masses en opposition de phase*

## 9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

### ■ Cas général

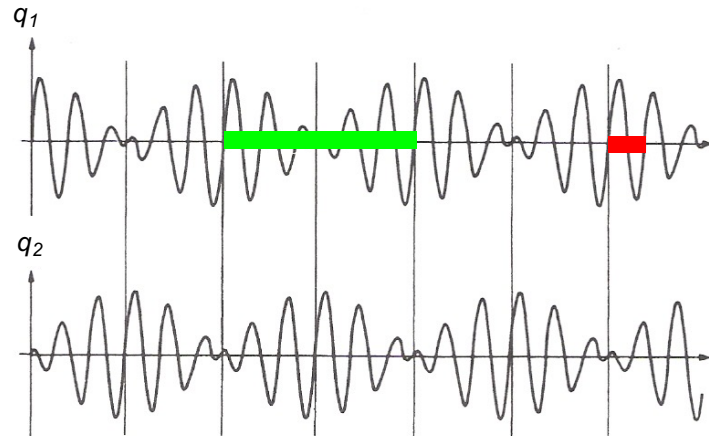
*Le mouvement dépend des conditions initiales à  $t=0$  et peut être compliqué. Néanmoins, il sera toujours une combinaison linéaire des deux solutions particulières, appelées modes propres.*

$$\begin{aligned} q_1(t) &= C_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + C_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \\ q_2(t) &= C_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) - C_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \end{aligned}$$

### ■ Cas particulier

*Amplitudes égales ( $C_+ = C_- = C$ ) et phases initiales nulles ( $\varphi_+ = \varphi_- = 0$ )*

$$\begin{aligned} q_1(t) &= C (\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)) \\ \Rightarrow q_1(t) &= 2C \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)t\right) \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-)t\right) \\ q_2(t) &= C (\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)) \\ \Rightarrow q_2(t) &= -2C \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)t\right) \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-)t\right) \end{aligned}$$



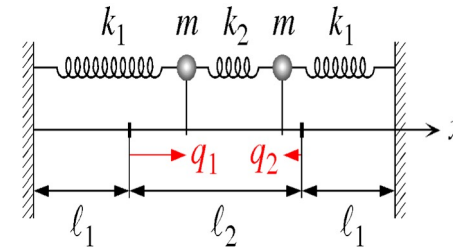
*La modulation de l'amplitude est en opposition de phase*

$\Rightarrow$  transfert d'énergie

## 9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

### ■ Energie mécanique du système

Energie cinétique :  $E_c = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$



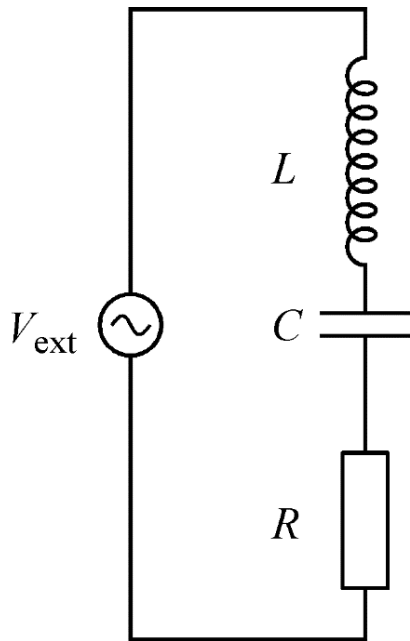
Energie potentielle : 
$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2}k_1q_1^2 + \frac{1}{2}k_1q_2^2 + \frac{1}{2}k_2(q_1 - q_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}k_1q_1^2 + \frac{1}{2}k_1q_2^2 + \frac{1}{2}k_2q_1^2 + \frac{1}{2}k_2q_2^2 - k_2q_1q_2 \\ &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2)q_1^2 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)q_2^2 - k_2q_1q_2 \end{aligned}$$

Finalemt, l'énergie totale s'écrit

$$E = E_c + E_p = \underbrace{\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)q_1^2}_{\text{Energie masse 1}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)q_2^2}_{\text{Energie masse 2}} - \underbrace{k_2q_1q_2}_{\substack{\text{Energie de} \\ \text{couplage} \\ \text{(interaction)}}}$$

## 9.7. Analogie entre oscillateurs mécanique et électrique

On considère un circuit RLC soumis à une tension alternative  $V_{\text{ext}}(t) = V_0 \sin \Omega t$



Tension aux bornes de la bobine\* :  $V_L = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d^2Q}{dt^2}$

Tension aux bornes du condensateur :  $V_C = \frac{Q}{C}$

Tension aux bornes de la résistance :  $V_R = RI = R \frac{dQ}{dt}$

Loi des mailles :  $V_{\text{ext}} = V_L + V_R + V_C$

$$\text{Soit } L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \sin \Omega t$$

$$\text{Ou encore } \frac{d^2Q}{dt^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\lambda} \frac{dQ}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} Q = \left(\frac{V_0}{L}\right) \sin \Omega t$$

Analogie avec  $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \cos(\Omega t)$

\* bobine est parfaitement inductive (résistance nulle)

## 9.7. Analogie entre oscillateurs mécanique et électrique

*Equation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti :*

$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

| Oscillateur générique                                         | RLC                                           | Masse soumise à un ressort                           |
|---------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| $z$                                                           | $q = \text{charge électrique}$                | $x = \text{déplacement}$                             |
| $\dot{z}$                                                     | $\dot{q} = i = \text{intensité}$              | $\dot{x} = \text{vitesse}$                           |
| $\ddot{z}$                                                    | $\ddot{q} = \frac{di}{dt}$                    | $\ddot{x} = \text{accélération}$                     |
| $\beta$                                                       | $L = \text{inductance propre}$                | $m = \text{masse du mobile}$                         |
| $\rho$                                                        | $R = \text{résistance}$                       | $\alpha = \text{coef de frottement}$                 |
| $\gamma$                                                      | $\frac{1}{C} = \text{inverse de la capacité}$ | $k = \text{constante de raideur}$                    |
| $T = 2\pi\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} = \text{période propre}$ | $T = 2\pi\sqrt{LC} = \text{période propre}$   | $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \text{période propre}$ |
| $f$                                                           | $U = RI : \text{effet Joule}$                 | $f = \alpha\dot{x} : \text{force de frottement}$     |



# Week 10 – Part 1

## 10. Moment cinétique ; Force de gravitation ; Satellites

### 10.1. Moment cinétique

### 10.2. Force de gravitation



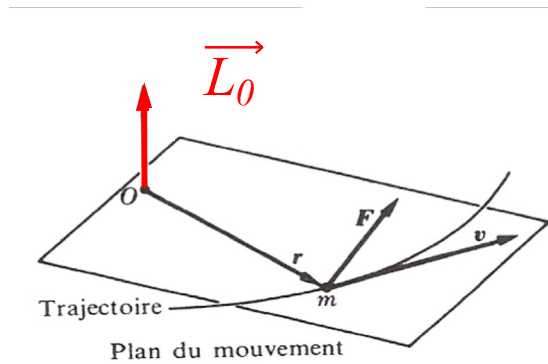
## 10.1. Moment cinétique

### ■ Définition du moment cinétique

Le moment cinétique  $\vec{L}$ , défini par rapport au point  $O$ , s'écrit :

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

*Le moment cinétique se calcule par rapport à un point fixe (ici le point  $O$ )*



**Attention :** dépend du choix de l'origine  $\Rightarrow$  il faut toujours spécifier l'origine et ne jamais combiner des moments cinétiques ayant des origines différentes.  
**L'origine est un point fixe par définition.**

## 10.1. Moment cinétique

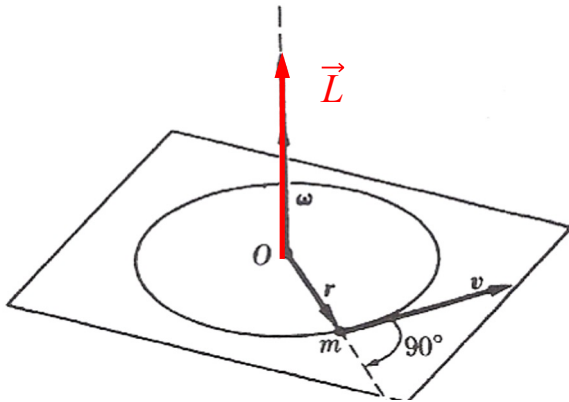
### ■ Mouvement circulaire ( $r = \text{cte} = R$ )

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = m. \vec{r} \times \vec{v}$$

dans le cas d'un mouvement circulaire,  $\vec{r}$  et  $\vec{v}$  sont perpendiculaires  $\Rightarrow$  Le moment cinétique est un vecteur perpendiculaire au plan défini par  $\vec{r}$  et  $\vec{v}$ , de norme  $mr v$  ou encore  $mr^2 \omega$

$$\vec{L}_O = m \vec{r} \times \vec{v} \Leftrightarrow L_O = m r v$$

$$\text{avec } v = \omega R \text{ d'où } L_O = m R^2 \omega$$



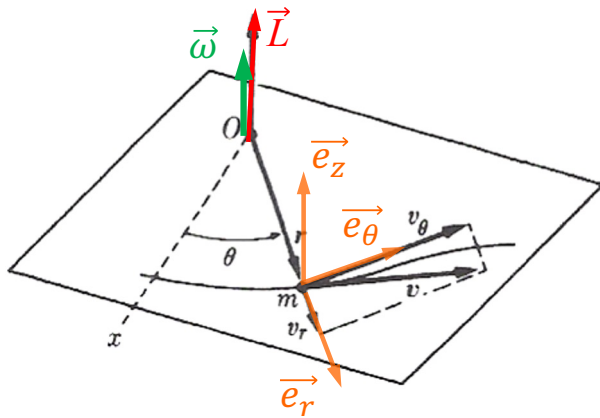
**Moment cinétique :**  $\vec{L}_O = m R^2 \vec{\omega}$   $\vec{L}_O$  est un vecteur colinéaire à  $\vec{\omega}$

**Terre:**  $\omega = 2\pi / (3,16 \times 10^7 \text{ s}) = 1,98 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$  et  $L = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg} \times (1,49 \times 10^{11} \text{ m})^2 \times (1,98 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}) = 2,7 \times 10^{40} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1}$

**Electron dans l'atome d'hydrogène:**  $9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} (5,29 \times 10^{-11} \text{ m})^2 (4,13 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}) = 1,05 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1}$

## 10.1. Moment cinétique

### ■ Mouvement curviligne ( $r \neq cte$ )



La vitesse peut être décomposée en une composante radiale ( $\vec{v}_r$ ) et une composante transversale ( $\vec{v}_\theta$ ), soit  $\vec{v} = v_\theta \vec{e}_\theta + v_r \vec{e}_r$

En posant  $\rho$  le rayon de courbure, tel que  $\vec{r} = \rho \vec{e}_r$

$$\vec{L}_O = m \vec{r} \times \vec{v} = m \rho \vec{e}_r \times v_\theta \vec{e}_\theta + m \rho \vec{e}_r \times v_r \vec{e}_r$$

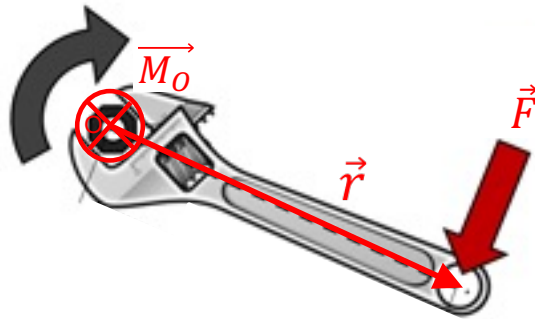
$$\text{or } \vec{e}_r \times \vec{e}_r = \vec{0} \text{ d'où } \vec{L}_O = m \rho \vec{e}_r \times v_\theta \vec{e}_\theta = m \rho v_\theta \vec{e}_z$$

$$\text{Nous avons par ailleurs } v_\theta = \rho \frac{d\theta}{dt} = \rho \omega$$

Finalement, le moment cinétique s'écrit :  $\vec{L}_O = m \rho^2 \vec{\omega}$

## 10.1. Moment cinétique

### ■ Moment d'une force



$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

- Le vecteur  $\vec{r}$  est défini tel que son origine est sur l'axe de rotation et son extrémité au point d'application de la force
- Le moment de force est maximum quand  $\vec{F}$  est perpendiculaire au bras de la clé. Il est nul quand la force est colinéaire à  $\vec{r}$ . Dans ce cas, la mise en rotation est impossible.
- On pose  $M_O = r F \sin \theta$ ,  $\theta$  étant l'angle entre  $\vec{r}$  et  $\vec{F}$ . On reconnaît ici la norme d'un produit vectoriel.

On remarque que le moment de force engendre un mouvement de rotation. Le vecteur "Moment de force" est colinéaire à  $\vec{\omega}$ , est donc à  $\vec{L}_O$ .

## 10.1. Moment cinétique

### ■ Théorème du moment cinétique

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m \vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

On applique la 2<sup>ème</sup> loi de Newton :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = \sum_i \vec{F}_{ext,i}$$

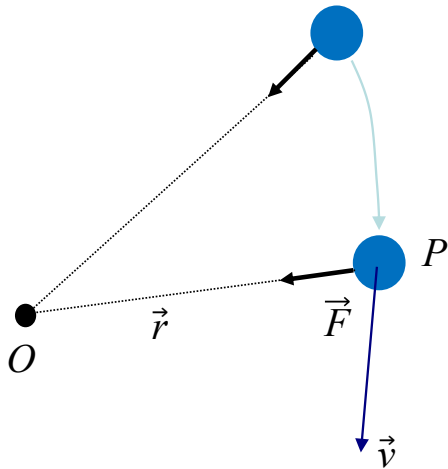
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_{ext,i} = \sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_{ext,i})$$

$\vec{M}_O(\vec{F}_i)$  est le moment  
de la force  $\vec{F}_i$  par rapport à O (point fixe)

- La dérivée par rapport au temps du moment cinétique (calculé par rapport à un point fixe) = au moment de la force appliquée.
- Le moment de force doit être défini par rapport au même point fixe.

## 10.1. Moment cinétique

### ■ Force centrale



*Le mouvement a lieu dans un plan défini par  $\vec{r}$  et  $\vec{v}$*

Soit un point P soumis à une force  $\vec{F}$ ,  
 $\vec{F}$  est dite force centrale si:

- quelque soit la position de P, la force  $\vec{F}$  est dirigée vers O (appelé centre de force)

$\vec{F}$  dépend de la distance  $OP = r$

Ce type de force existe sous différentes formes dans la nature :

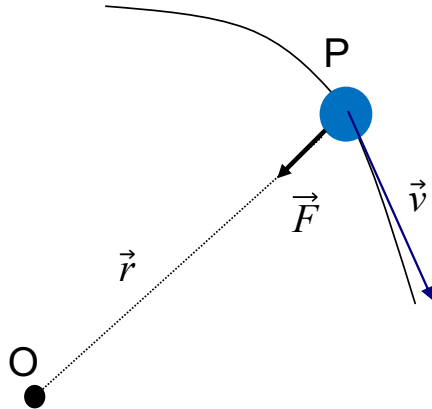
- *La gravitation*
- *La force électrostatique*
- *La force de rappel d'un ressort*

## 10.1. Moment cinétique

### ■ Théorème du moment cinétique

#### Cas d'une force centrale

Dans ce cas,  $\vec{F}$  colinéaire à  $\vec{r}$  d'où  $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$   
et la dérivée temporelle du moment cinétique est nulle



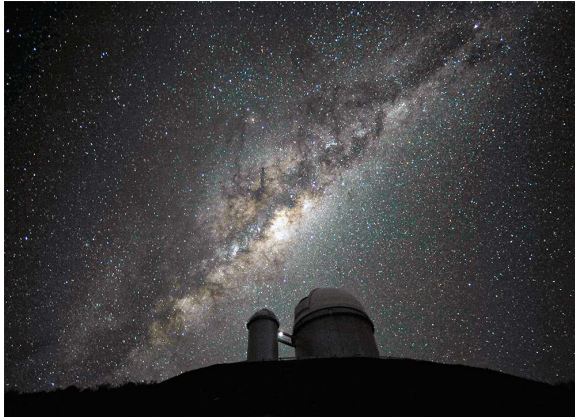
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O = \text{cte}$$

Quand un objet se déplace sous l'action d'une force centrale,  
son moment cinétique est constant dans le temps

*Exemple : la force de gravitation responsable du mouvement des planètes autour du soleil est une force centrale, donc le moment cinétique des planètes est constant.*

## 10.2. Force de gravitation

### ■ Introduction



Notre galaxie : la voie lactée



Le système solaire

## 10.2. Force de gravitation

### ■ Archeology of Light – immersive journey through space and time



<https://longread.epfl.ch/en/dossier/archaeology-of-light/>

Voir en 4K:

<https://lnkd.in/dysXD2Yu>

Voir en VR180:

<https://lnkd.in/dg4EQY33>

Voir en 360°:

<https://lnkd.in/dDDsKHkn>

## 10.2. Force de gravitation

### ■ 1<sup>ères</sup> Observations

Tycho Brahé (fin XVI<sup>ème</sup>) observe les planètes de notre système solaire et détermine leur trajectoire avec une très grande précision.

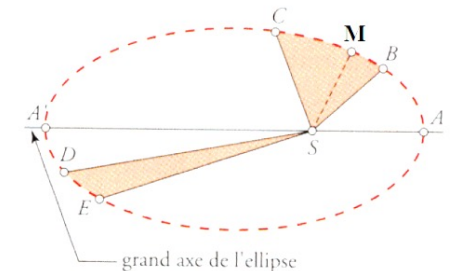
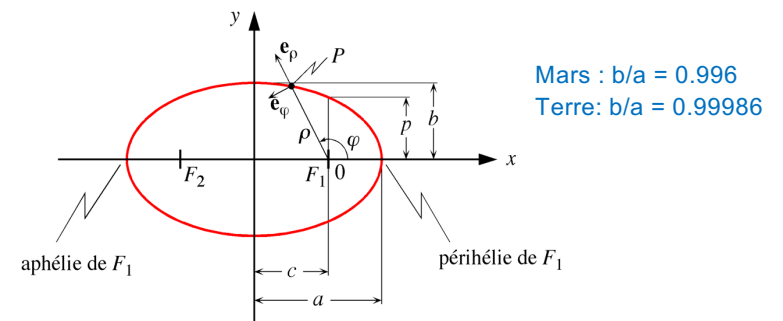
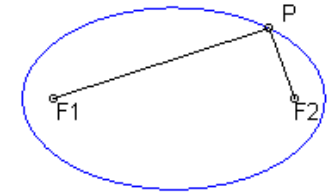
En 1609 Johannes Kepler en tire les **3 lois de Kepler**:

1. Les trajectoires des planètes sont des **ellipses** dont le Soleil occupe l'un des foyers
2. Le rayon-vecteur (vecteur position  $\vec{r}$ ) de **chaque planète balaye des surfaces égales pendant des intervalles de temps égaux**

Puis en 1619, en comparant la trajectoire de 2 planètes:

3. **Les carrés des périodes de révolution sont proportionnels aux cubes des demi-grands axes des planètes au Soleil**

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \text{ soit encore } \boxed{\frac{T^2}{a^3} = cte}$$



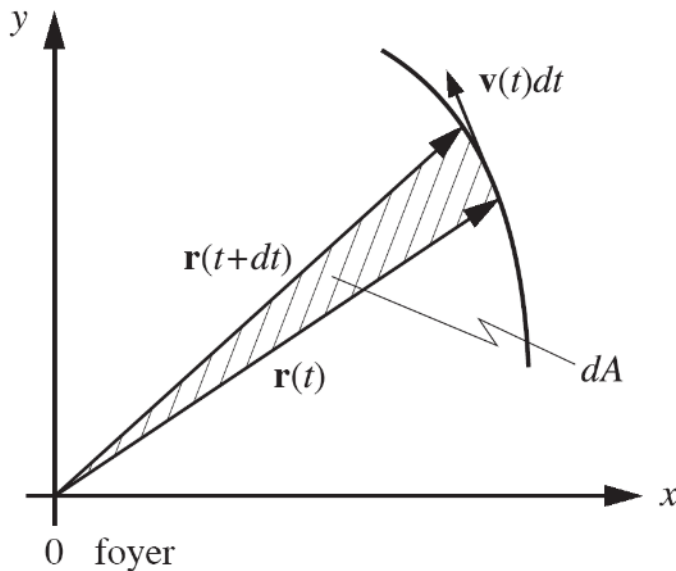
## 10.2. Force de gravitation

### ■ 2<sup>ème</sup> loi de Kepler (ou loi des aires) et conservation du moment cinétique

Enoncé : le rayon-vecteur (vecteur position  $\vec{r}$ ) balaye des surfaces égales pendant des intervalles de temps égaux

*Conséquence : plus le rayon est petit, plus la vitesse est grande*

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0}$$



$d\vec{A}$  est l'aire balayée par le rayon vecteur  $\vec{r}$  pendant un intervalle de temps  $dt$  :

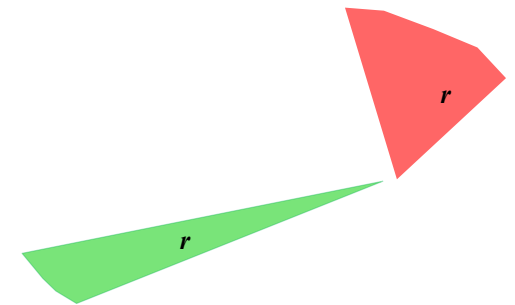
$$d\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} dt$$

Dans le cas d'une force centrale :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} \quad \text{soit } \vec{L}_O = \text{cte}$$

$$\text{or } \vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} \Leftrightarrow \frac{\vec{L}_O}{m} = \vec{r} \times \vec{v}$$

$$d\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} dt = \frac{\vec{L}_O}{2m} dt = \text{cte}$$



## 10.2. Force de gravitation

### ■ La force de gravitation

En 1677, Newton explique les lois de Kepler

⇒ il trouve que l'accélération centripète, liée au mouvement quasi-circulaire de chaque planète, est proportionnelle à  $\frac{1}{r^2}$  avec la même constante de proportionnalité d'une planète à une autre.

Proposition de Newton :

il existe une force qui agit sur la planète et qui est dirigée vers le Soleil.

⇒ Cette force est la force de Gravitation

## 10.2. Force de gravitation

### ■ 3<sup>ème</sup> loi de Kepler : mise en évidence de la gravitation

Enoncé de la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler :

Les carrés des périodes de révolution sont proportionnels aux cubes des demi-grands axes des planètes au Soleil

$$\frac{T^2}{a^3} = cte$$

*La 3<sup>ème</sup> loi de Kepler découle directement de la gravitation universelle*

Démonstration : 3<sup>ème</sup> loi de Kepler :  $\frac{T^2}{a^3} = cte = k_1 \Rightarrow \frac{1}{T^2} = \frac{1}{k_1 a^3} \approx \frac{1}{k_1 r^3}$

*Simplification : ellipse (a demi-grand axe)  $\Rightarrow$  cercle de rayon  $r$*

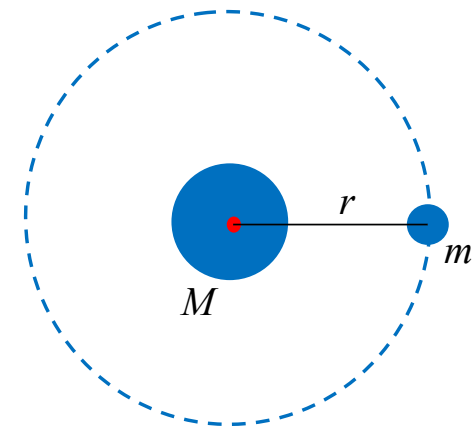
Mouvement circulaire :  $a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = r \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2$

d'où  $a_n = \frac{r 4\pi^2}{k_1 r^3} = \left( \frac{4\pi^2}{k_1} \right) \frac{1}{r^2} = k_2 \frac{1}{r^2}$  avec  $k_2 = \frac{4\pi^2}{k_1}$

2<sup>ème</sup> loi de Newton :  $F = ma$  ( $m$  masse de la planète)

soit  $F = \frac{m k_2}{r^2}$

on reconnait ici la force de gravitation avec  $k_2$  proportionnelle à la masse du soleil

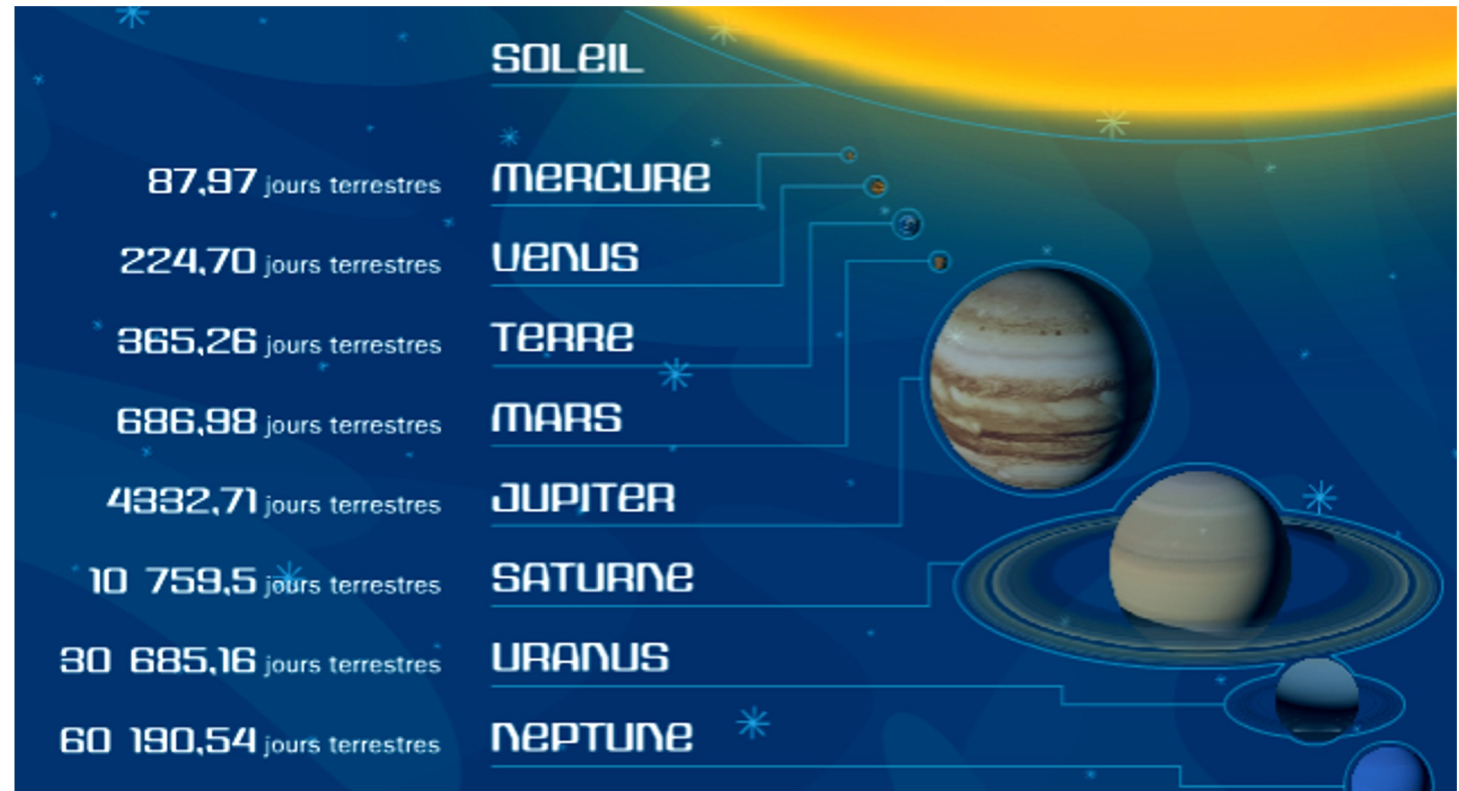




# Week 10 – Part 2

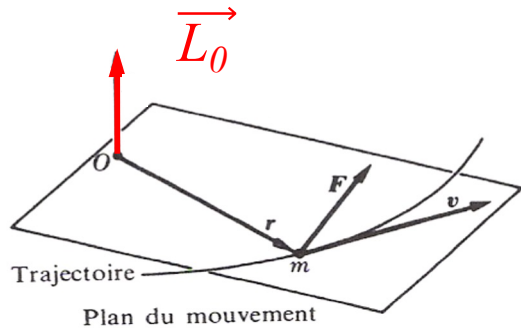
## 10. Moment cinétique; Gravitation

### 10.2. Gravitation



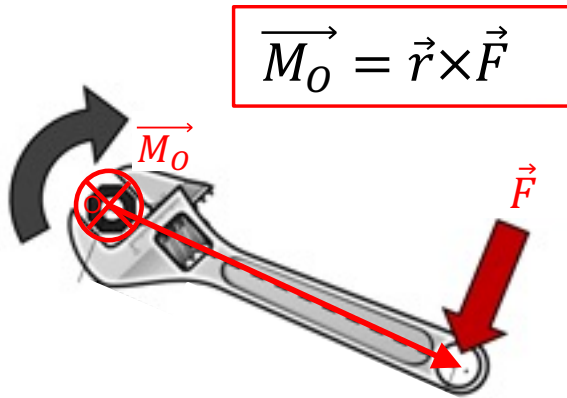
## 10.1. Moment cinétique - Résumé

### ■ Moment cinétique *(Moment : latin momentum, contraction de mouvement, mouvement)*



$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v} = mr^2 \vec{\omega}$$

### ■ Moment d'une force



$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

### ■ Théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_{ext,i} = \sum_i \vec{M}_O(F_{ext,i})$$

$\vec{M}_O(\vec{F}_i)$  est le moment de la force  $\vec{F}_i$  par rapport à O (point fixe)

## 10.2. Force de gravitation

### ■ La force de gravitation. Par symétrie !

$$F = \frac{m k_2}{r^2} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{u}_r}$$

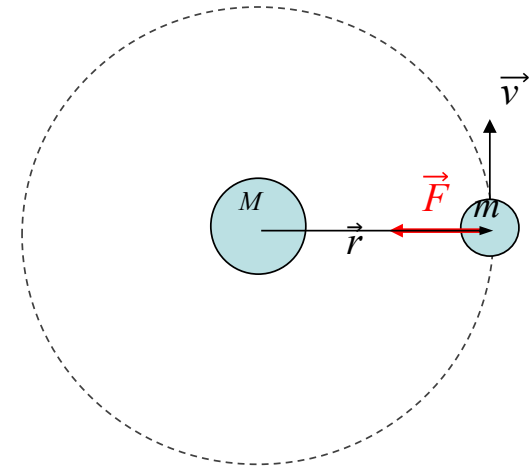
Avec  $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ , et

$G = (6.67259 \pm 0.00085) 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$  - **constante gravitationnelle.**

On identifie:  $k_2 = GM_{soleil}$

Cette force est aussi le poids à la surface de la Terre :

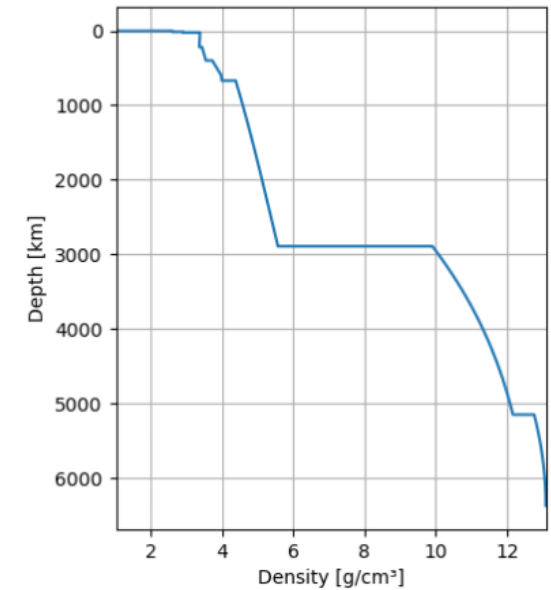
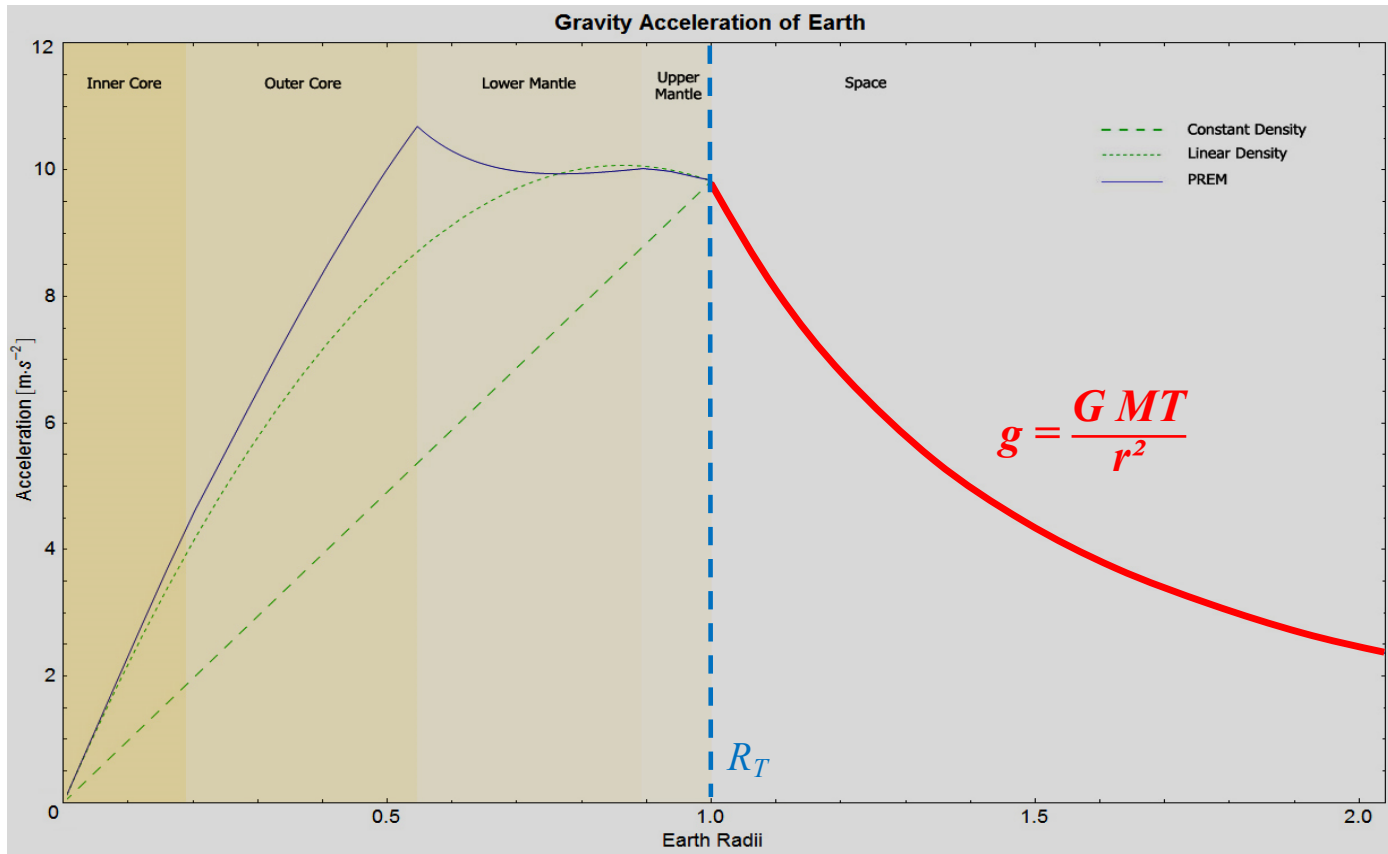
$$\frac{GM_T m}{R_T^2} = mg \quad \text{d'où} \quad \boxed{g = \frac{G M_T}{R_T^2}} \quad (\text{avec } R_T \text{ et } M_T \text{ rayon et masse de la Terre})$$



## 10.2. Force de gravitation

### ■ La force de gravitation

*Evolution de l'accélération  $g$  à l'intérieur et à l'extérieur de la Terre*



$$r = R_T + h$$



$h$  : altitude

$R_T$  : rayon de la Terre

## 10.2. Force de gravitation

### ■ 3<sup>ème</sup> loi de Kepler : mise en évidence de la gravitation

Enoncé de la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = cte = \frac{4\pi^2}{GM}$$

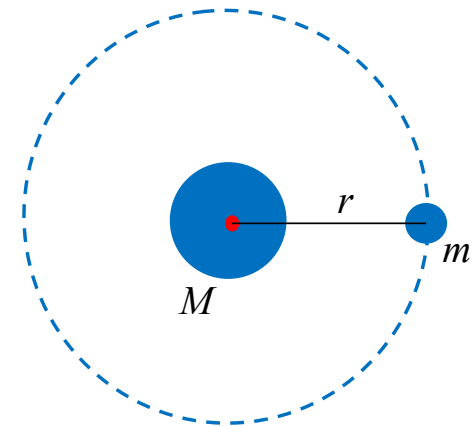
Démonstration - orbite circulaire ( $a = r$ ) :

accélération centripète :  $a_n = \frac{v^2}{r}$

$$a_n = \frac{F}{m} = \frac{1}{m} \frac{GMm}{r^2} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = r \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = r \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\Rightarrow \frac{GM}{r^2} = r \frac{4\pi^2}{T^2}$$

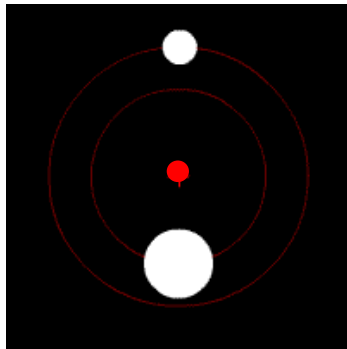
Soit 
$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$



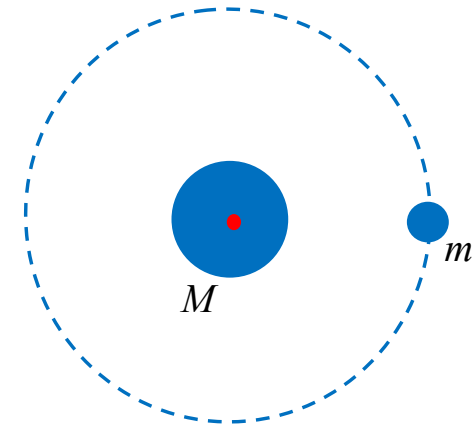
## 10.2. Gravitation

### ■ Mouvement orbital

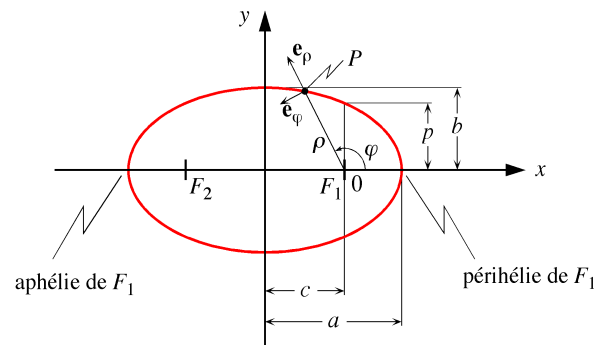
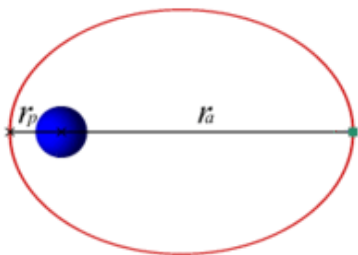
Deux corps en interaction avec des masses relativement proches ont un mouvement de rotation autour du centre de masse du système.



Si la masse  $M$  de l'un des corps (A) est beaucoup plus importante que la masse  $m$  de l'autre corps (B), alors le centre de masse du système est quasiment confondu avec celui de A. La conséquence est que le mouvement se résume à un mouvement orbital de B autour de A.



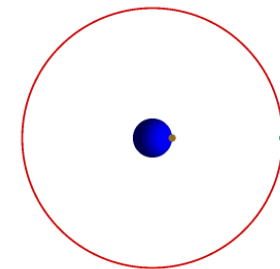
#### Trajectoire elliptique



#### Trajectoire circulaire

$$\text{Mars : } \frac{b}{a} = 0.996$$

$$\text{Terre : } \frac{b}{a} = 0.99986$$



Nous pouvons en première approximation considérer les trajectoires comme "circulaires"

## 10.2. Gravitation

### ■ Période « képlérienne »

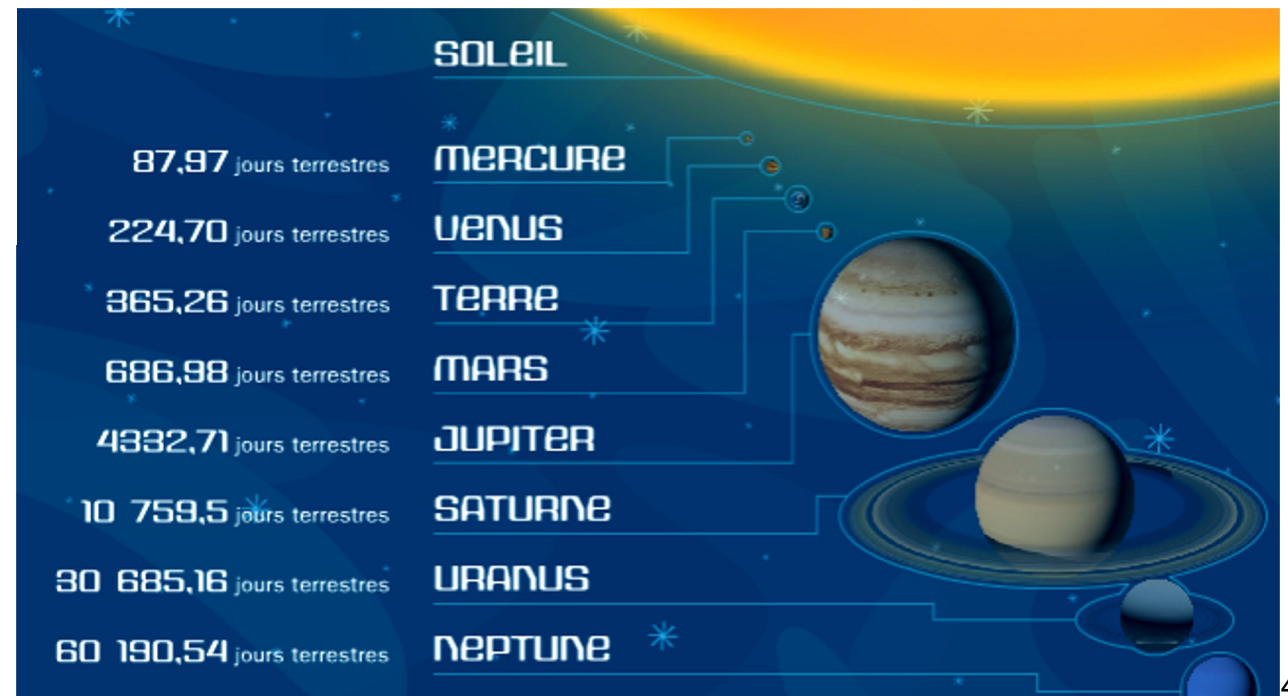
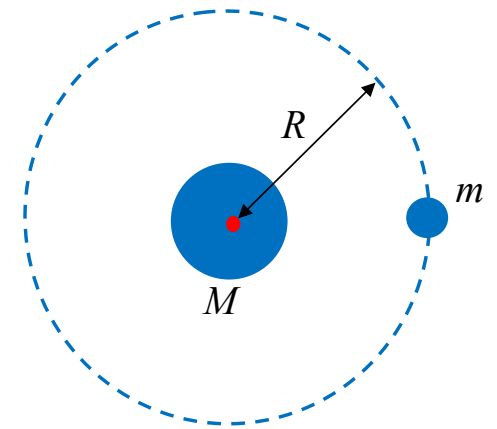
$$F = \frac{mGM}{R^2}$$

Attention :  $R$  est le rayon de l'orbite et correspond à la distance prise entre les centres de masse des deux objets considérés.

$$a_n = \frac{GM}{R^2} = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 = R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

*T est la durée de révolution (ou durée orbitale), ou période képlérienne*



## 10.2. Gravitation

### ■ Vitesse orbitale (vitesse de rotation pour une orbite de rayon $R$ )

$$\vec{F} = -G Mm/r^2 \vec{e}_r$$

$$\vec{a}_n = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r$$

On applique la 2<sup>nd</sup> loi de Newton :  $\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$

Pour un orbite de rayon  $R$  :

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

**Vitesse orbitale**

*A chaque orbite de rayon  $R$   
correspond une vitesse orbitale*

## 10.2. Gravitation

### ■ Energie potentielle

Travail de la force de gravitation :  $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$

$$W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_{\infty}^R -G \frac{mM}{r^2} dr = \left[ G \frac{mM}{r} \right]_{\infty}^R = G \frac{mM}{R} = -[E_p(B) - E_p(A)]$$

Calcul de la variation l'énergie potentielle entre un point à l'infini (A) et un point à la distance  $R$  (B)

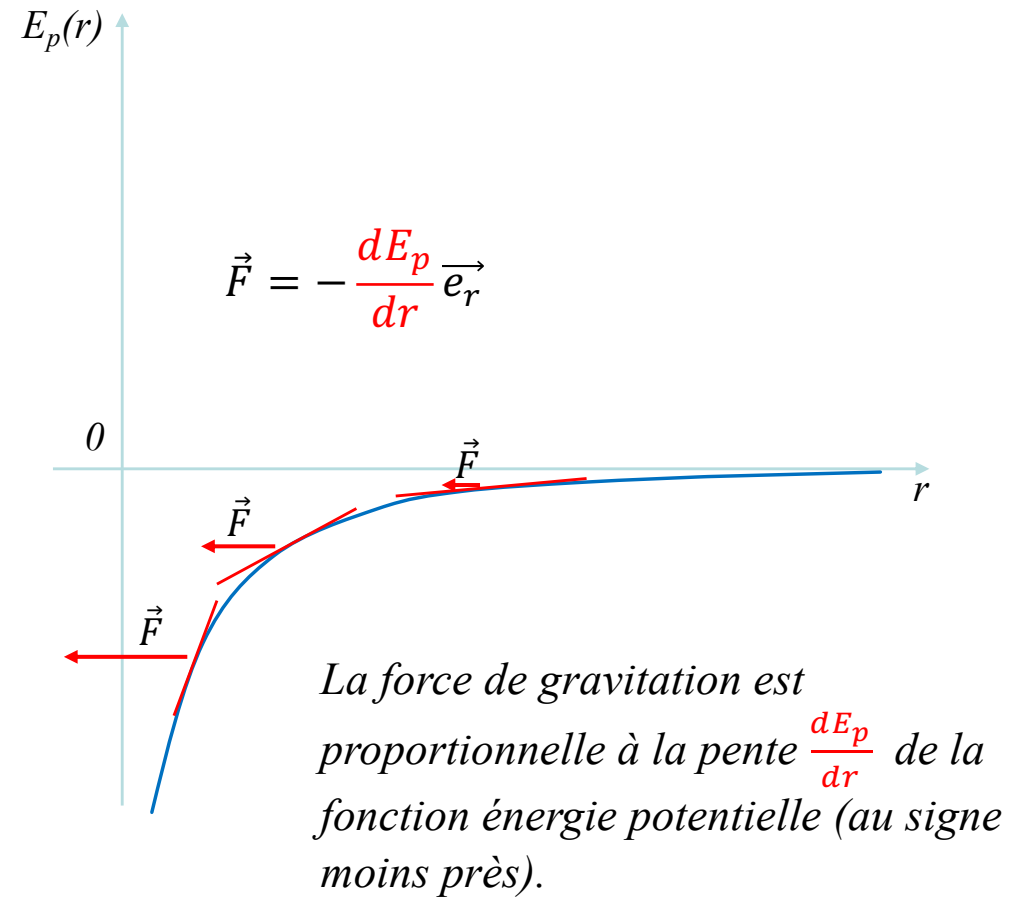
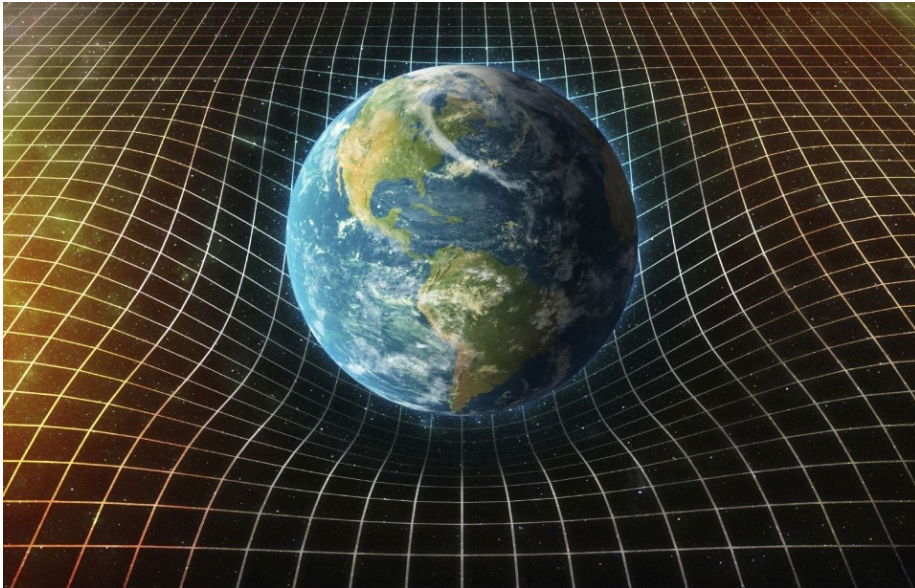
$$-[E_p(B) - E_p(A)] = -[E_p(R) - E_p(\infty)] = -[E_p(R) - 0] = G \frac{Mm}{R}$$

$$E_p(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

## 10.2. Gravitation

### ■ Énergie potentielle

$$E_p(r) = -G \frac{Mm}{r}$$



## 10.2. Gravitation

### ■ Energie cinétique

$$E_c(r) = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

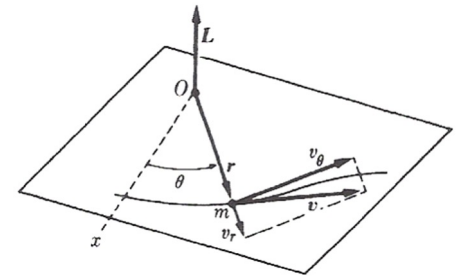
Le moment cinétique  $L$  est donné par  $L = m r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)$

$$\text{d'où } L^2 = m^2 r^2 r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \Rightarrow \left(r \frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{m^2 r^2}$$

Finalement :

$$E_c(r) = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2 m r^2}$$

Remarque : si la trajectoire est circulaire, alors  $r = cte$  ( $\dot{r} = 0$ ) et  $E_c(r) = \frac{L^2}{2 m r^2}$



## 10.2. Gravitation

### ■ Energies cinétique et potentielle dans un mouvement à force centrale

Relation entre énergie cinétique et énergie potentielle pour une trajectoire circulaire

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \frac{GMm}{r^2} \\ a = \frac{v^2}{r} = \frac{F}{m} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r} \quad d'où \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r}$$

$$or \quad E_p(r) = -\frac{GMm}{r}$$

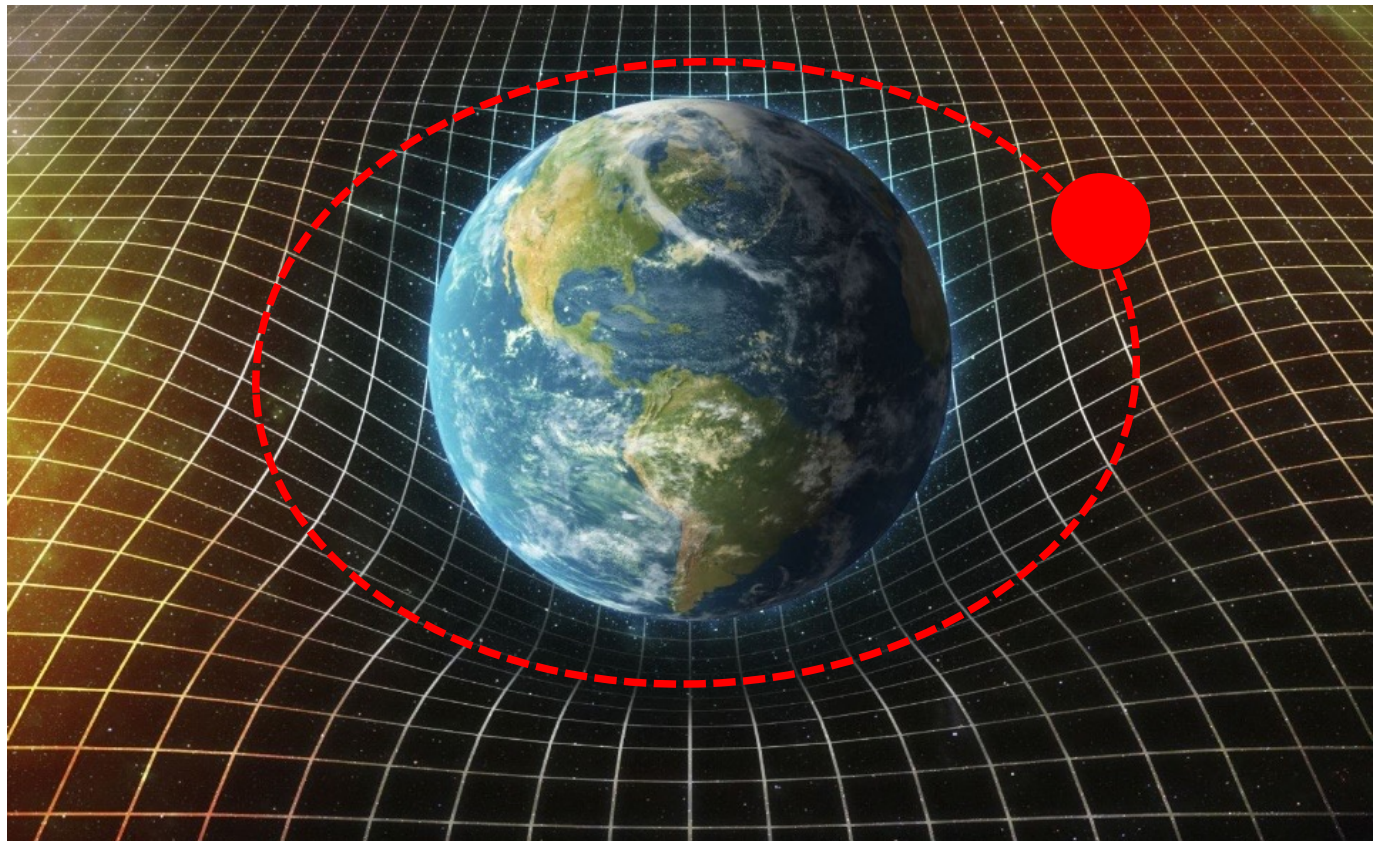
$$d'où \quad E_c(r) = -\frac{1}{2} E_p(r) \quad \text{pour une trajectoire circulaire}$$

# Week 10 – Part 3

## 10. Moment cinétique; Gravitation

10.2. Gravitation

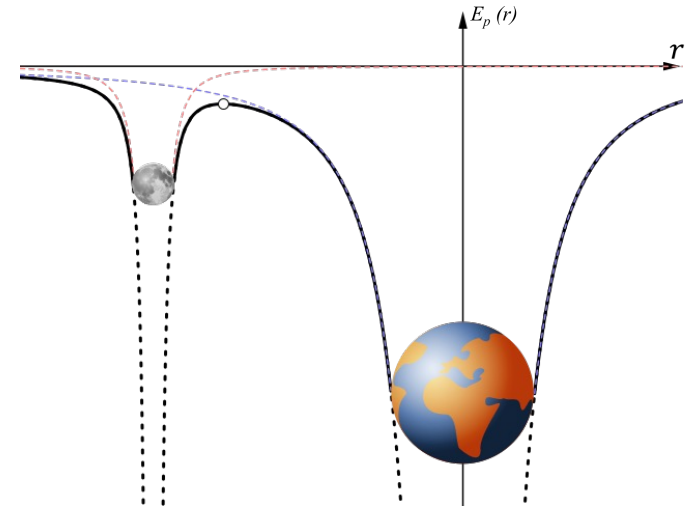
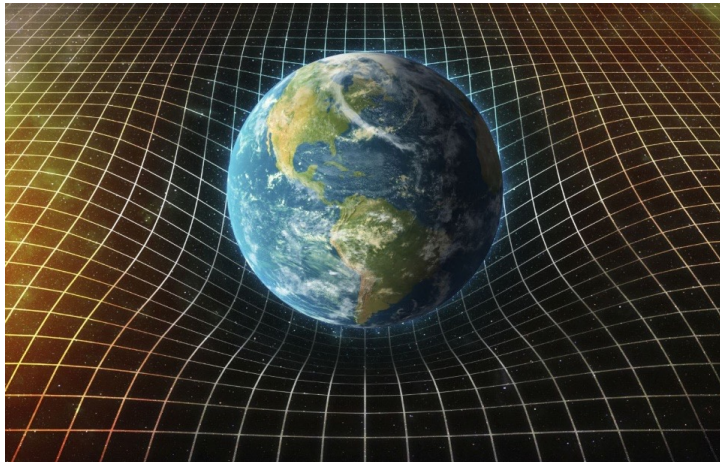
10.3. Système solaire



## 10.2. Gravitation

### ■ Energie potentielle

$$E_p(r) = -G \frac{Mm}{r}$$





# ARTEMIS I

Vol d'essai sans équipage d'Orion autour de la Lune



DURÉE DE LA MISSION  
**26-42 jours**



DISTANCE PARCOURUE  
Plus de  
**2 000 000 km**



Réacteurs utilisés

## ALLER (5-7 jours)

- 1. Lancement**  
Du centre spatial Kennedy, sur le lanceur SLS
- 2. Insertion translunaire**  
Orion met le cap sur la Lune
- 3. Trajet vers la Lune**
- 4. Survol de la Lune**  
À plus de 100 km d'altitude

## ORBITE RÉTROGRADE AUTOUR DE LA LUNE (6-16 jours)

- 5. Insertion en orbite**
- 6. Une révolution ou une révolution et demie autour de la Lune**  
À environ 70 000 km de distance
- 7. Désorbitage**

## RETOUR (6-19 jours)

- 8. Survol de la Lune**  
À plus de 100 km d'altitude
- 9. Trajet vers la Terre**
- 10. Rentrée atmosphérique et amerrissage dans le Pacifique**



Agence spatiale  
canadienne

Canadian Space  
Agency

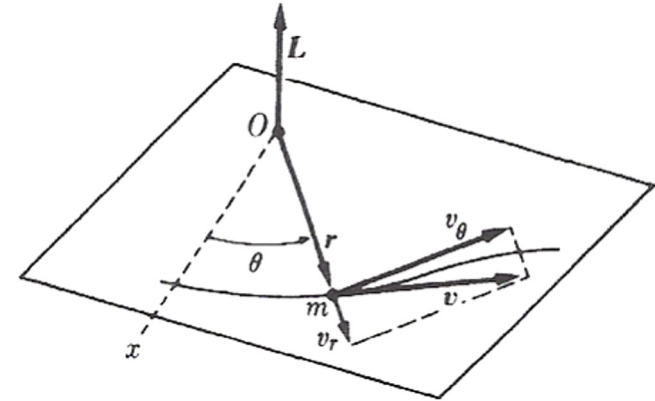
Canada

## 10.2. Gravitation

### ■ Energie cinétique

$$E_c(r) = \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$$

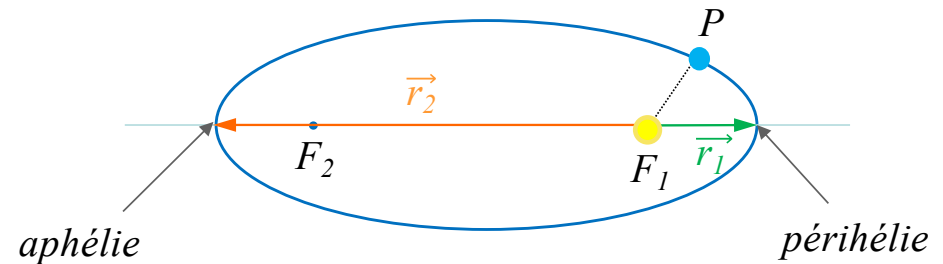
avec  $L = cte$



#### Trajectoire circulaire :

$$E_c(r) = \frac{L^2}{2mr^2}$$
$$E_c(r) = -\frac{1}{2} E_p(r)$$

#### Trajectoire elliptique :



Périhélie : distance la plus faible  $\Rightarrow$  vitesse la plus élevée

Aphélie : distance la plus grande  $\Rightarrow$  vitesse la plus faible

## 10.2. Gravitation

### ■ Energie mécanique

$$E(r) = E_c + E_p = cte$$

$$E(r) = E_c(r) - \frac{GMm}{r} + k \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Par convention, } k=0. \text{ L'énergie mécanique est négative lorsque le} \\ \text{satellite est en orbite. L'énergie est positive quand le satellite quitte} \\ \text{le champ de gravité (pas de mouvement orbitale possible)} \end{array} \right.$$

$$\text{avec } E_c(r) = \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$\text{On peut écrire } E(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \boxed{\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}}$$

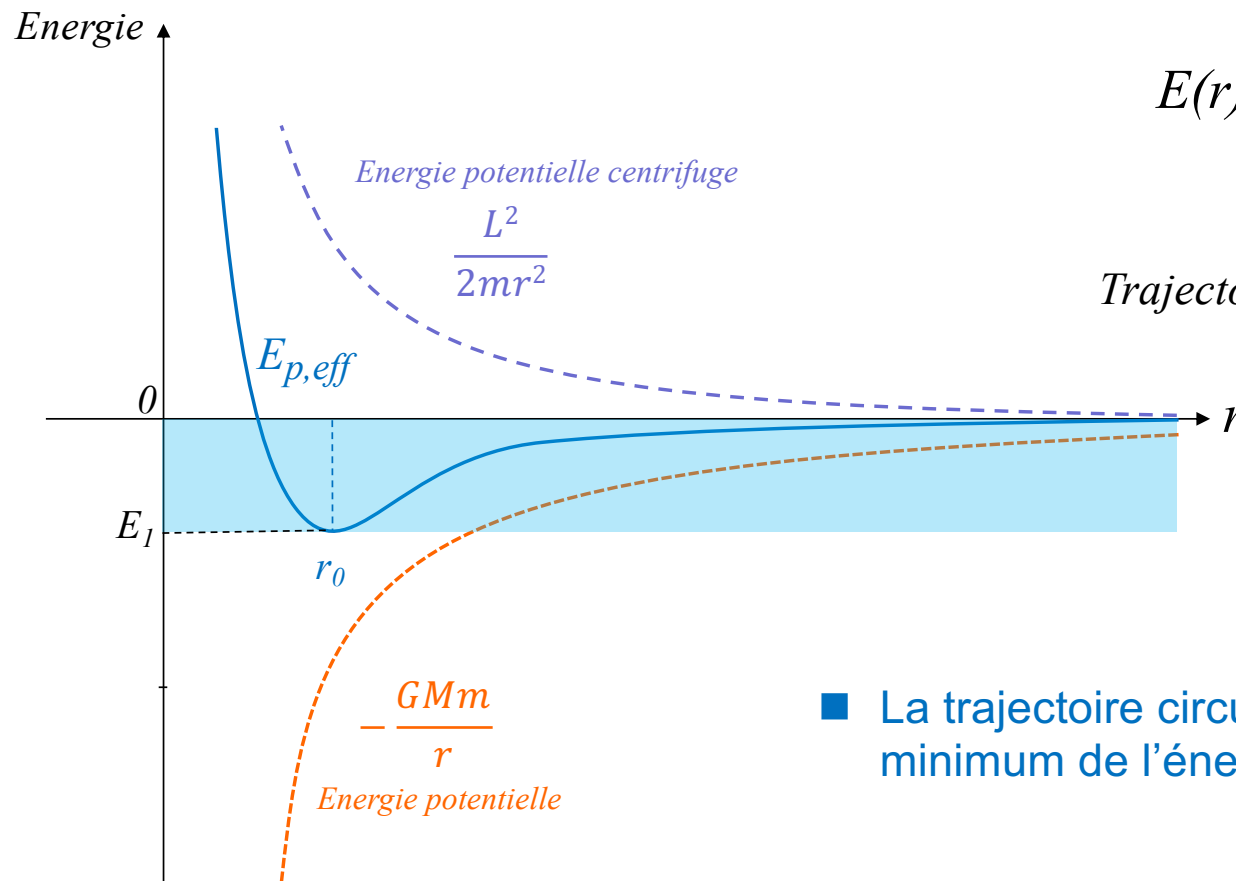
↓  
Vitesse radiale

↘  
Energie potentielle effective,  $E_{p,eff}$

↘  
 $\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = 0 \text{ à l'aphélie et à la périhélie (car rayon passe par un extremum)} \\ \dot{r} = 0 \text{ pour un mouvement circulaire} \end{array} \right.$

## 10.2. Gravitation

### ■ Energie mécanique et trajectoire circulaire



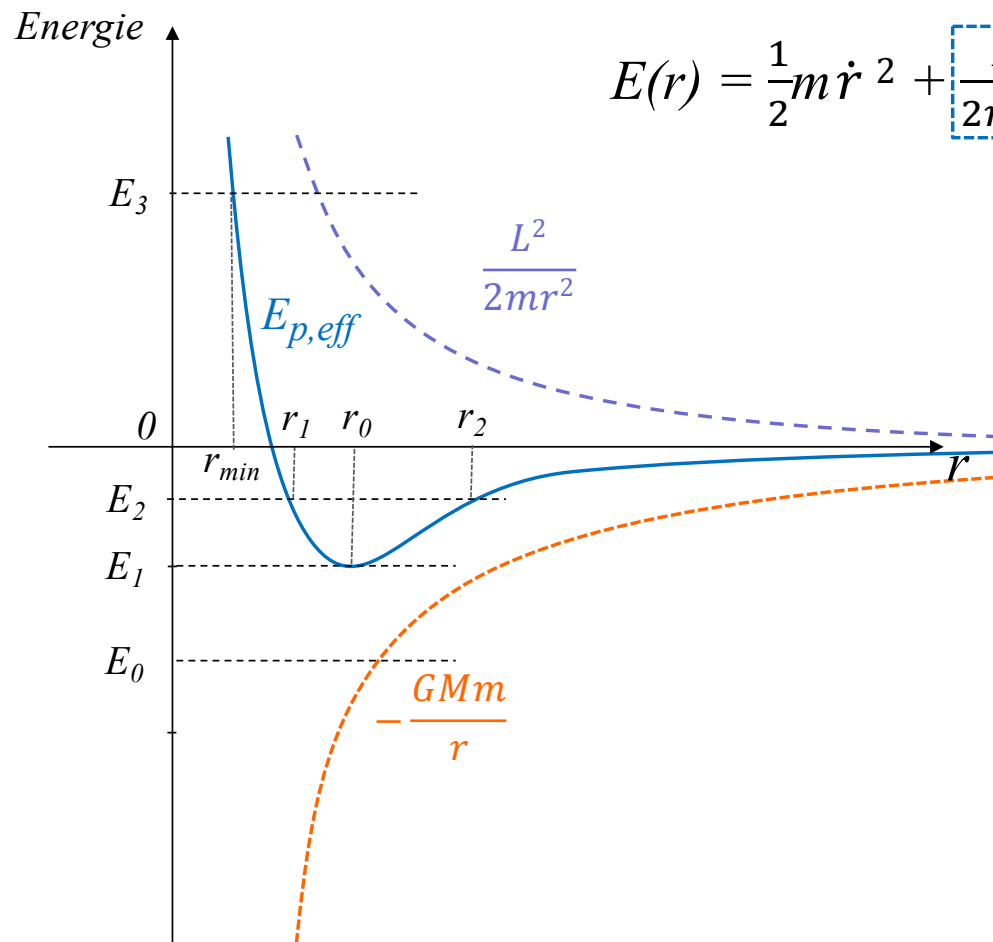
$$E(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}}_{E_{p,eff}}$$

$$\text{Trajectoire circulaire} \Rightarrow E(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}$$

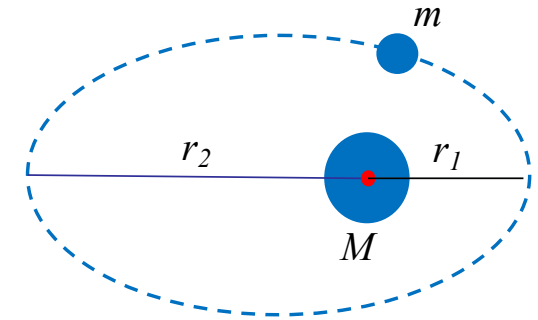
- La trajectoire circulaire de rayon  $r = r_0$  correspond à un minimum de l'énergie mécanique.

## 10.2. Gravitation

### ■ Energie mécanique et trajectoire : cas général



$$E(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}}_{E_{p,eff}} = cte$$



Trajectoire en fonction de l'énergie mécanique :

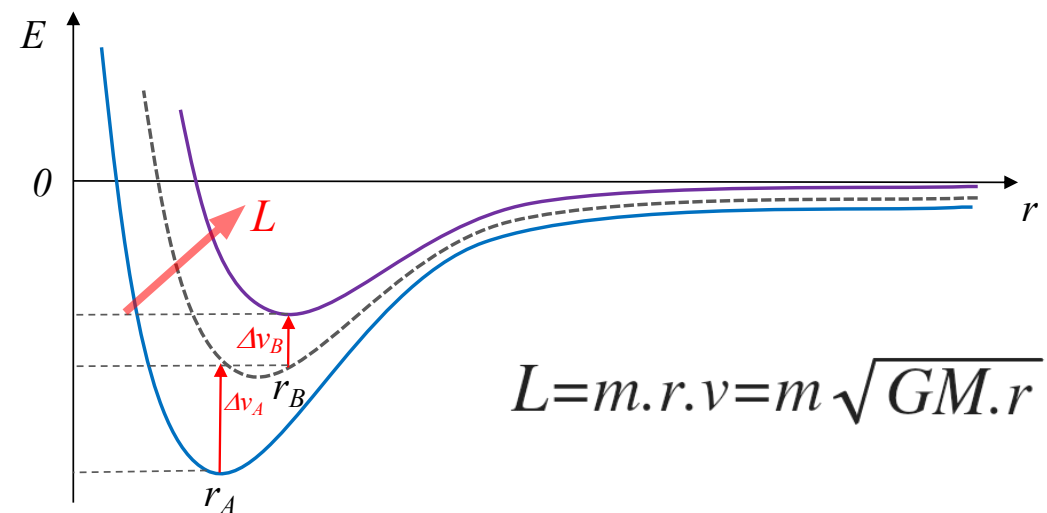
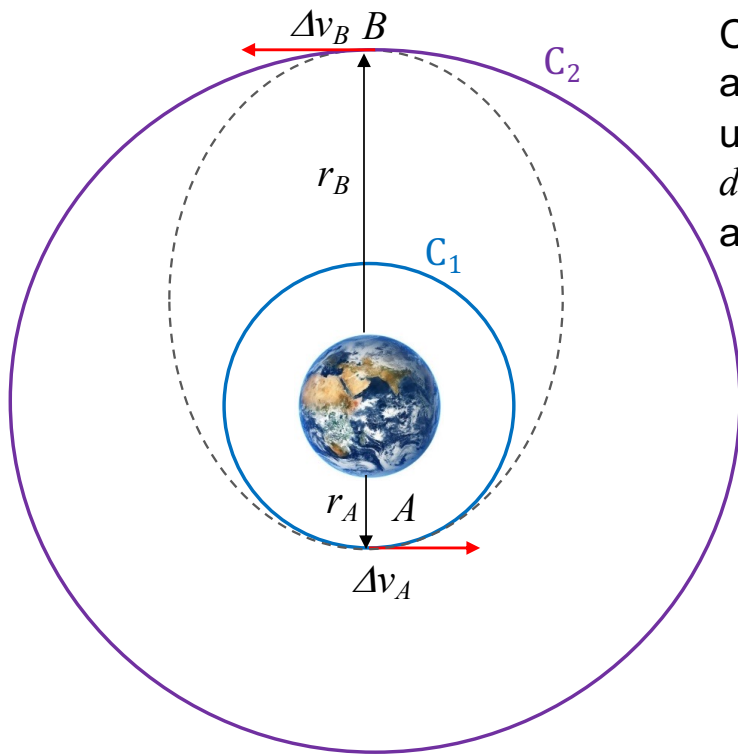
- $E=E_0 < E_1$ : pas d'orbite possible. L'objet chute sur la masse  $M$
- $E=E_1$ : un mouvement orbitale est possible avec un rayon constant  $r_0$ . La trajectoire est **circulaire**.
- $E=E_2$  ( $E_1 < E_2 < 0$ ): un mouvement orbitale est possible avec un rayon qui varie entre  $r_1$  et  $r_2$ . La trajectoire est une **ellipse**.
- $E=E_3 \geq 0$ : la mise en orbite est impossible. La trajectoire est une **hyperbole** : un objet venant de l'infini s'approche jusqu'à la distance  $r_{min}$  puis s'éloigne à nouveau à l'infini.

## 10.2. Gravitation

### ■ Changement d'orbite circulaire : transfert de Hohmann

Le transfert de Hohmann permet de passer d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire. Ces deux orbites sont dans un même plan.

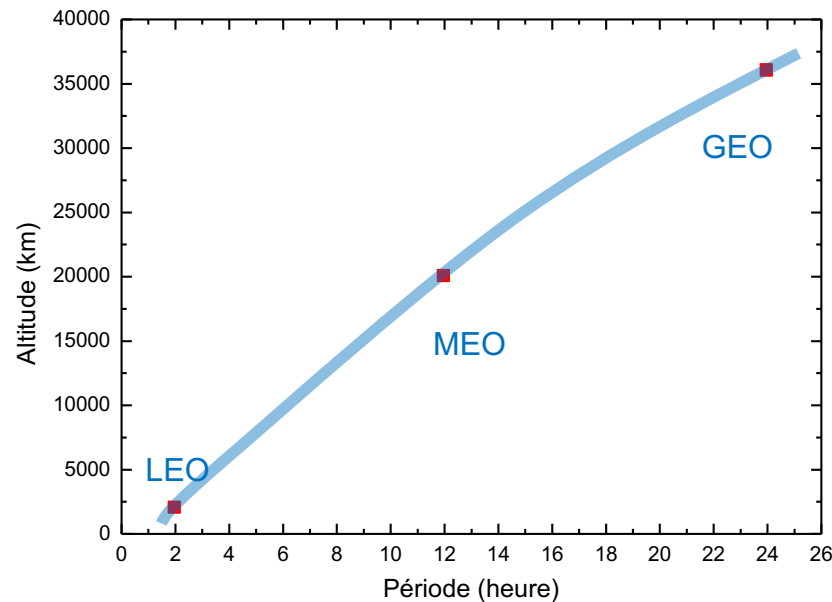
Ce transfert est obtenu en communiquant au satellite au point  $A$  une vitesse additionnelle par le biais d'un moteur. Le satellite quitte l'orbite  $C_1$  et suit alors une trajectoire elliptique, appelée « orbite de transfert ». Au point  $B$  (*aphélie de l'orbite de transfert*), on communique à nouveau une vitesse additionnelle afin d'obtenir la trajectoire circulaire  $C_2$ .



$$L = m \cdot r \cdot v = m \sqrt{GM \cdot r}$$

## 10.2. Gravitation

### ■ Principales orbites des satellites



$$T(h) = \left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^{3/2} T(h=0)$$

$$\text{avec } T = 2\pi \sqrt{\frac{R_T^3}{GM}} \text{ pour } h=0$$

$R_T$  rayon de la Terre (6371 km)

#### Orbite terrestre basse – LEO

(Low Earth Orbit): de 160 km à 2000 km. satellites de télécommunications, de détections, stations spatiales

#### Orbite terrestre moyenne – MEO

(Medium Earth Orbit): entre 2000 et 35000 km. Satellites de navigation GPS (20200 kilomètres) et Galileo (23222km)

#### Orbite géostationnaire – GEO

(Geostationary orbit): 35784 km. satellites de télécommunications et télévision (Eutelsat). Satellites météorologiques (Meteosat)

## 10.2. Gravitation

### ■ Principales orbites des satellites

Exemple : la station spatiale internationale



420 tonnes (108 m x 73 m)

Orbite à ~415 kilomètres d'altitude, vitesse de 27 600 km/h (7,7 km/s)

## 10.2. Gravitation

### ■ Debris Spatiaux



#### Situation au 9 Nov 2021

6120 lancements réussis de fusée  
12170 objets placés en orbite  
7630 encore en orbite  
4700 fonctionnent encore

630 évènements produisant une  
fragmentation (explosions, collisions,  
destruction)

36500 objets >10 cm  
1000000 objets >1 cm et <10 cm  
130 million objets >1 mm et <1 cm

[https://www.esa.int/Safety\\_Security/Space\\_Debris/Space\\_debris\\_by\\_the\\_numbers](https://www.esa.int/Safety_Security/Space_Debris/Space_debris_by_the_numbers)

## 10.2. Gravitation

### ■ Vitesse de libération d'un satellite

Définition : vitesse minimum à fournir à un « objet » pour qu'il ne soit plus en orbite (autrement dit, si la vitesse de l'objet est plus grande que la vitesse de libération alors l'objet quitte le champ de gravitation et se retrouve libre dans l'espace, mais avec une vitesse non nulle).

Cela revient à considérer que cet objet atteint un point situé à l'infini avec une vitesse nulle.

- Vitesse nulle à l'infini  $\Rightarrow E_c = 0$
- A l'infini, nous avons aussi  $E_p = 0$

$\Rightarrow$  l'énergie mécanique ( $E_c + E_p$ ) est donc nulle, c'est-à-dire:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

$$v_{Terre} = 11.2 \text{ km/s}$$

$$v_{Soleil} = 42.1 \text{ km/s}$$

(Objet situé sur l'orbite de la Terre)

## 10.2. Gravitation

### Trou Noir

#### ■ Rayon de Schwarzschild

*Un trou noir de Schwarzschild se caractérise par une charge nulle et un moment cinétique nul (pas de rotation), et pour lequel la lumière (les photons) ne peut pas s'échapper.*

*La lumière est «piégée» dans un volume qui peut être défini par un rayon de Schwarzschild. Ce rayon est aussi l'horizon d'un trou noir de Schwarzschild.*



Le rayon du trou noir se calcule à partir de la vitesse de la lumière en considérant la vitesse de libération :

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R_S}} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_S = \frac{2GM}{c^2}}$$

*Pour une masse équivalente à celle du Soleil, le rayon serait de 3 km*

## 10.2. Gravitation

### Matière Noire

#### ■ Vitesse de rotation des galaxies spirales

*Une galaxie spirale est en rotation autour de son centre.*

*La vitesse de rotation des étoiles (et du gaz d'hydrogène) peut être mesurée en fonction de la distance.*

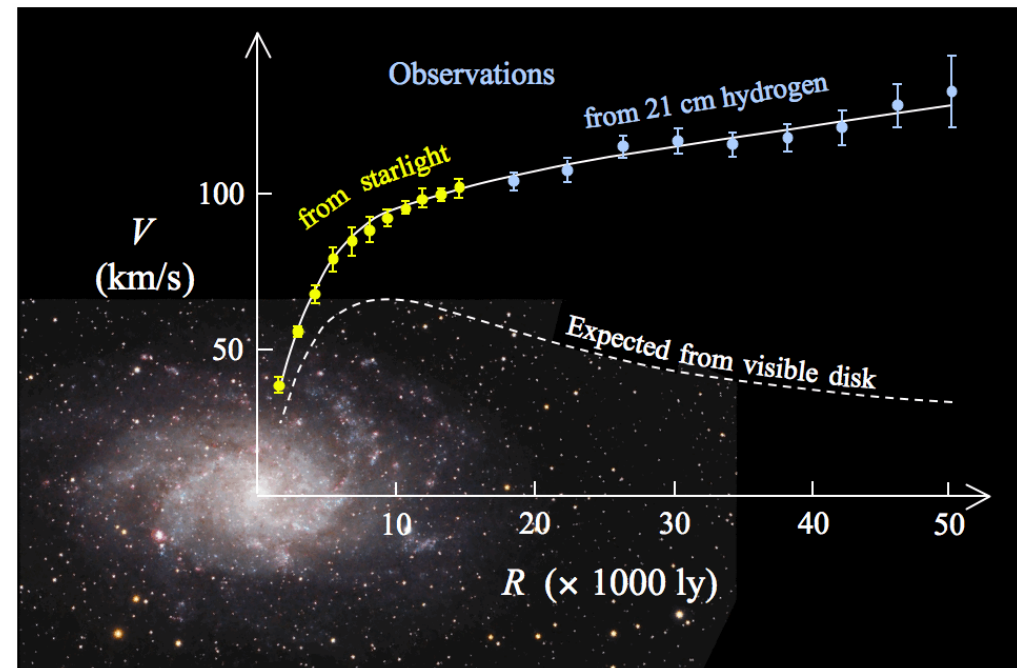
*A partir de là on peut calculer la masse de la galaxie en fonction de son rayon.*

*On trouve ~5-10 fois plus de masse que celle correspondant à la luminosité des étoiles.*

*On parle de **Matière Noire**.*

Détermination de la masse  
en fonction de la vitesse

$$M(<r) = \frac{r \cdot v^2}{G}$$



$$v_{stars} \sim 100-250 \text{ km/s}$$

## 10.3. Système solaire

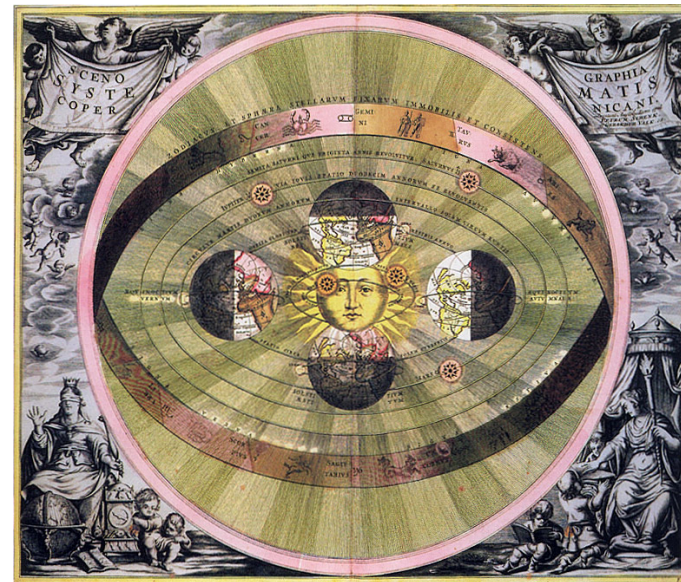
### ■ Le système planétaire selon Copernic Abandon de la théorie géocentrique d'Aristote

Copernic propose vers **1530** que **le Soleil est au centre du système solaire** : système héliocentrique (rupture avec le système géocentrique)



**Nicolas Copernic**

Astronome polonais (1473 - 1543)



remarque : un système héliocentrique est apparu dans la Grèce antique mais ne s'était pas imposé - Aristarque (310-230 av. J.C.)

## 10.3. Système solaire

### ■ Progrès de l'astronomie

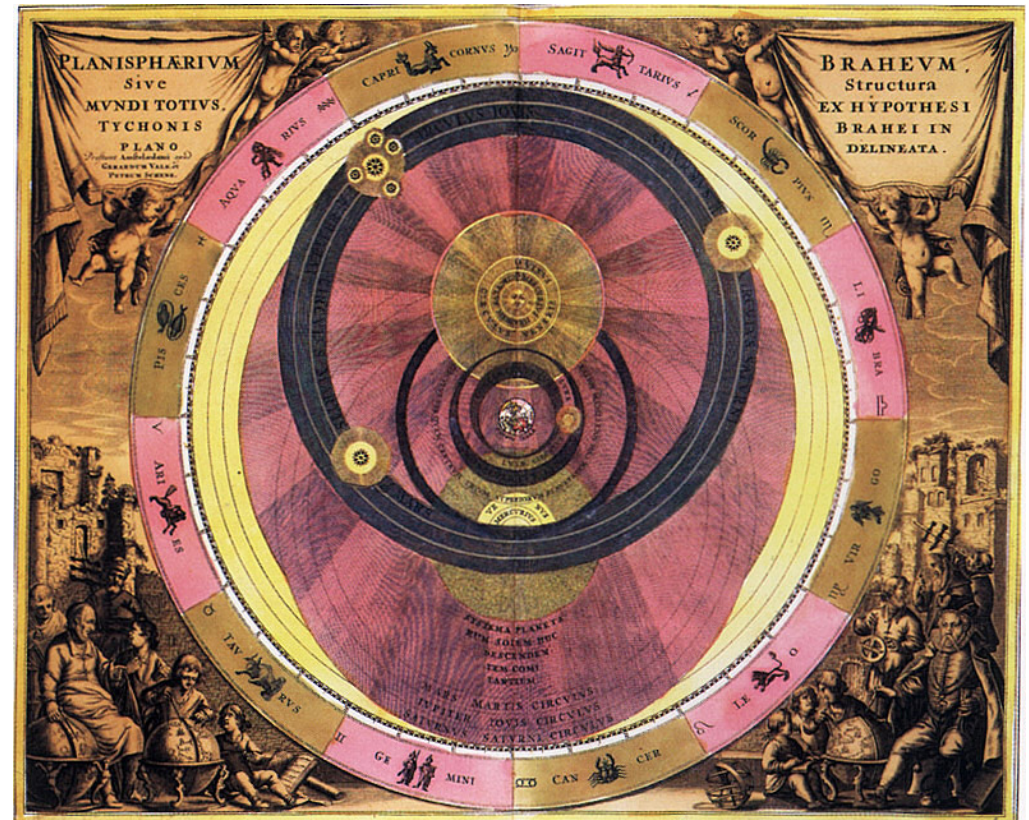
*Tycho Brahé prédit la trajectoire de la comète C/1577-V1*

Astronome danois. (1546 - 1601)



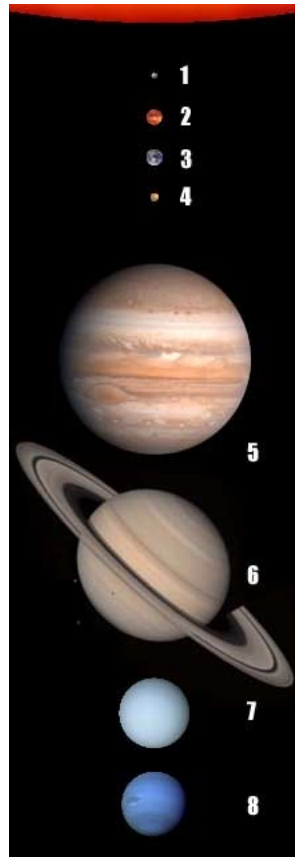
*Réconciliation par T. Brahé des  
visions héliocentrique et  
géocentrique :*

*le Soleil tourne autour de la Terre, et  
certaines planètes autour du Soleil*



## 10.3. Système solaire

### ■ Propriétés des planètes



source: wikipedia

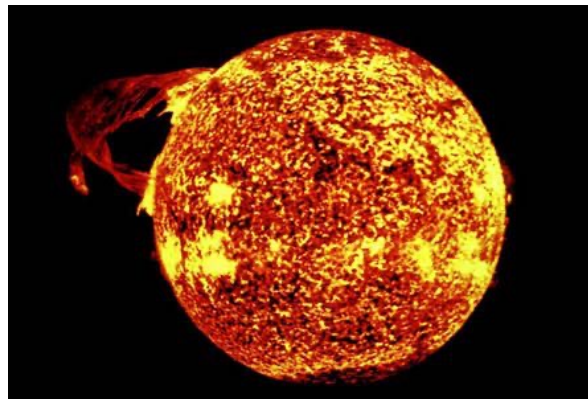
| Caractéristiques des planètes du Système solaire |                      |                                    |                      |                     |                                |                                                  |                          |                                            |            |         |                                  |
|--------------------------------------------------|----------------------|------------------------------------|----------------------|---------------------|--------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------------------------|------------|---------|----------------------------------|
|                                                  | Nom                  | Diamètre équatorial <sup>[a]</sup> | Masse <sup>[a]</sup> | Demi-grand axe (UA) | Période de révolution (années) | Inclinaison sur le plan équatorial du Soleil (°) | Excentricité de l'orbite | Période de rotation (jours) <sup>[c]</sup> | Satellites | Anneaux | Atmosphère                       |
| Planètes telluriques                             | Mercure              | 0.382                              | 0.06                 | 0.387               | 0.24                           | 3.38                                             | 0.206                    | 58.64                                      | —          | non     | négligeable                      |
|                                                  | Vénus                | 0.949                              | 0.82                 | 0.723               | 0.62                           | 3.86                                             | 0.007                    | -243.02                                    | —          | non     | CO <sub>2</sub> , N <sub>2</sub> |
|                                                  | Terre <sup>[b]</sup> | 1.00                               | 1.00                 | 1.00                | 1.00                           | 7.25                                             | 0.017                    | 1.00                                       | 1          | non     | N <sub>2</sub> , O <sub>2</sub>  |
|                                                  | Mars                 | 0.532                              | 0.11                 | 1.523               | 1.88                           | 5.65                                             | 0.093                    | 1.03                                       | 2          | non     | CO <sub>2</sub> , N <sub>2</sub> |
| Géantes gazeuses                                 | Jupiter              | 11.209                             | 317.8                | 5.203               | 11.86                          | 6.09                                             | 0.048                    | 0.41                                       | 67         | oui     | H <sub>2</sub> , He              |
|                                                  | Saturne              | 9.449                              | 95.2                 | 9.537               | 29.46                          | 5.51                                             | 0.054                    | 0.43                                       | 62         | oui     | H <sub>2</sub> , He              |
|                                                  | Uranus               | 4.007                              | 14.6                 | 19.229              | 84.01                          | 6.48                                             | 0.047                    | -0.72                                      | 27         | oui     | H <sub>2</sub> , He              |
|                                                  | Neptune              | 3.883                              | 17.2                 | 30.069              | 164.8                          | 6.43                                             | 0.009                    | 0.67                                       | 14         | oui     | H <sub>2</sub> , He              |

<sup>a</sup> par rapport à la Terre.

<sup>b</sup> Voir dans l'article [Terre](#) les valeurs absolues.

<sup>c</sup> Une valeur négative indique une planète tournant sur elle-même dans le sens inverse de la Terre.

1. Mercure
2. Vénus
3. Terre
4. Mars
5. Jupiter
6. Saturne
7. Uranus
8. Neptune



### Soleil

rayon = 696 000 km,  
masse =  $2 \times 10^{30}$  kg

**UA : Unité Astronomique** = Distance moyenne Terre-Soleil = 149,6 millions km = 500 secondes lumière