

Week 9 – Part 1

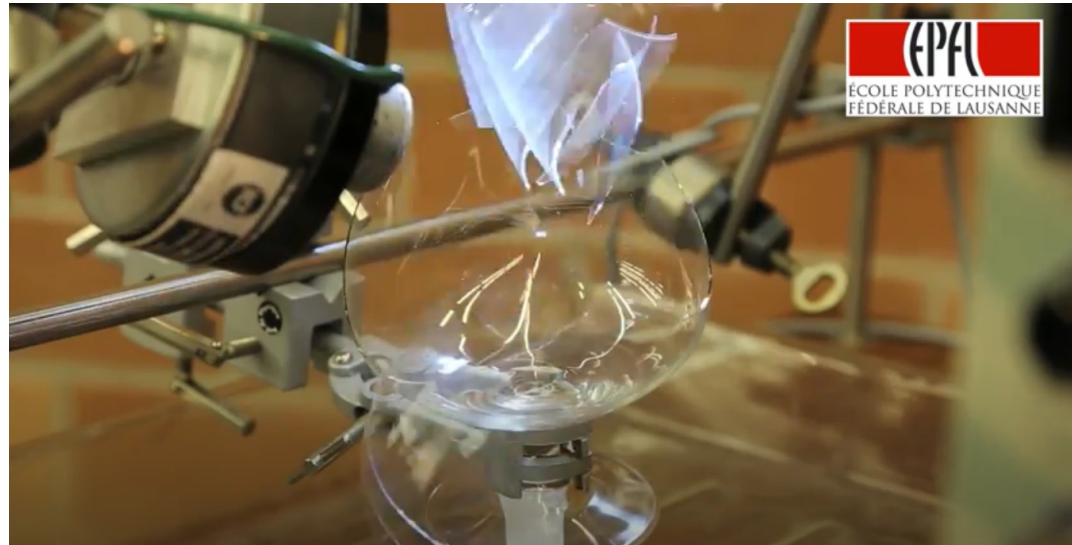
9. L'oscillateur harmonique linéaire

9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

9.6. Oscillateur forcé

9.7. Oscillateurs couplés

9.8. Analogie entre
oscillateurs mécanique et
électrique



9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

■ Ressort plongeant dans un liquide avec gravitation et poussée d'Archimède

La force de rappel du ressort : $\vec{F} = -k\vec{r}$ avec $\vec{r} = (l - l_0)\vec{e}_x = x\vec{e}_x$

La force de frottement fluide en régime laminaire : $\vec{F}_f = -K\eta\vec{v}$

La poussée d'Archimède : $\vec{F}_A = -\rho V\vec{g} = -M\vec{g}$

Le poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

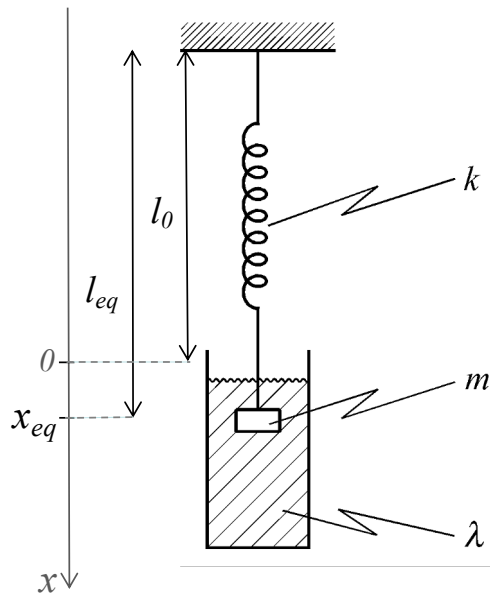
Position d'équilibre :

2nd loi de Newton : masse immobile $\Rightarrow a=0$ et $v=0$

$$\vec{0} = -k\vec{r} - M\vec{g} + m\vec{g}$$

On projette sur Ox : $0 = -k(l_{eq} - l_0) - Mg + mg$

$$l_{eq} = l_0 + \frac{m-M}{k}g \quad \text{et} \quad x_{eq} = l_{eq} - l_0 = \frac{m-M}{k}g$$



9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

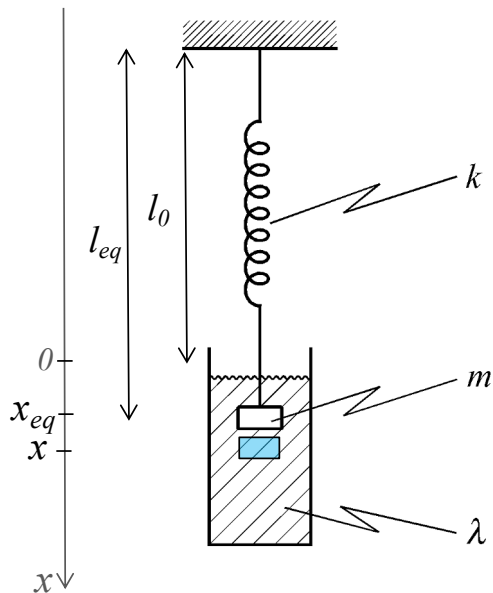
■ Ressort plongeant dans un liquide avec gravitation et poussée d'Archimède

Equation du mouvement :

2nd loi de Newton : $m\vec{a} = -k\vec{r} - K\eta\vec{v} - M\vec{g} + m\vec{g}$

On projette sur Ox : $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - K\eta \frac{dx}{dt} - Mg + mg$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + 2\lambda \frac{dx}{dt} = \frac{m-M}{m}g \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{K\eta}{2m} \\ \omega_0 = \sqrt{k/m} \end{cases}$$



Equation différentielle du 2^{ème} ordre avec 2nd membre :

$$a \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = d \quad \text{avec} \quad a, b, c, d = cte$$

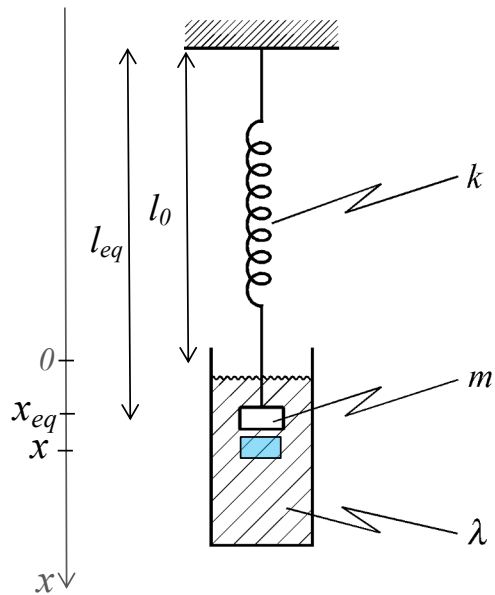
Solution : $y = y_p + y_g$

solution particulière

solution générale de l'équation différentielle sans second membre

9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

■ Ressort plongeant dans un liquide avec gravitation et poussée d'Archimède



Equation différentielle sans second membre :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Solution générale : $x(t) = e^{-\lambda t} \left(A_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} \right)$

Equation différentielle du mouvement avec 2nd membre :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x + 2\lambda \frac{dx}{dt} = \frac{m-M}{m} g$$

Solution particulière :

pour $t \rightarrow \infty$, masse immobile et $x(t \rightarrow \infty) = \frac{m-M}{k} g = x_{eq}$

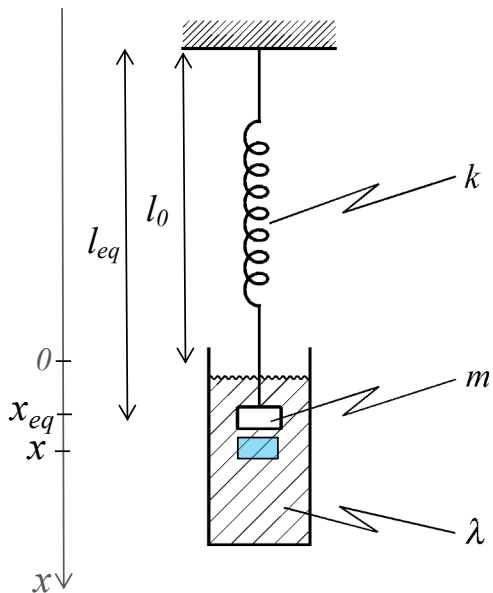
Solution de l'équation du mouvement :

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left(A_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} \right) + x_{eq}$$

9.5. Oscillateur libre soumis à une force de frottement fluide

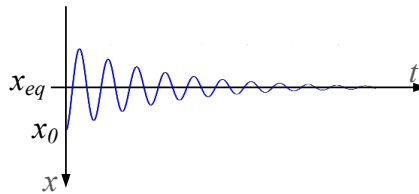
■ Ressort plongeant dans un liquide avec gravitation et poussée d'Archimède

Solution de l'équation du mouvement : $x(t) = e^{-\lambda t} \left(A_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} \right) + x_{eq}$



Si $\lambda < \omega_0$ alors la solution devient : $x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi) + x_{eq}$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

On tire sur la masse et on la lâche de la position x_0 sans vitesse initiale :



Conditions initiales à $t=0$: $x(0)=x_0$ et $v(0)=0$

$$x(0)=x_0 \Rightarrow A \cos(\omega \cdot 0 + \phi) + x_{eq} = x_0 \quad \text{d'où} \quad A = \frac{x_0 - x_{eq}}{\cos \phi}$$

$$v(0)=0 \Rightarrow A(-\lambda)e^{-\lambda \cdot 0} \cos(\omega \cdot 0 + \phi) - A e^{-\lambda \cdot 0} \omega \sin(\omega \cdot 0 + \phi) = -\lambda A \cos \phi - A \omega \sin \phi = 0 \quad \text{d'où} \quad \tan \phi = \frac{-\lambda}{\omega}$$

Solution complète :

$$x(t) = \frac{x_0 - x_{eq}}{\cos \phi} e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi) + x_{eq}$$

avec $\phi = \arctan \frac{-\lambda}{\omega}$

Résumé : Oscillateur libre

Non amorti

Ressort + Masse

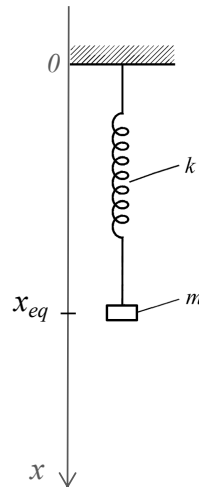
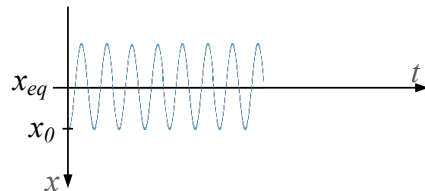
Equation du mouvement :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = g \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Les solutions sont de la forme :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) + x_{eq}$$

avec A amplitude du mouvement
 ω_0 pulsation propre de l'oscillateur
 ϕ phase initiale (à $t=0$)



Amorti

Ressort + Masse dans un fluide (sans poussée d'Archimède)

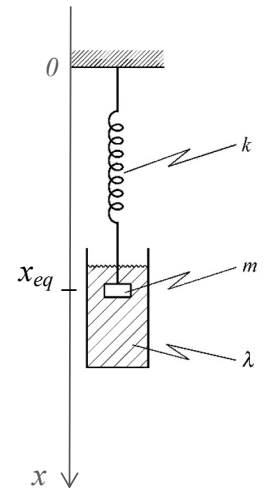
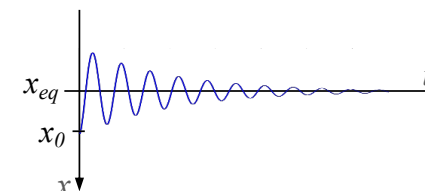
Equation du mouvement :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + 2\lambda \frac{dx}{dt} = g \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{K\eta}{2m} \\ \omega_0 = \sqrt{k/m} \end{cases}$$

Les solutions sont de la forme :

$$x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi) + x_{eq} \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

avec A amplitude du mouvement
 ω pulsation de l'oscillateur amorti
 ϕ phase initiale (à $t=0$)
 λ coefficient d'amortissement

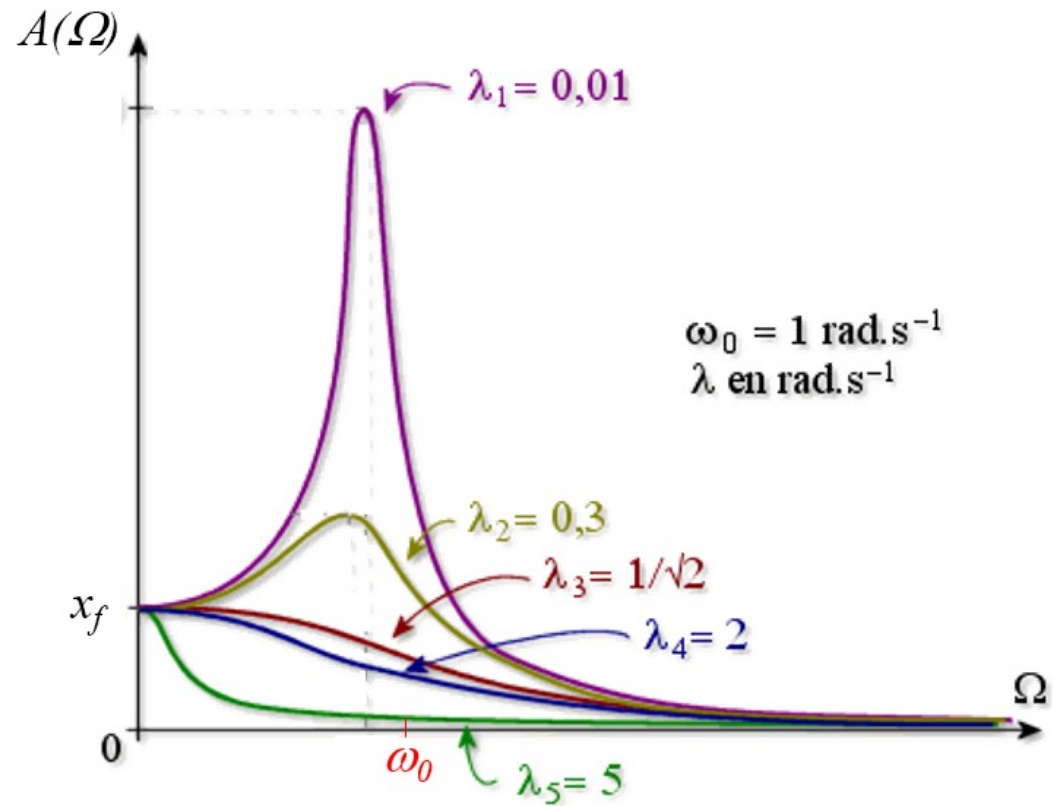


Si la pulsation est indépendante de l'amplitude $\Rightarrow$ l'oscillateur est dit «harmonique»

Week 9 – Part 2

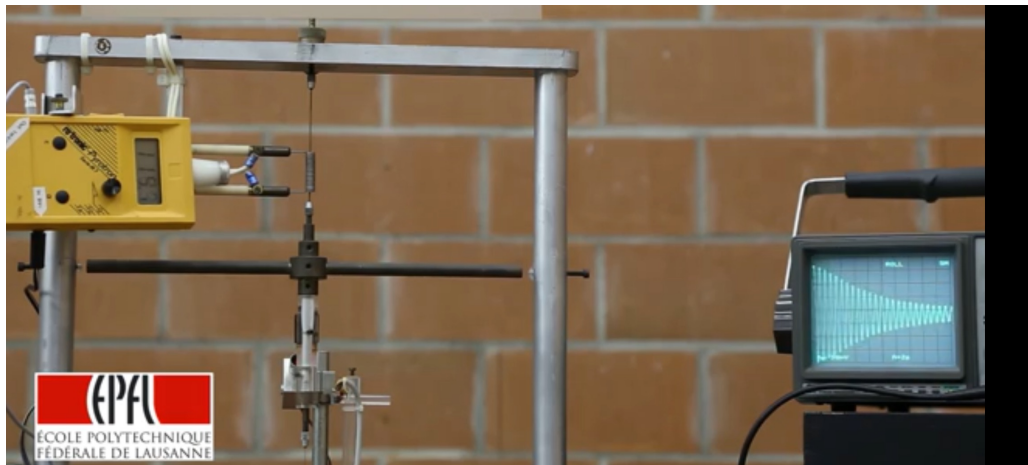
9. L'oscillateur harmonique linéaire

9.6. Oscillateur forcé



9.6. Oscillateur forcé

■ Introduction : entretien d'un oscillateur amorti



Un oscillateur amorti voit l'amplitude de ses oscillations diminuer. Ceci est la conséquence de la dissipation de l'énergie mécanique du système due au frottement fluide.

On rappelle en effet que si A est l'amplitude des oscillations, alors l'énergie mécanique de l'oscillateur est $\frac{1}{2}kA^2$

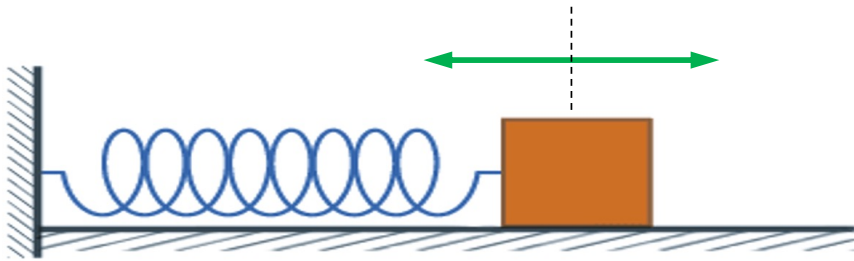
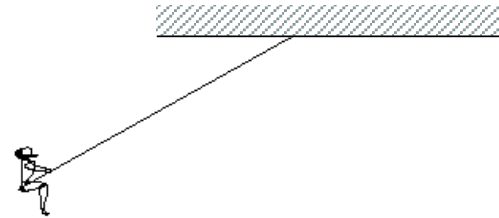
Un oscillateur a pulsation bien définie (base de temps) $\Rightarrow$ applications (horloge)

Comment éviter que l'oscillateur ne s'amortisse ? $\Rightarrow$ Apport d'énergie

9.6. Oscillateur forcé

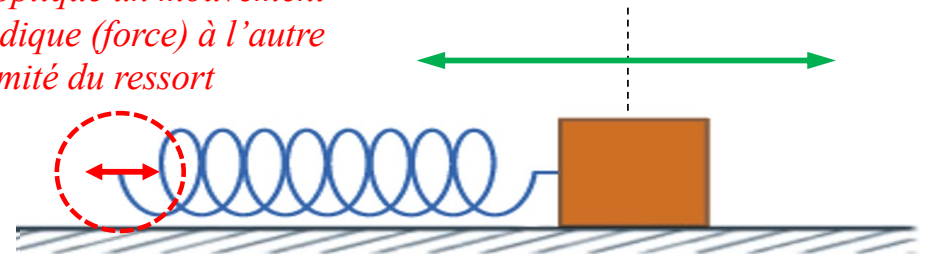
■ Introduction : application d'une force périodique sur un oscillateur

*Se balancer sur
une balançoire
constitue un
oscillateur forcé*



Oscillateur libre

*On applique un mouvement
périodique (force) à l'autre
extrémité du ressort*



Oscillateur forcé

9.6. Oscillateur forcé

Oscillateur forcé : oscillateur soumis à une force externe périodique telle que cet oscillateur soit forcé à prendre la période de la source excitatrice.

Si l'amortissement est faible, et si cette période est proche de la période propre de l'oscillateur, alors un phénomène de résonance peut se produire.

Exemples d'oscillateurs forcés

- Récepteur (radio et TV)
- Instruments de musique
- Analyse médicale (RMN)
- La voix

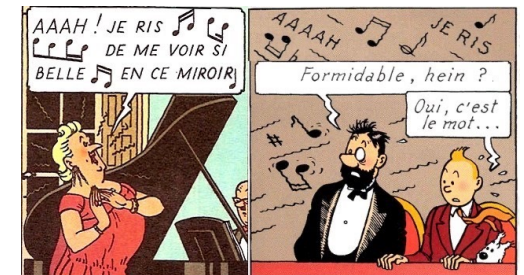


⇒ phénomène de « résonance »

Pont de Tacoma (USA) en 1940

Phénomène d'aéroélasticité critique

<https://www.dailymotion.com/video/xa0s25>

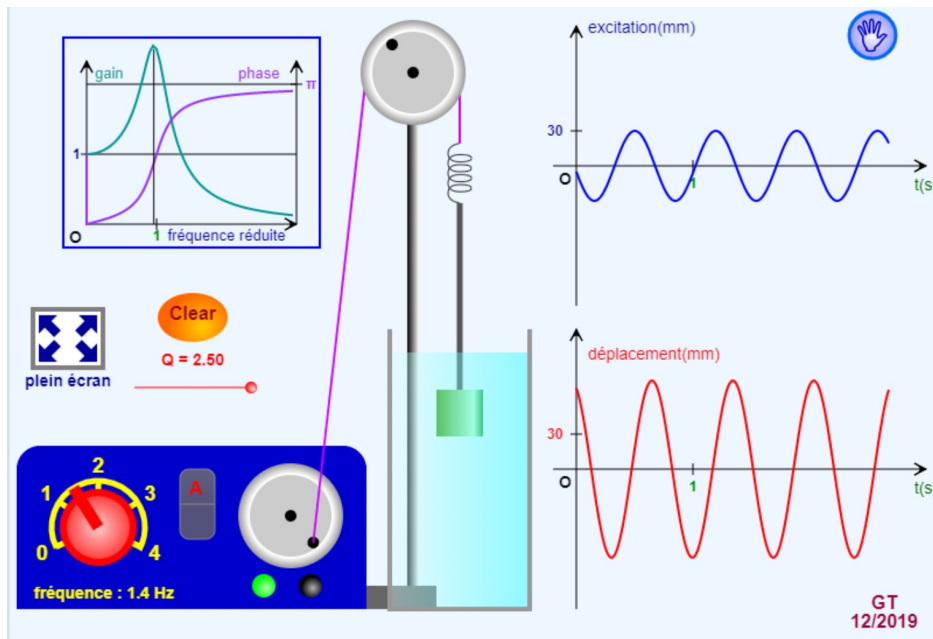


L'affaire Tournesol – Hergé (Casterman)

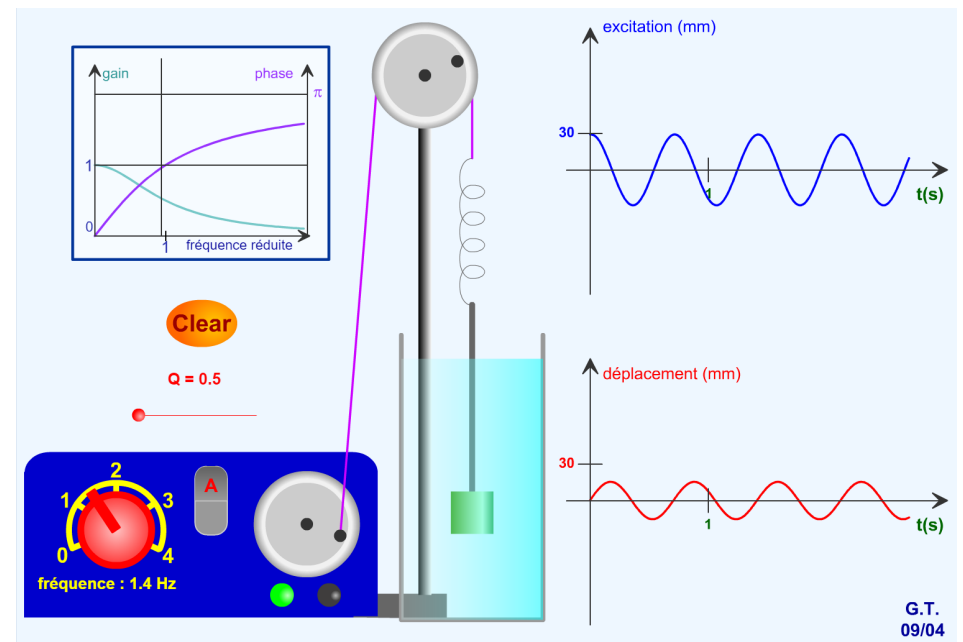
9.6. Oscillateur forcé

■ Oscillateur forcé avec frottement fluide : amortissement fort et faible

Amortissement faible

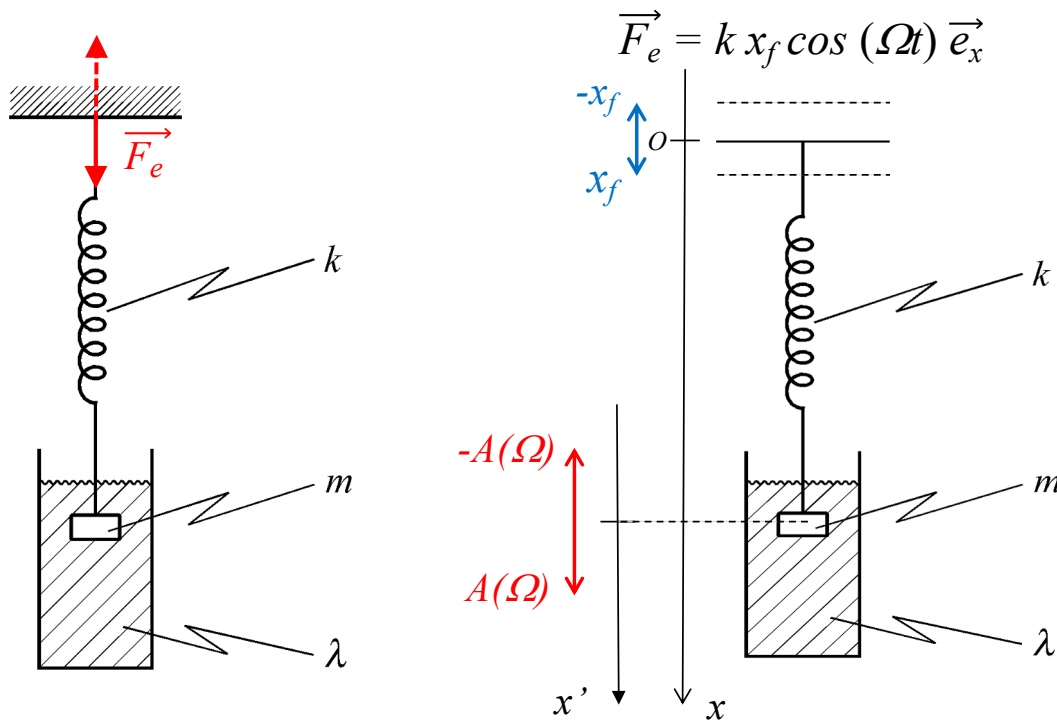


Amortissement fort



9.6. Oscillateur forcé

■ On applique à un oscillateur amorti, soumis à une force de rappel et à une force de frottement, une force extérieure oscillatoire de pulsation Ω



$$\vec{F}_e = k x_f \cos(\Omega t) \vec{e}_x \quad \text{force excitatrice}$$

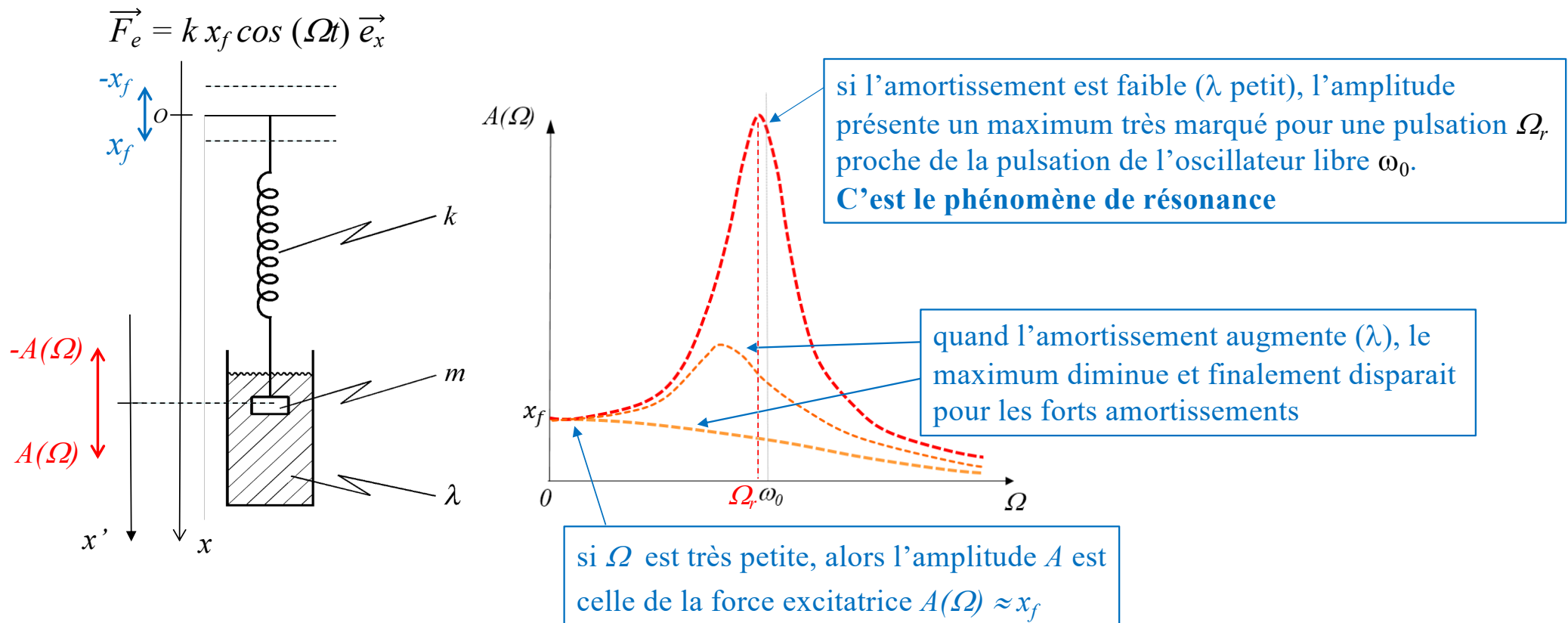
avec x_f amplitude de la force excitatrice
 Ω pulsation de la force excitatrice

On va calculer

- l'amplitude $A(\Omega)$
- le déphasage entre la force excitatrice F_e et la réponse de l'oscillateur

9.6. Oscillateur forcé

Que montre l'expérience au sujet de l'évolution de l'amplitude $A(\Omega)$ de l'oscillateur forcé en fonction de la pulsation Ω :



9.6. Oscillateur forcé

■ Equation du mouvement d'un oscillateur forcé amorti avec force de frottement fluide laminaire et force excitatrice $F_e = F_e \cos(\Omega t) e_x$

2nd loi de Newton avec projection sur Ox :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{ext} = \underbrace{mg}_{\text{poids}} - \underbrace{k(l - l_0)}_{\text{Force de rappel du ressort}} - \underbrace{K\eta \frac{dx}{dt}}_{\text{Force de frottement fluide}} + \underbrace{F_e \cos(\Omega t)}_{\text{Force excitatrice appliquée au ressort avec une pulsation } \Omega}$$

avec x défini par rapport à la position d'équilibre (ressort au repos, $ma=0$)
 $x = l - l_{eq}$ et $l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$ d'où $l - l_0 = x + \frac{mg}{k}$

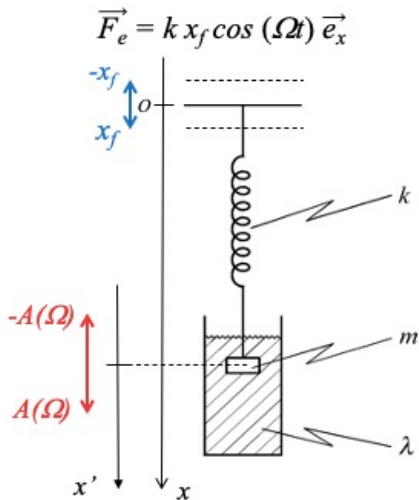
$$\text{soit } m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - K\eta \frac{dx}{dt} + F_e \cos(\Omega t)$$

Equation du mouvement :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \cos(\Omega t)$$

avec

$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{k/m} & \text{Pulsation propre du ressort libre} \\ \lambda = \frac{K\eta}{2m} \\ f = \frac{F_e}{m} = \frac{kx_f}{m} \end{cases}$$



9.6. Oscillateur forcé

■ Equation du mouvement d'un oscillateur forcé amorti avec force de frottement fluide laminaire et force excitatrice $F_e = F_e \cos(\Omega t) e_x$

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x} = \boxed{f \cos(\Omega t)}$$

Equation différentielle de l'oscillateur amorti

Force excitatrice

Comment l'oscillateur se comporte-t-il sous l'effet de la force excitatrice?

9.6. Oscillateur forcé

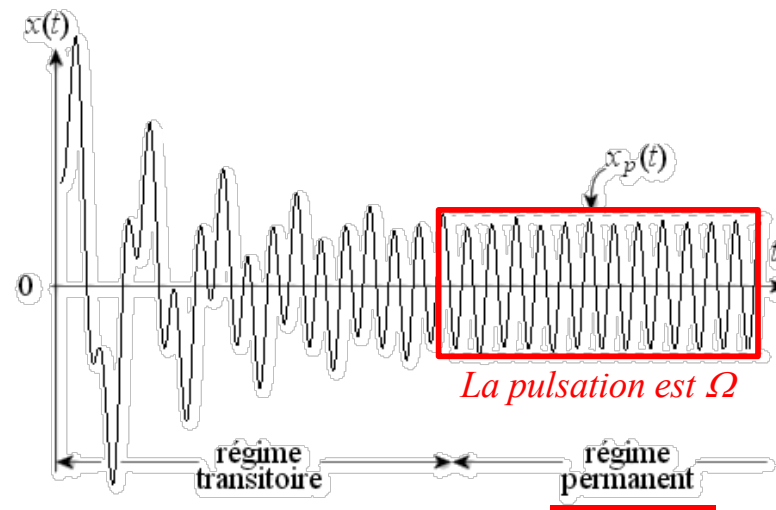
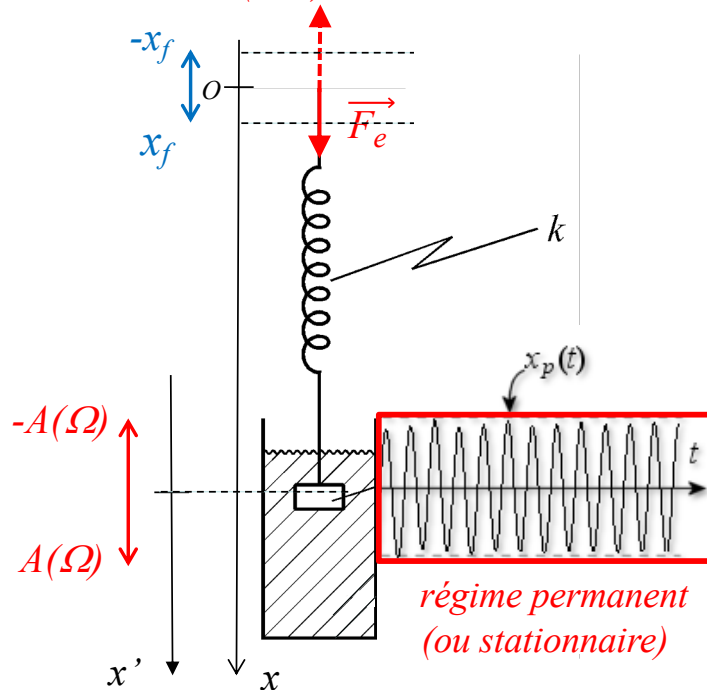
■ Evolution du mouvement de $t=0$ pour un oscillateur forcé faiblement amorti

Lorsque que l'on excite le ressort ($t=0$), l'oscillateur a un mouvement "chaotique".

Puis son mouvement se rapproche d'un mouvement oscillatoire pour se stabiliser dans un régime parfaitement oscillatoire avec une pulsation Ω qui est celle de la force excitatrice.

La pulsation des oscillations est Ω et l'amplitude dépend de Ω , ce régime "stable" est appelé régime **permanent** ou **stationnaire**.

$$\vec{F}_e = F_e \cos(\Omega t) \vec{e}_x \text{ force excitatrice}$$

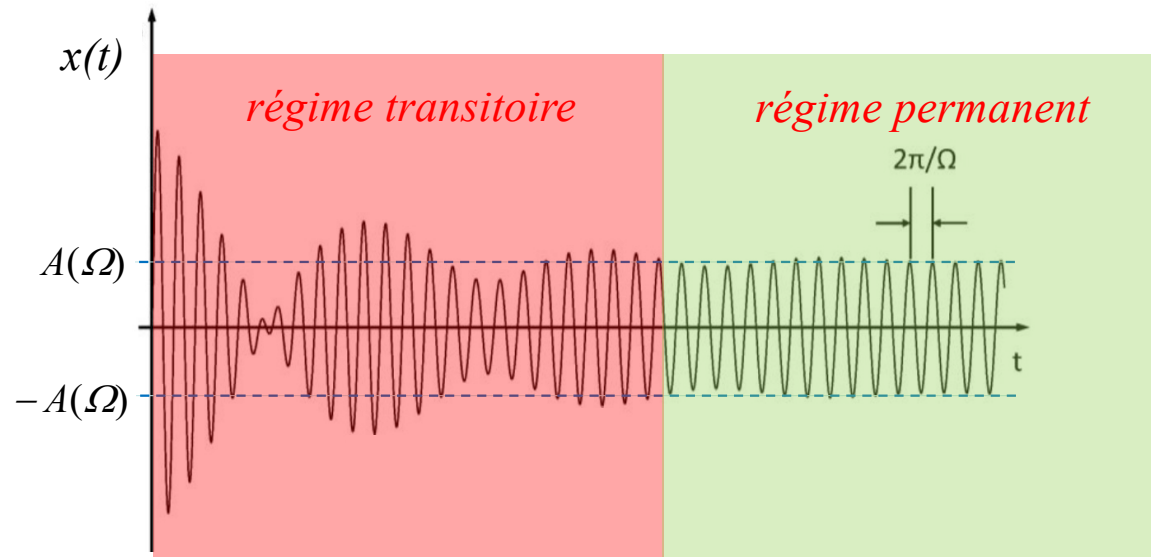


Régime permanent (stationnaire) : le mouvement de l'oscillateur forcé amorti est alors celui d'un oscillateur harmonique de pulsation égale à la pulsation Ω de l'excitation.

Seul le régime permanent sera étudié dans le cours

9.6 Oscillateur forcé

■ Evolution de la réponse de l'oscillateur à partir de $t=0$



Forme des solutions : $x(t) =$ **Mouvement permanent** + **Mouvement transitoire**

$$A(\Omega) \cos(\Omega t + \psi)$$

$$\begin{array}{lll} C e^{-\lambda t} \cos(\omega t - \phi) & \text{si } \lambda^2 < \omega_0^2 & \text{amort. faible} \\ e^{-\lambda t} (C_1 + C_2 t) & \text{si } \lambda^2 = \omega_0^2 & \text{amort. critique} \\ e^{-\lambda t} (C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}) & \text{si } \lambda^2 > \omega_0^2 & \text{amort. fort} \end{array}$$

le terme en $e^{-\lambda t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$

9.6 Oscillateur forcé

■ Forme des solutions en régime permanent

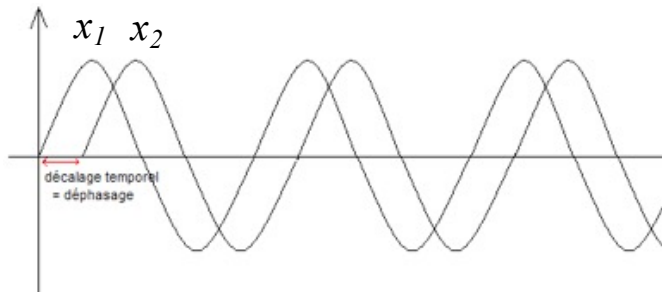
$$x(t) = A(\Omega) \cos(\Omega t + \Psi(\Omega))$$

Caractéristiques du mouvement :

- la pulsation de l'oscillateur forcé est celle de la force excitatrice Ω
- l'amplitude $A(\Omega)$ dépend de la pulsation Ω de la force excitatrice
- Le mouvement de l'oscillateur est déphasé de ψ par rapport à l'excitation
- Le déphasage ψ dépend de la pulsation Ω

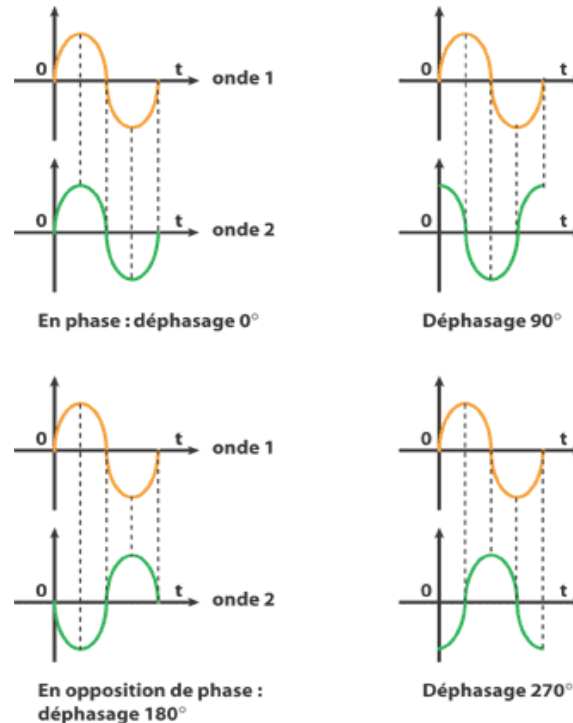
9.6. Oscillateur forcé

■ Le déphasage



$$x_1 = A \sin(\Omega t)$$

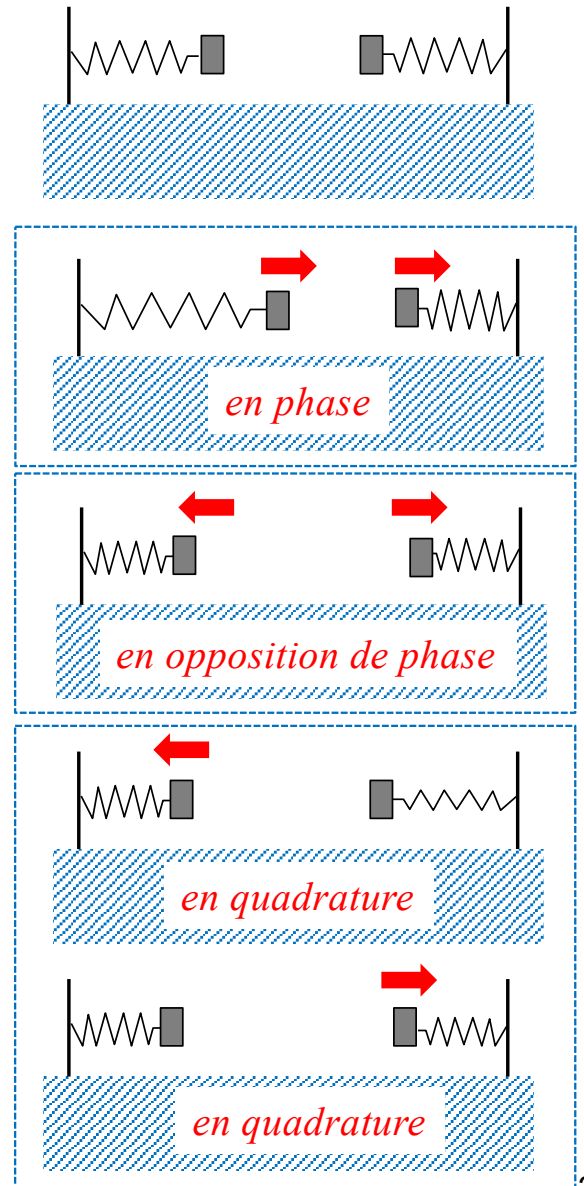
$$x_2 = A \sin(\Omega t + \psi)$$



$\psi = 0$ l'oscillateur et la force sont en phase

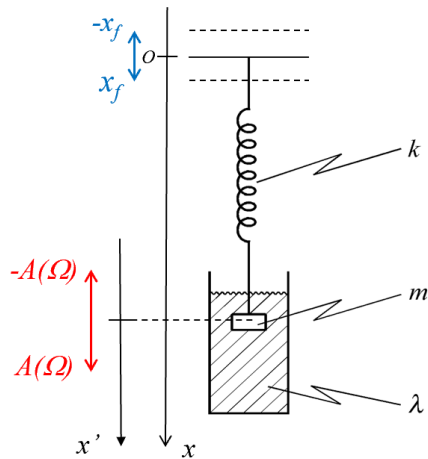
$\psi = \pm\pi$ l'oscillateur et la force sont en **opposition de phase**

$\psi = \pm\frac{\pi}{2}$ l'oscillateur et la force sont en **quadrature**



9.6. Oscillateur forcé

■ Résolution de l'équation différentielle par les complexes



Equation du mouvement de l'oscillateur forcé soumis à une force excitatrice $F_e = F_e \cos(\Omega t) \mathbf{e}_x$:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \cos(\Omega t) \quad \text{avec } f = \frac{kx_f}{m}$$

Equation différentielle en notation complexe :

$$\frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} + 2\lambda \frac{d\underline{x}}{dt} + \omega_0^2 \underline{x} = f e^{i\Omega t} = \underline{f} \quad \text{avec } \underline{x} \text{ et } \underline{f} \text{ des complexes}$$

La solution stationnaire (régime permanent) est un mouvement sinusoïdal de pulsation Ω et d'amplitude A (dépendant de Ω). Ce mouvement oscillatoire est déphasé de ψ par rapport à la force excitatrice. La forme générale de la solution s'écrit :

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_0 e^{i\Omega t} \quad \text{avec } \underline{x}_0 = A(\Omega) e^{i\psi(\Omega)}$$

$$\underline{x}(t) = \boxed{A(\Omega)} \boxed{e^{i\psi(\Omega)}} \boxed{e^{i\Omega t}}$$

amplitude déphasage pulsation

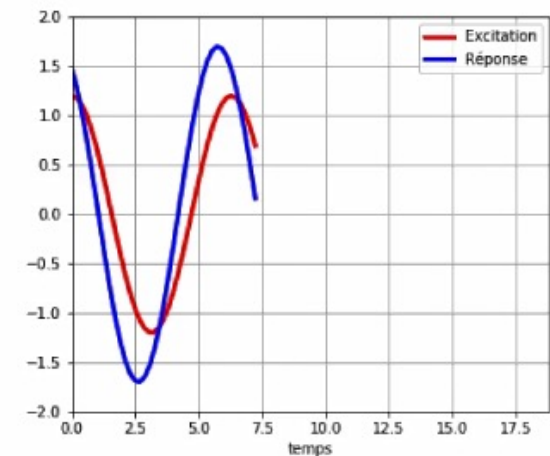
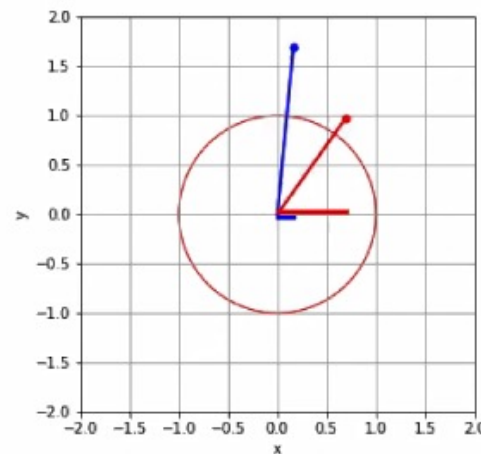
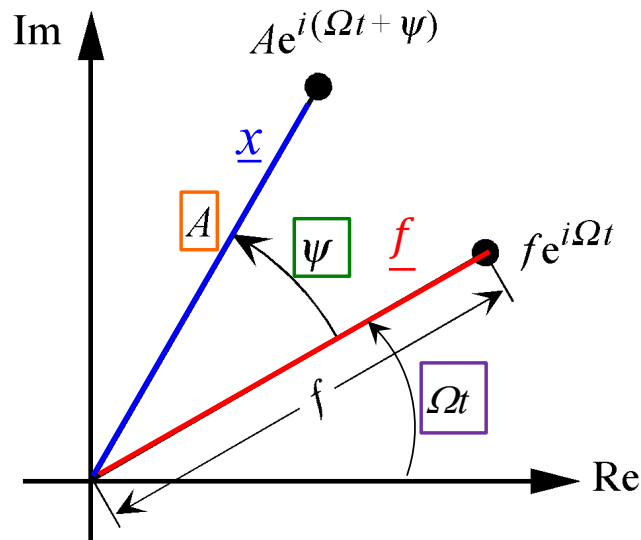
9.6. Oscillateur forcé

$$\underline{x}(t) = \boxed{A(\Omega)} \boxed{e^{i\Psi(\Omega)}} \boxed{e^{i\Omega t}}$$

amplitude déphasage pulsation

$A(\Omega)$ est l'amplitude réelle du mouvement oscillatoire forcé. Elle dépend de la pulsation de la force appliquée à l'oscillateur. Le mouvement de la masse m est déphasé de ψ par rapport au mouvement de la force excitatrice.

On peut représenter $\underline{x}$ et $\underline{f}$ dans le plan complexe :



9.6. Oscillateur forcé

■ Calcul de $A(\Omega)$ et $\Psi(\Omega)$

On injecte $\underline{x}(t) = \underbrace{A(\Omega)e^{i\psi(\Omega)}}_{\underline{x}_0} e^{i\Omega t}$ dans $\frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} + 2\lambda \frac{d\underline{x}}{dt} + \omega_0^2 \underline{x} = f e^{i\Omega t}$

Nous obtenons $(-\Omega^2 + i2\lambda\Omega + \omega_0^2)\underline{x}_0 e^{i\Omega t} = f e^{i\Omega t}$ soit

$$\underline{x}_0 = \frac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\lambda\Omega}$$

nombre complexe
de la forme $\frac{1}{a+ib}$

or*) $\frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}$ d'où

$$\underline{x}_0 = \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)f}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2} - i \frac{2\lambda\Omega f}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}$$

$\underline{x}_0$ est un nombre complexe, qui contient à la fois l'amplitude réelle $A(\Omega)$ et le déphasage $\psi(\Omega)$ du mouvement de la masse m par rapport à la force excitatrice

$$*) \frac{1}{a+ib} \times \frac{1}{a-ib} = \frac{1}{a^2 - i^2 b^2} = \frac{1}{a^2 + b^2} \Rightarrow \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

Les parties réelle et imaginaire de $\underline{x}_0$ sont $\Re(\underline{x}_0) = f \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}$ $\Im(\underline{x}_0) = f \frac{-2\lambda\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}$

$$A(\Omega) = \|\underline{x}_0\| = \sqrt{\Re^2(\underline{x}_0) + \Im^2(\underline{x}_0)} = \sqrt{\underline{x}_0 \underline{x}_0^*}$$

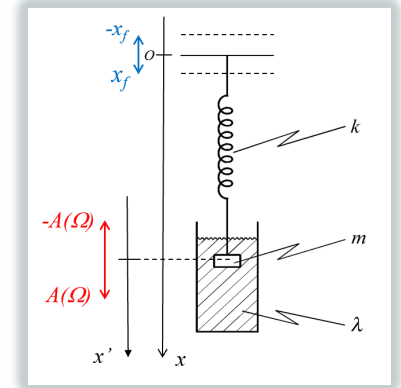
$$\tan \psi(\Omega) = \frac{\Im(\underline{x}_0)}{\Re(\underline{x}_0)} = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

9.6. Oscillateur forcé

■ Forme des solutions en régime permanent

Oscillateur forcé soumis à une force excitatrice $F_e = F_e \cos(\Omega t) \mathbf{e}_x$

$$x(t) = A(\Omega) \cos(\Omega t + \Psi(\Omega))$$



■ Amplitude $A(\Omega)$

$$A(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}} = x_f \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$$

$$f = \frac{kx_f}{m} = x_f \omega_0^2$$

■ Déphasage $\psi(\Omega)$

$$\psi(\Omega) = \arctan \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

9.6. Oscillateur forcé

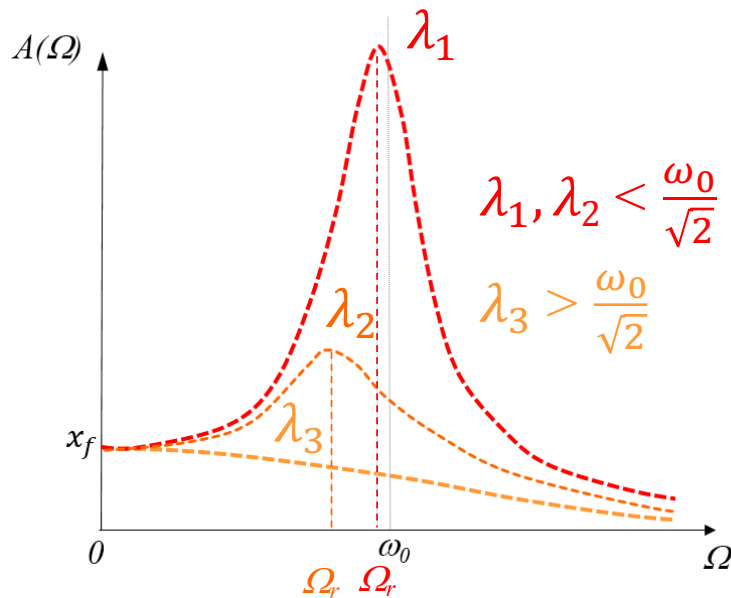
■ Pulsation de résonance Ω_r (amplitude maximum pour $\Omega = \Omega_r$)

$$A(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{(w_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$$

Maximum de la fonction $A(\Omega) \Leftrightarrow \frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = 0$

$A(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{B(\Omega)}}$ Minimum de la fonction $B(\Omega) \Leftrightarrow \frac{dB(\Omega)}{d\Omega} = 0$

$$B'(\Omega) = -4\Omega(w_0^2 - \Omega^2) + 8\lambda^2\Omega$$



Finalement

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

Pulsation de résonance

Remarque :

La résonance n'existe que pour $\omega_0^2 - 2\lambda^2 > 0$, soit $\lambda < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$

Si $\lambda \geq \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ alors l'amortissement est trop fort et il n'y a plus de résonance. L'amplitude $A(\Omega)$ des oscillations de la masse est alors inférieure l'amplitude x_f de la force excitatrice.

9.6. Oscillateur forcé

■ Pulsation de résonance Ω_r (amplitude maximum pour $\Omega = \Omega_r$)

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$



9.6. Oscillateur forcé

■ Pulsation de résonance Ω_r (amplitude maximum pour $\Omega = \Omega_r$)

- Comparaison des différentes pulsations ω_0 , ω , Ω_r :

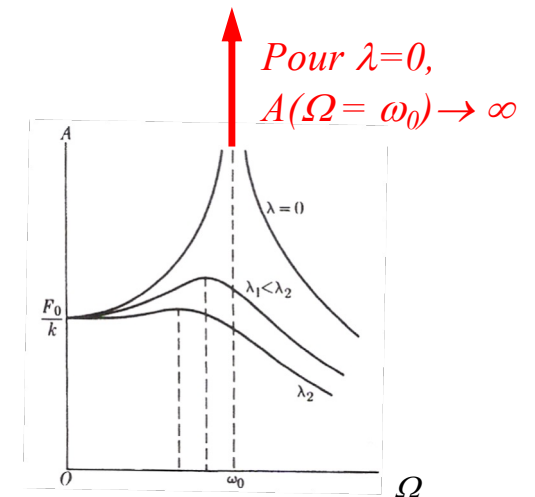
$$\Omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2 = \omega^2 - \lambda^2 \text{ avec } \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \text{ d'où } \boxed{\Omega_r < \omega < \omega_0}$$

- Cas de l'oscillateur forcé avec frottement nul ($\lambda=0$) :

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \Rightarrow \Omega_r = \omega_0$$

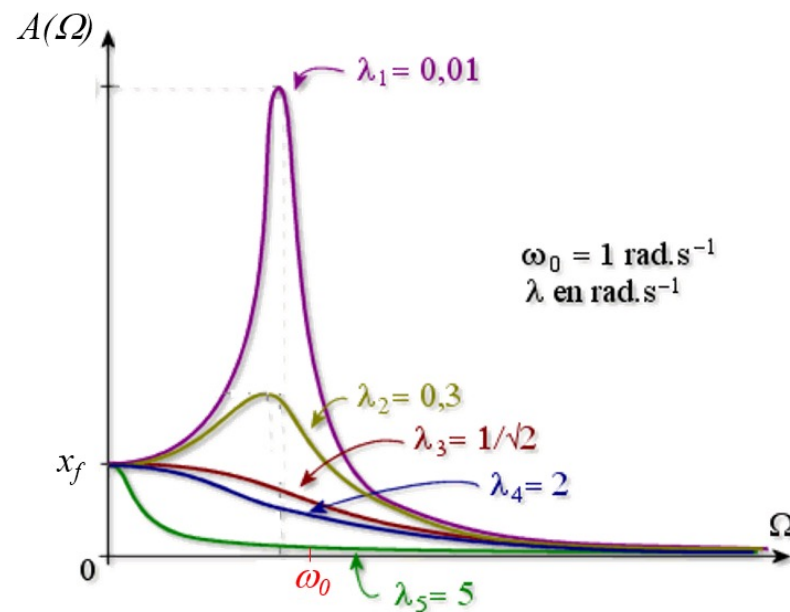
$$A(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}} \Rightarrow A(\Omega) \rightarrow \infty$$

L'expression de $A(\Omega)$ diverge pour $\Omega = \omega_0$. L'amplitude devient infinie. Dans la réalité, on atteint les limites physique du système (phénomène de rupture).



9.6. Oscillateur forcé

■ Amplitude du mouvement



Courbes de résonance pour différentes valeurs de coefficient d'amortissement λ

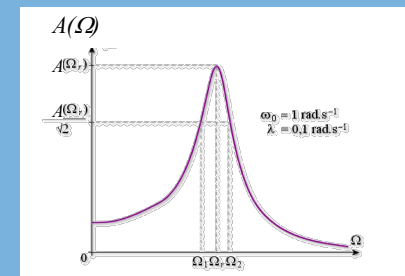
$$A(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$$

Information

Facteur de qualité:

$$Q = \frac{\Omega_r}{\Delta\Omega} = \frac{\Omega_r^2}{2\lambda\omega}$$

$\Delta\Omega$ est la bande passante définie telle que $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ avec $A(\Omega_1) = A(\Omega_2) = A(\Omega_r)/\sqrt{2}$



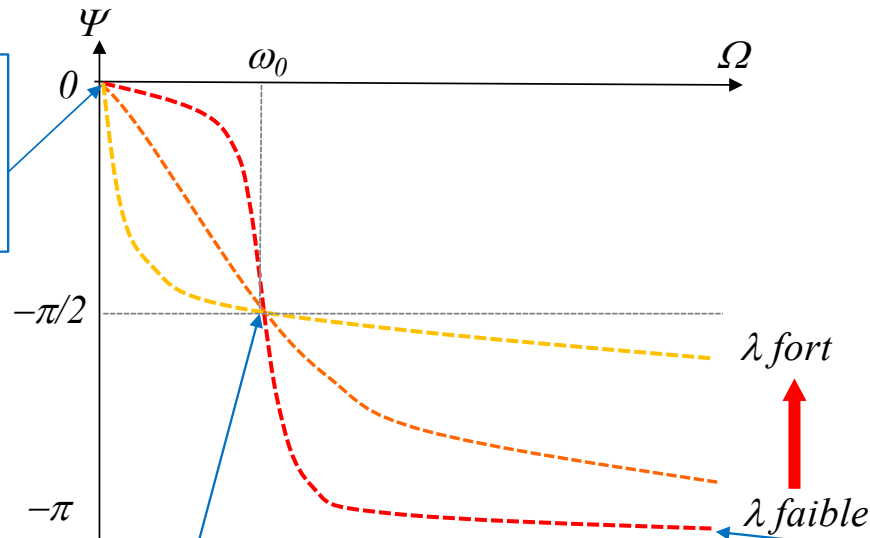
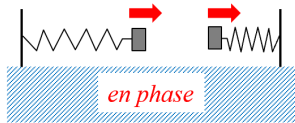
9.6. Oscillateur forcé

■ Déphasage $\Psi(\Omega)$

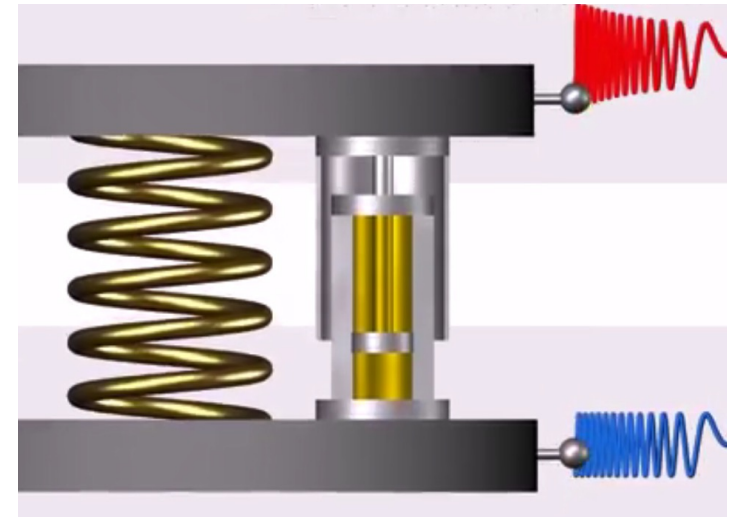
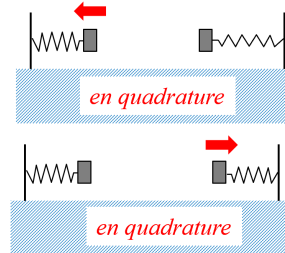
déphasage du mouvement de la masse m par rapport à l'excitation

$$\psi(\Omega) = \arctan \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

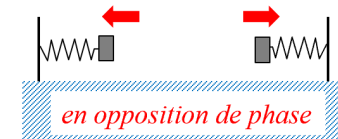
si Ω est très petite, alors l'oscillateur est en phase avec la force excitatrice



pour $\Omega = \omega_0$, l'oscillateur est en quadrature de phase avec la force excitatrice



si Ω est très grande, alors l'oscillateur est en opposition de phase avec la force excitatrice



Week 9 – Part 3

9. L'oscillateur harmonique linéaire

9.6. Oscillateur forcé

9.7. Oscillateurs couplés



9.8. Analogie entre oscillateurs mécanique et électrique

9.6. Oscillateur forcé

■ Résumé

Equation du mouvement :

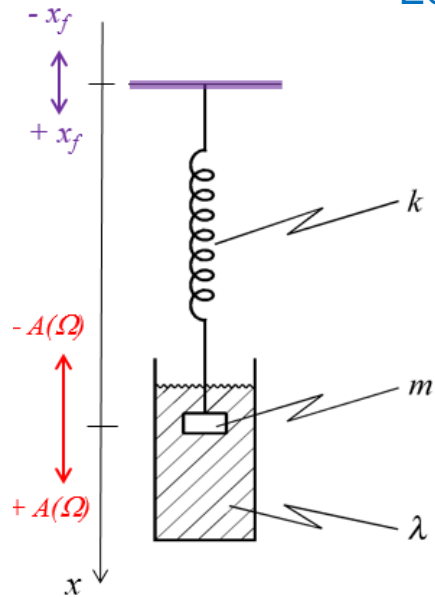
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \cos(\Omega t)$$

avec

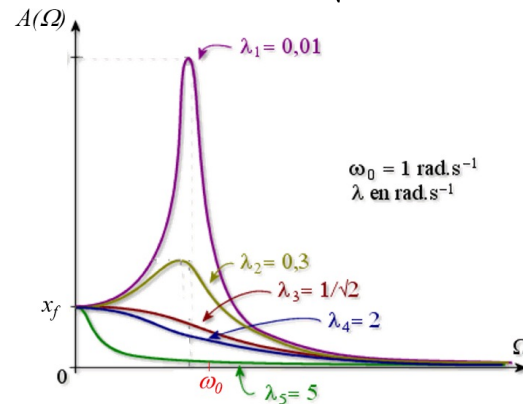
$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{k/m} & \text{Pulsation propre du ressort libre} \\ \lambda = \frac{K\eta}{2m} \\ f = \frac{F_e}{m} = \frac{kx_f}{m} \end{cases}$$

Solution :

$$x(t) = A(\Omega) \cos(\Omega t + \Psi(\Omega))$$

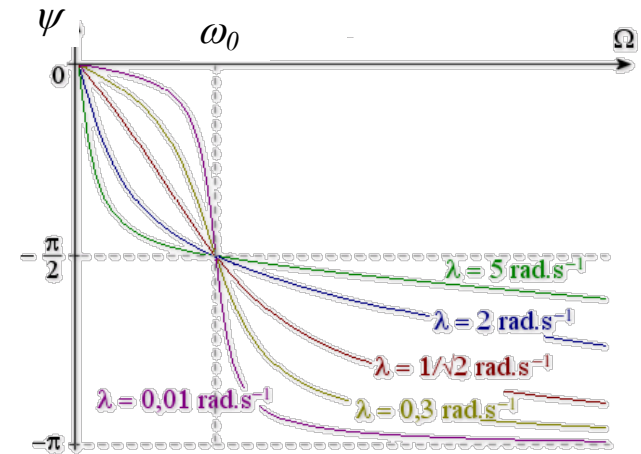


Amplitude $A(\Omega) = x_f \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$



Pulsation de résonance : $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$

Déphasage $\psi(\Omega) = \arctan \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$



9.6. Oscillateur forcé

■ Analyse énergétique

La force de frottement fluide entraîne une dissipation de l'énergie.

Sur une période T : $E_{diss} = -W' = - \int_0^T \vec{F}_f \cdot \vec{v} dt$ avec $\vec{F}_f = -K\eta \vec{v}$
 $T = \frac{2\pi}{\Omega}$  travail de la force de frottement

or $x = A \cos(\Omega t + \Psi)$

d'où $v = -A \Omega \sin(\Omega t + \Psi)$

$$\text{Soit } E_{diss} = \int_0^T K\eta v^2 dt = \int_0^T K\eta A^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t + \Psi) dt = K\eta A^2 \Omega^2 \frac{\pi}{\Omega} = K\eta A^2 \Omega \pi$$

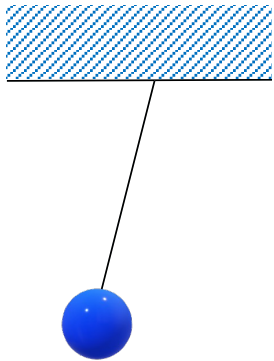
$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

Puissance dissipée moyenne: $\langle P_{diss} \rangle = \frac{E_{diss}}{T} = \frac{1}{2}K\eta A^2 \Omega^2$

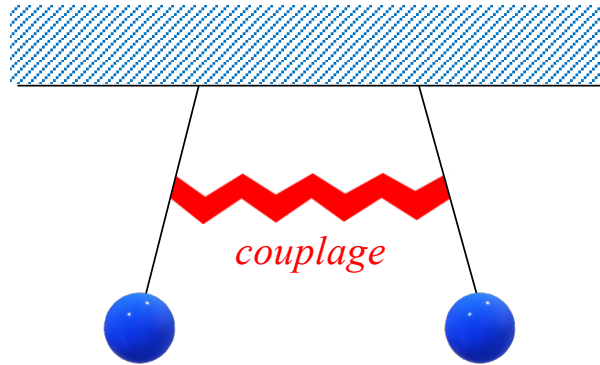
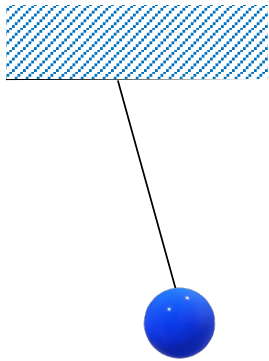
Remarque: on peut montrer que la puissance dissipée moyenne est maximum pour $\Omega = \omega_0$

9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

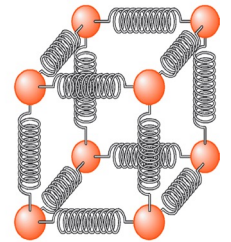
■ Introduction



Ocillateurs libres indépendants
- oscillateurs non couplés



Ocillateurs libres en interaction
- oscillateurs **couplés**



Cristal : l'interaction entre les atomes (liaison chimique) peut être assimilée à un ressort

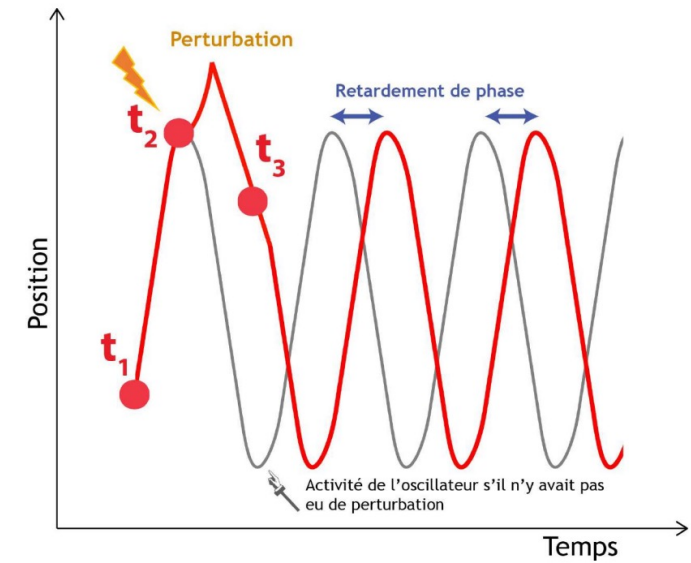
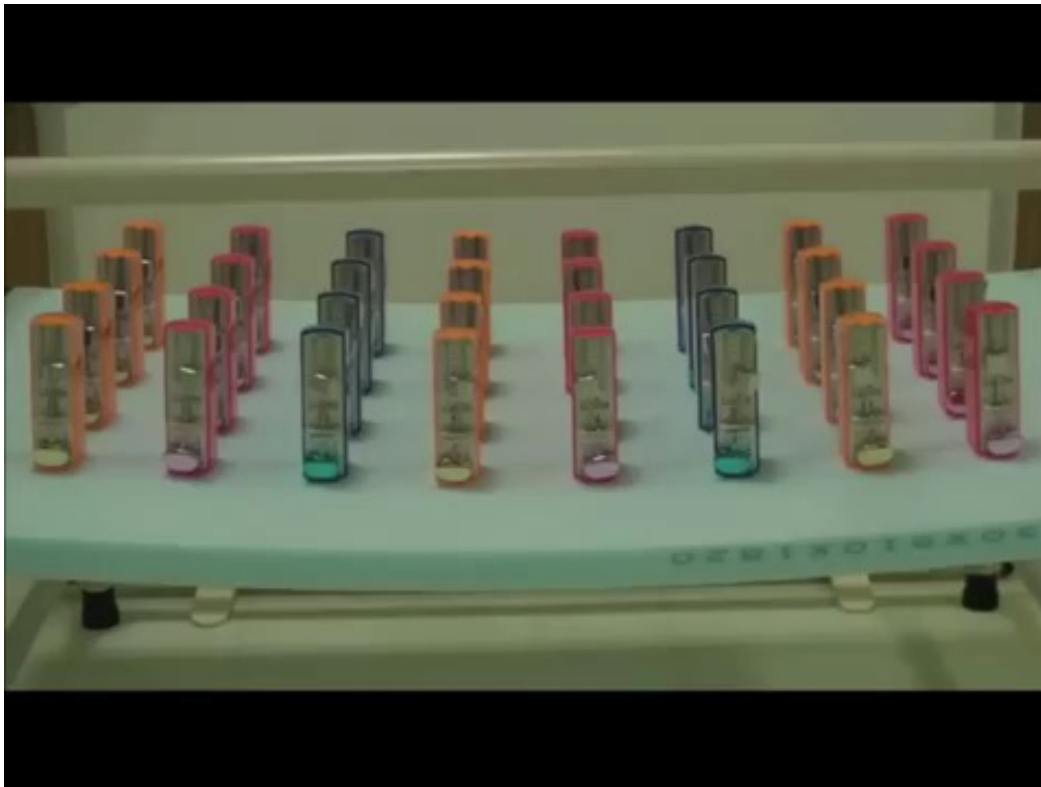
⇒ très grand nombres d'oscillateurs couplés



Huygens découvre en 1665 que deux horloges placées côte à côte se synchronisent. Les balanciers bougent en phase.

9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

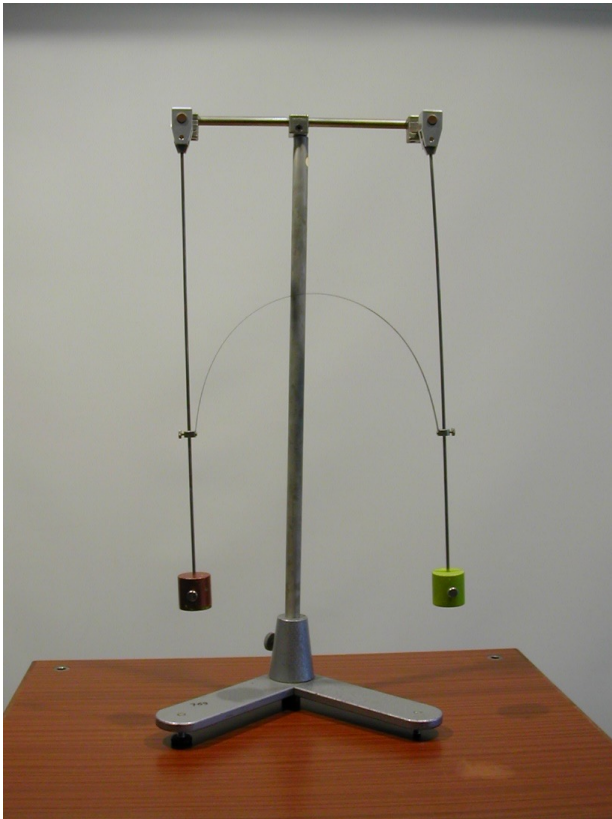
■ Synchronisation d'oscillateurs couplés



Un concert nocturne de lucioles (© Robin Meier)

9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

Application des oscillateurs couplés : amortissement d'un oscillateur



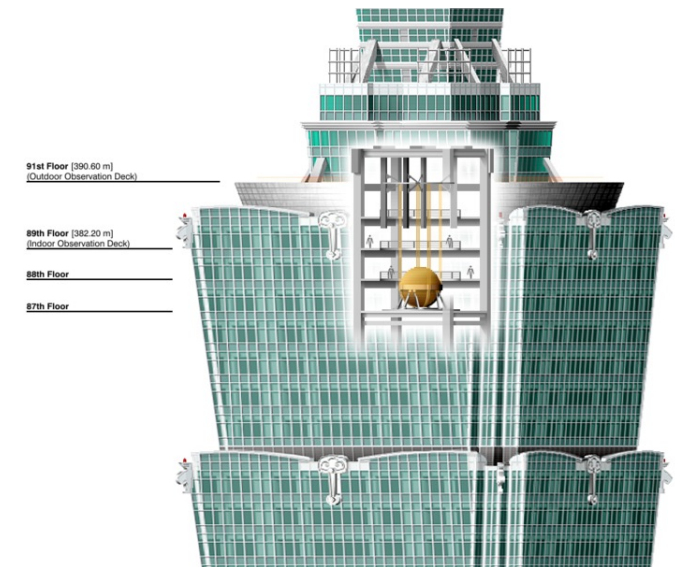
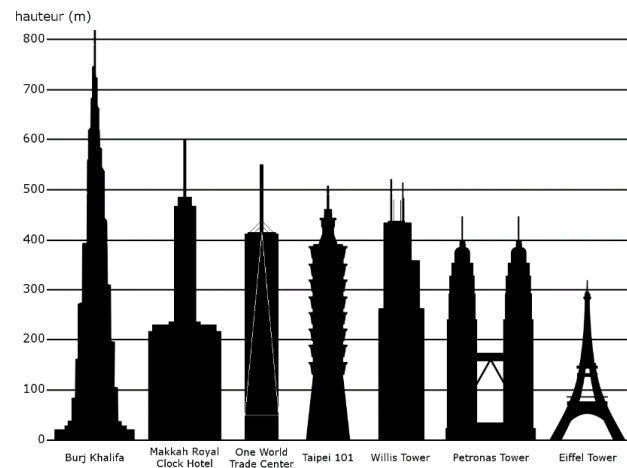
9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

Application des oscillateurs couplés : amortissement d'un oscillateur

La tour Taipei 101 (Taiwan)



Une tour est un oscillateur 509 m de hauteur

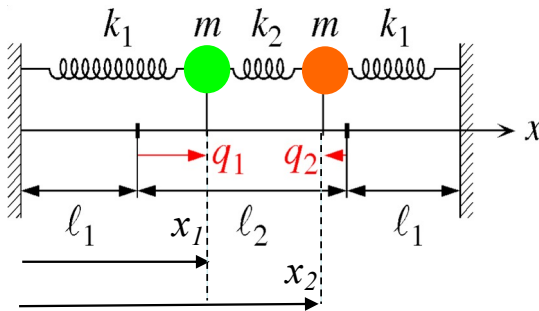


La tour est un oscillateur qui a une fréquence propre. Sous l'effet d'une onde se propageant dans le sol et provoquée par un tremblement de Terre, l'amplitude des mouvements de la tour peut être amplifiée (oscillateur forcé). Un deuxième oscillateur est alors placé au sommet de la tour (un pendule d'environ 700 tonnes). Celui-ci est couplé à la tour de telle sorte que les mouvements de cette dernière sont transférés au pendule. Les oscillations du pendule sont ensuite amorties par des vérins hydrauliques (dissipation de l'énergie).



9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

■ Cas de 3 ressorts et 2 masses identiques



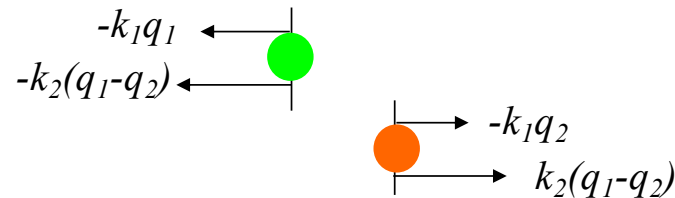
$$q_1 = x_1 - l_1$$

$$q_2 = x_2 - l_2 - l_1$$

$l_1, l_2 + l_1$ sont les positions d'équilibre

q_1 et q_2 sont les écarts par rapport aux positions d'équilibre

Bilan des forces



2nd loi de Newton

$$\bullet \quad m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = m \frac{d^2 q_1}{dt^2} = -k_1 q_1 - k_2 (q_1 - q_2)$$

$$\bullet \quad m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = m \frac{d^2 q_2}{dt^2} = -k_1 q_2 + k_2 (q_1 - q_2)$$

*2 équations de mouvement
qui couplent les 2 masses*

9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

■ Cas de 3 ressorts et 2 masses identiques

Equations du mouvement des deux masses

$$\left. \begin{array}{l} \text{●} \quad m\ddot{q}_1 + (k_1 + k_2)q_1 - k_2q_2 = 0 \\ \text{●} \quad m\ddot{q}_2 - k_2q_1 + (k_1 + k_2)q_2 = 0 \end{array} \right\} \text{ces équations sont couplées } (q_1 \text{ et } q_2 \text{ dans chaque équation})$$

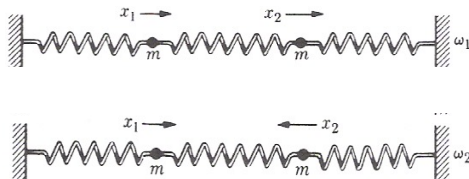
Forme générale des solutions des modes propres (mouvement particulier des 2 masses):

$$q_1 = C_1 \cos(\omega t + \varphi), \quad q_2 = C_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

Rem: ω et φ ne sont pas connues. Nous savons seulement que les solutions doivent s'écrire sous la forme $\cos(\omega t + \varphi)$. Il faudra donc les déterminer.

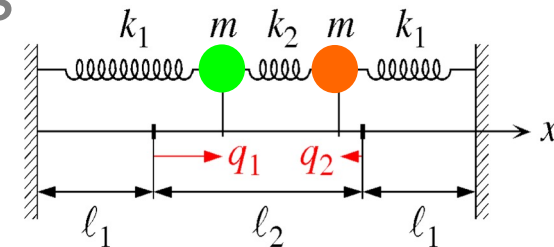
Modes propres :

Ressorts couplés

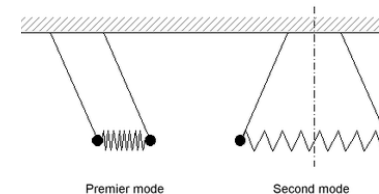


mouvement en phase

mouvement en opposition de phase



Pendules couplés



9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

■ Cas de 3 ressorts et 2 masses identiques

On injecte $q_1 = C_1 \cos(\omega t + \varphi)$, $q_2 = C_2 \cos(\omega t + \varphi)$

dans

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 + (k_1 + k_2)q_1 - k_2q_2 &= 0 && \bullet \\ m\ddot{q}_2 - k_2q_1 + (k_1 + k_2)q_2 &= 0 && \bullet \end{aligned}$$

et nous trouvons deux équations couplées:

$$\begin{aligned} \bullet & (-m\omega^2 + k_1 + k_2)C_1 - k_2C_2 = 0 \\ \bullet & -k_2C_1 + (-m\omega^2 + k_1 + k_2)C_2 = 0 \end{aligned}$$

Les constantes C_1 et C_2 dépendent des conditions initiales

Nous cherchons ici à déterminer les solutions de la pulsation ω

9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

$$\begin{aligned}
 &(-m\omega^2 + k_1 + k_2)C_1 - k_2C_2 = 0 \\
 &-k_2C_1 + (-m\omega^2 + k_1 + k_2)C_2 = 0
 \end{aligned}
 \quad \text{sous forme} \quad
 \underbrace{\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}}_D
 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

matricielle

Ce système d'équations admet une infinité de solutions si le déterminant D de la matrice est nul

$$\det D = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} = 0$$

soit
$$(-m\omega^2 + k_1 + k_2)^2 - k_2^2 = 0$$

Equation caractéristique qui détermine ω

Nous avons finalement deux solutions pour ω

$$i) -m\omega^2 + k_1 + k_2 = +k_2 \Leftrightarrow \omega_+ = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$$

$$ii) -m\omega^2 + k_1 + k_2 = -k_2 \Leftrightarrow \omega_- = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}$$

Rem: $\omega_+ < \omega_-$

9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

- **Mode propre « acoustique » ω_+** $\omega_+ = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ le ressort central (k_2) est *inactif*

$$q_1(t) = q_2(t) = C_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+)$$



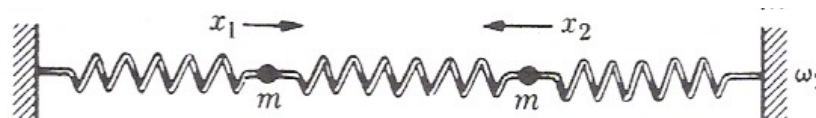
Les masses se déplacent en phase

- **Mode propre « optique » ω_-** $\omega_- = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}$

$$q_1(t) = -q_2(t)$$

$$q_1(t) = C_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)$$

$$q_2(t) = -C_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)$$



Masses en opposition de phase

9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

■ Cas général

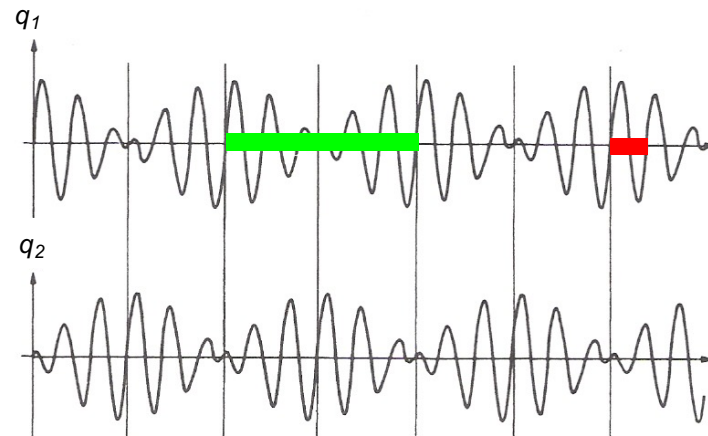
Le mouvement dépend des conditions initiales à $t=0$ et peut être compliqué. Néanmoins, il sera toujours une combinaison linéaire des deux solutions particulières, appelées modes propres.

$$\begin{aligned} q_1(t) &= C_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + C_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \\ q_2(t) &= C_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) - C_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \end{aligned}$$

■ Cas particulier

Amplitudes égales ($C_+ = C_- = C$) et phases initiales nulles ($\varphi_+ = \varphi_- = 0$)

$$\begin{aligned} q_1(t) &= C (\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)) \\ \Rightarrow q_1(t) &= 2C \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)t\right) \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-)t\right) \\ q_2(t) &= C (\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)) \\ \Rightarrow q_2(t) &= -2C \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)t\right) \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-)t\right) \end{aligned}$$



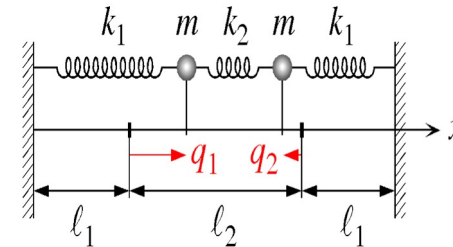
La modulation de l'amplitude est en opposition de phase

$\Rightarrow$ transfert d'énergie

9.8. Oscillateurs harmoniques couplés

■ Energie mécanique du système

Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$



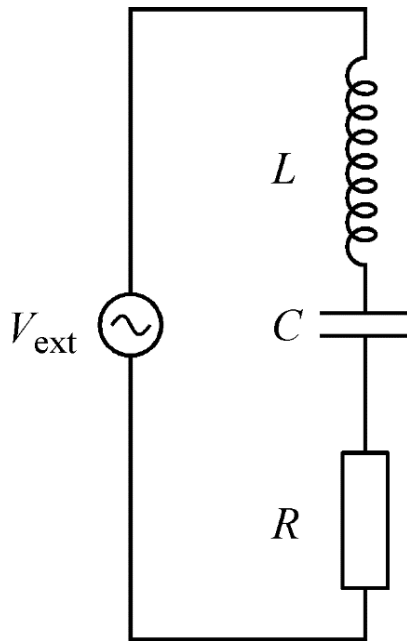
Energie potentielle :
$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2}k_1q_1^2 + \frac{1}{2}k_1q_2^2 + \frac{1}{2}k_2(q_1 - q_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}k_1q_1^2 + \frac{1}{2}k_1q_2^2 + \frac{1}{2}k_2q_1^2 + \frac{1}{2}k_2q_2^2 - k_2q_1q_2 \\ &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2)q_1^2 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)q_2^2 - k_2q_1q_2 \end{aligned}$$

Finalemt, l'énergie totale s'écrit

$$E = E_c + E_p = \underbrace{\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)q_1^2}_{\text{Energie masse 1}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)q_2^2}_{\text{Energie masse 2}} - \underbrace{k_2q_1q_2}_{\substack{\text{Energie de} \\ \text{couplage} \\ \text{(interaction)}}$$

9.7. Analogie entre oscillateurs mécanique et électrique

On considère un circuit RLC soumis à une tension alternative $V_{\text{ext}}(t) = V_0 \sin \Omega t$



Tension aux bornes de la bobine* : $V_L = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d^2Q}{dt^2}$

Tension aux bornes du condensateur : $V_C = \frac{Q}{C}$

Tension aux bornes de la résistance : $V_R = RI = R \frac{dQ}{dt}$

Loi des mailles : $V_{\text{ext}} = V_L + V_R + V_C$

$$\text{Soit } L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \sin \Omega t$$

$$\text{Ou encore } \frac{d^2Q}{dt^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\lambda} \frac{dQ}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} Q = \left(\frac{V_0}{L}\right) \sin \Omega t$$

Analogie avec $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \cos(\Omega t)$

* bobine est parfaitement inductive (résistance nulle)

9.7. Analogie entre oscillateurs mécanique et électrique

Equation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti :

$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

Oscillateur générique	RLC	Masse soumise à un ressort
z	$q = \text{charge électrique}$	$x = \text{déplacement}$
$\dot{z}$	$\dot{q} = i = \text{intensité}$	$\dot{x} = \text{vitesse}$
$\ddot{z}$	$\ddot{q} = \frac{di}{dt}$	$\ddot{x} = \text{accélération}$
β	$L = \text{inductance propre}$	$m = \text{masse du mobile}$
ρ	$R = \text{résistance}$	$\alpha = \text{coef de frottement}$
γ	$\frac{1}{C} = \text{inverse de la capacité}$	$k = \text{constante de raideur}$
$T = 2\pi\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} = \text{période propre}$	$T = 2\pi\sqrt{LC} = \text{période propre}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \text{période propre}$
f	$U = RI : \text{effet Joule}$	$f = \alpha\dot{x} : \text{force de frottement}$