

Week 13

12. Applications du solide indéformable

12.2. Mise en rotation d'un solide

12.3. Moment d'inertie : exemples et applications

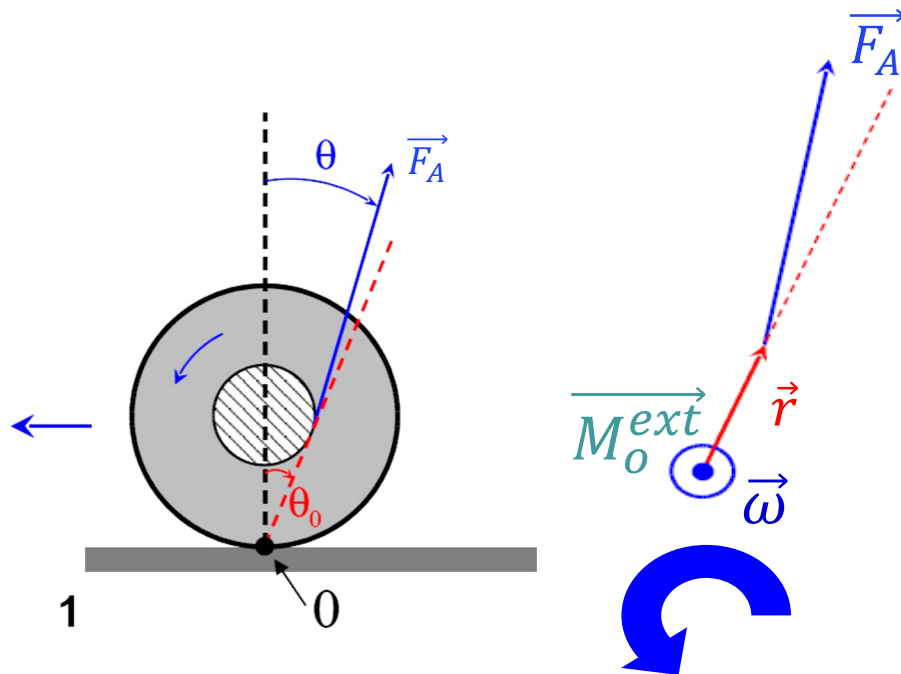
12.4 Stabilité gyroscopique



12.2. Mise en rotation d'un solide

■ Exemple 5 : mise en rotation de bobine

Bobine **1**, cas 1

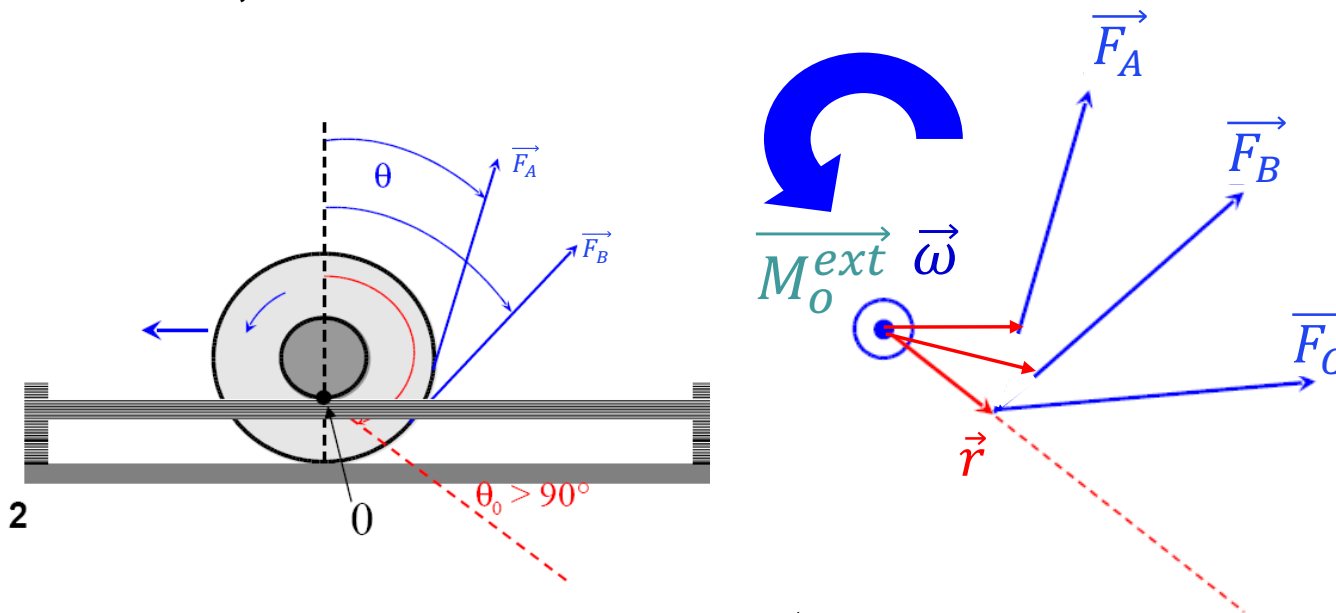


$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{O,ext}$$

12.2. Mise en rotation d'un solide

■ Exemple 5 : mise en rotation de bobine

Bobine **2**, cas 1 et 2

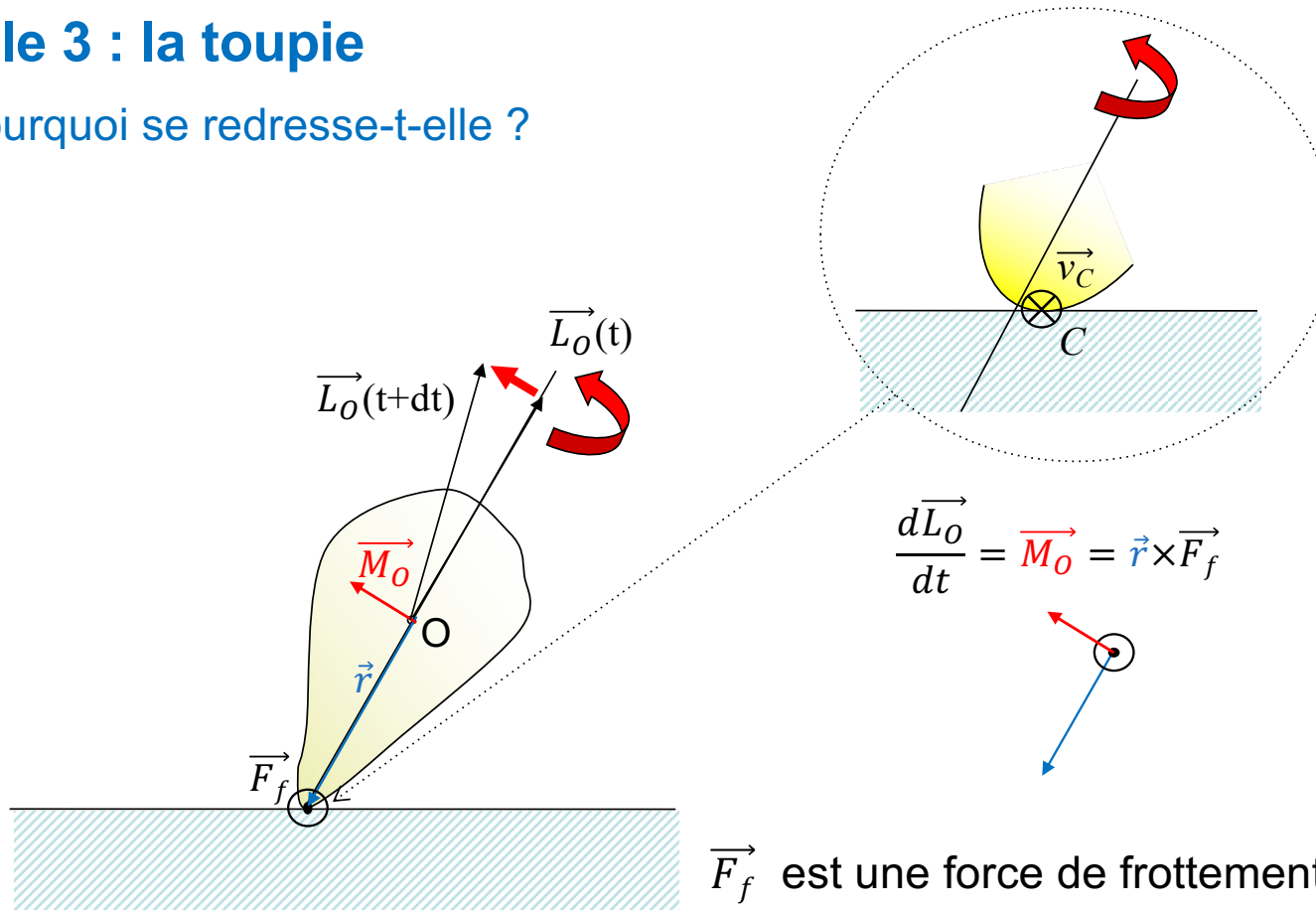


$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{O,ext}$$

12.4. Stabilité gyroscopique

■ Exemple 3 : la toupie

Pourquoi se redresse-t-elle ?



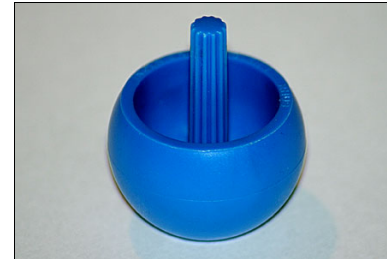
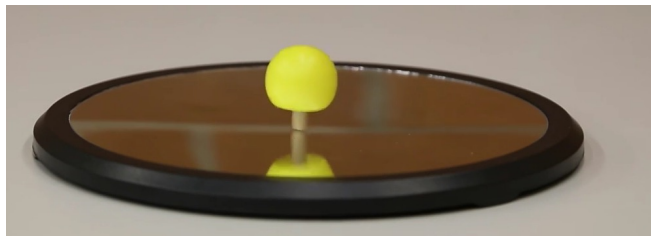
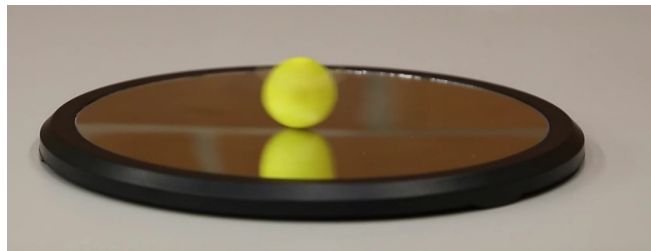
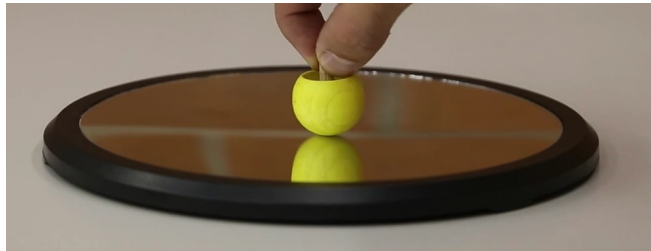
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}_f$$

$\vec{F}_f$ est une force de frottement au point de contact C qui s'oppose à la rotation et qui crée un moment responsable du redressement de la toupie

12.4. Exemples

■ Exemple 4 : La toupie « inversée »

La répartition des masses, la rotation, et les forces de frottements peuvent entraîner des phénomènes étonnants



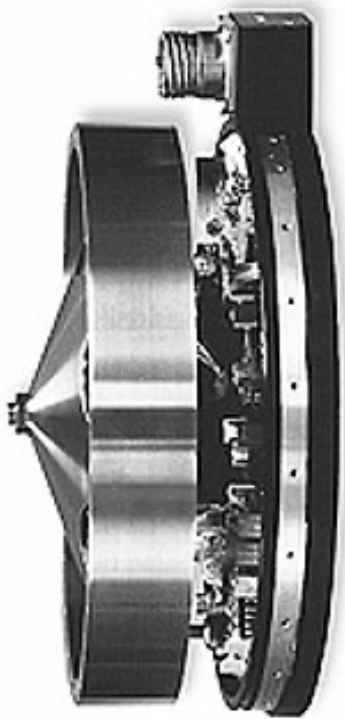
Les Prix Nobel Wolfgang Pauli and Niels Bohr jouant avec une de ces toupies lors de l'ouverture du nouvel Institut de Physique de Lund en Suède le 31 mai 1951

Credit: Erik Gustafson, courtoisie de AIP Emilio Segre Visual Archives, Margrethe Bohr Collection <http://photos.aip.org>

12.4. Exemples

■ Roue de réaction (Reaction Wheel) pour satellite

Une roue de réaction permet de contrôler la rotation d'un satellite en orbite

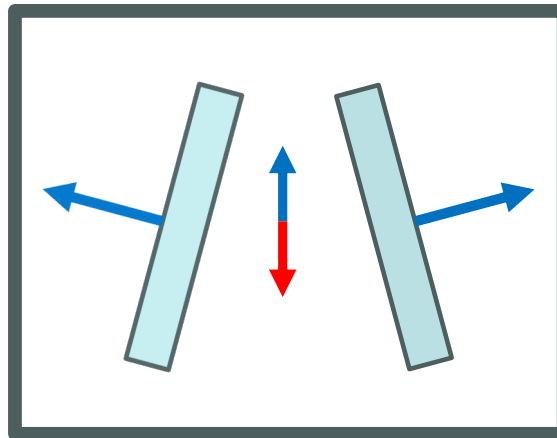
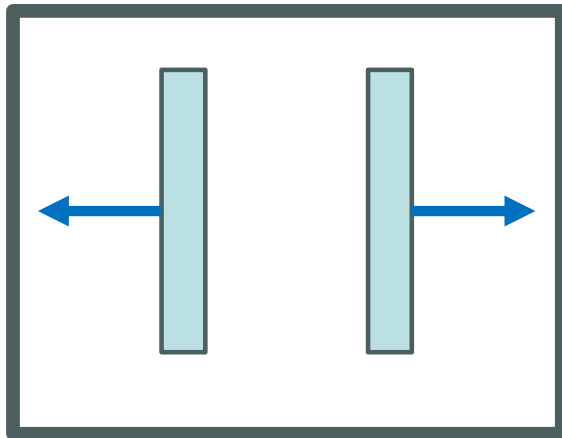


$$L = cst = I_{sat}\omega_{sat} + I_{RW}\omega_{RW}$$

12.4. Exemples

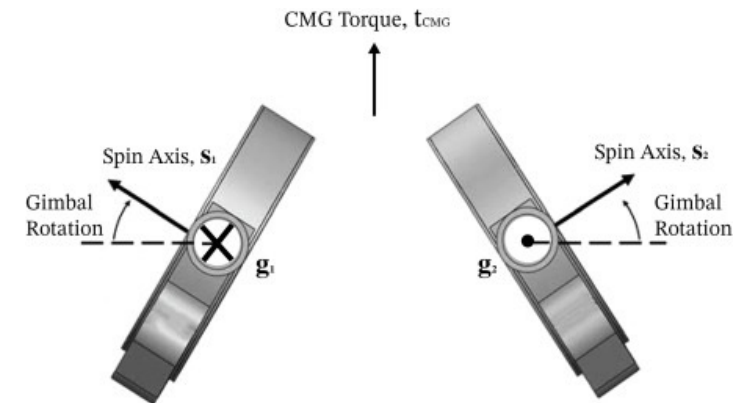
■ Rotation d'un satellite avec 2 gyroscopes

On peut contrôler la rotation d'un satellite en orbite en utilisant 2 gyroscopes tournant en direction opposée



$$L = 0 = I_{wheel}\omega - I_{wheel}\omega$$

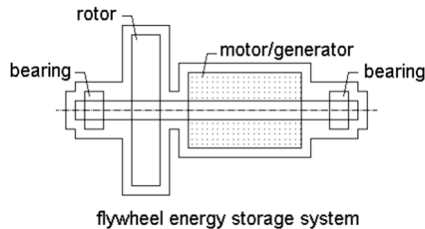
Rotation du
satellite



12.3. Moment d'inertie: exemples et applications

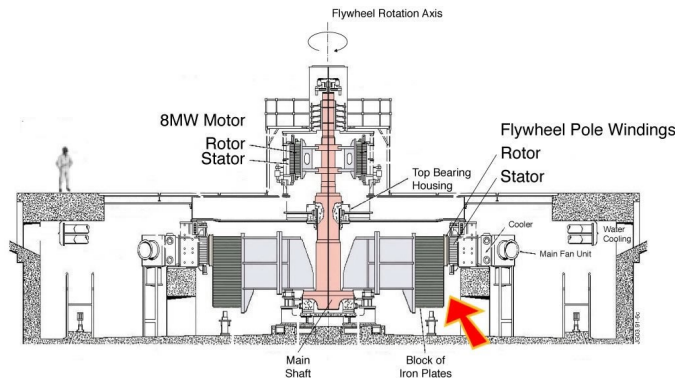
■ Application : stockage de l'énergie

Il est possible de stocker une quantité d'énergie considérable dans un corps solide en rotation



Soit un cylindre de rayon 1,5 m, de longueur 2 m, et de masse volumique $\rho = 10^4 \text{ kg/m}^3$. (acier = 8000, plomb = 11300 kg/m^3)
et qui ralentit de 5000 t/min à 3000 t/min en 1 minute

La puissance générée est de 232 MW (Ville de Lausanne 100-250 MW)



Roue d'inertie « **flying wheel** » utilisée au réacteur de fusion européen JET (UK) pour amorcer le plasma
⇒ très grande puissance électrique fournie (450 MW) en couplant la roue à un générateur électrique (fournissant 15 MW)

La roue fait 9 m de diamètre et sa masse est de 775 t

Moment d'inertie: 13,5 million kg.m^2

12.3. Moment d'inertie: exemples et applications

■ Application : stockage de l' énergie

Kinetic Energy Recovery System (KERS)

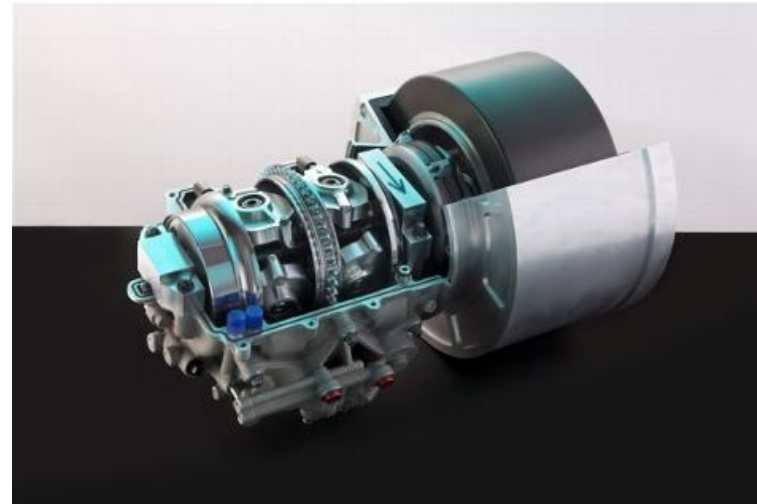
Autorisé sur les voitures de course F1



$\omega = 80\,000$ tour/minute

Energie stockée max = 400 kJ

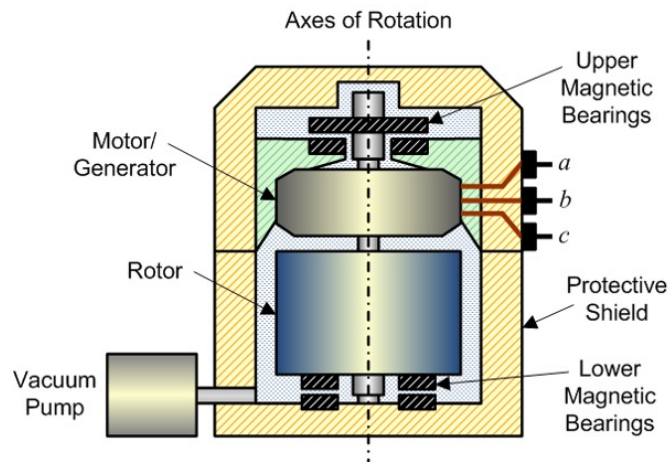
Puissance max = 60 kW



Source: Flybrid Automotive Limited

12.3. Moment d'inertie: exemples et applications

■ Application: stockage de l'énergie (solaire/vent ...)



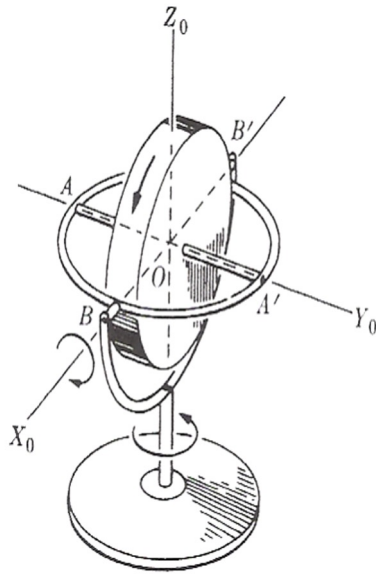
satellite



station de stockage

12.4. Stabilité gyroscopique

■ Le gyroscope



Principe : un disque tourne très vite autour d'un axe (OY_0). Celui-ci est mobile autour des axes OX_0 et OZ_0

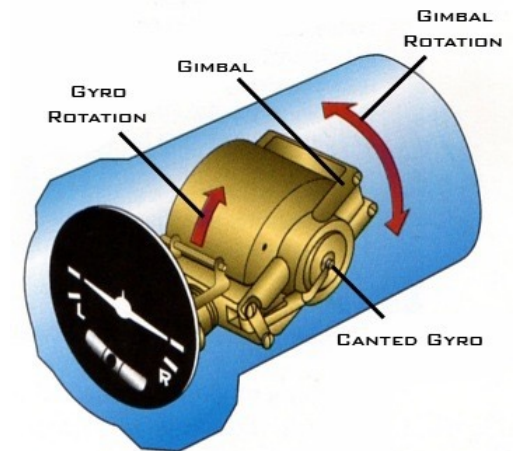
Observation : si l'on déplace le gyroscope, l'axe OY_0 est toujours dirigé dans la même direction



Conséquence de la conservation du moment cinétique $\vec{L}$

Applications :

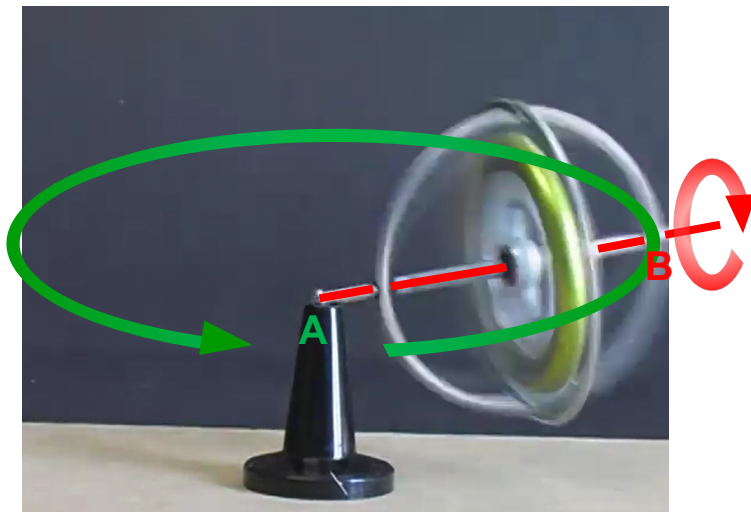
Les principales applications du gyroscope concernent le guidage (bateaux, avions, sous-marins) et l'horizon artificiel dans les avions



12.4. Stabilité gyroscopique

■ Etude de la stabilité gyroscopique

A) Description phénoménologique



Le disque du gyroscope est mis en rotation autour de son axe (en rouge) puis une des extrémités de cet axe est posée sur un support en A (on considère que les frottements sont négligeables en A).

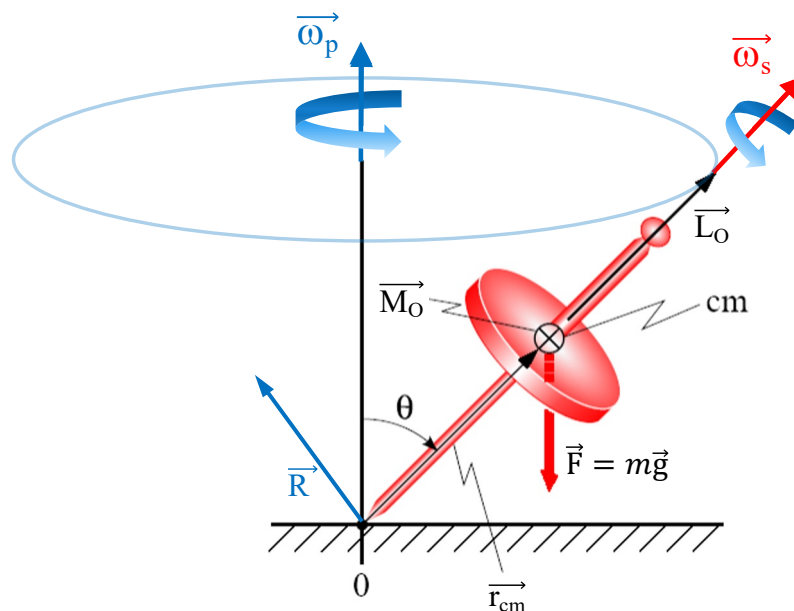
Lorsque le gyroscope est lâché, l'axe de rotation du gyroscope se met à tourner autour du point A. L'extrémité B de l'axe de rotation décrit une trajectoire circulaire (courbe verte). C'est un mouvement de précession.

Remarque : si la rotation du disque du gyroscope est dans l'autre sens alors le point B suit la trajectoire verte dans le sens opposé

12.4. Stabilité gyroscopique

■ Etude de la stabilité gyroscopique

B) Analyse du mouvement



$\vec{\omega}_s$: **vitesse angulaire du gyroscope** tournant sur lui-même

$\vec{\omega}_p$: vitesse angulaire de la rotation de l'axe du gyroscope autour de l'axe vertical (**mouvement de précession**)

cm : centre de masse

$\vec{F}$: le poids (force extérieure) dont le point d'application est le centre de masse cm

$\vec{R}$: réaction (force extérieure) au point de contact en O

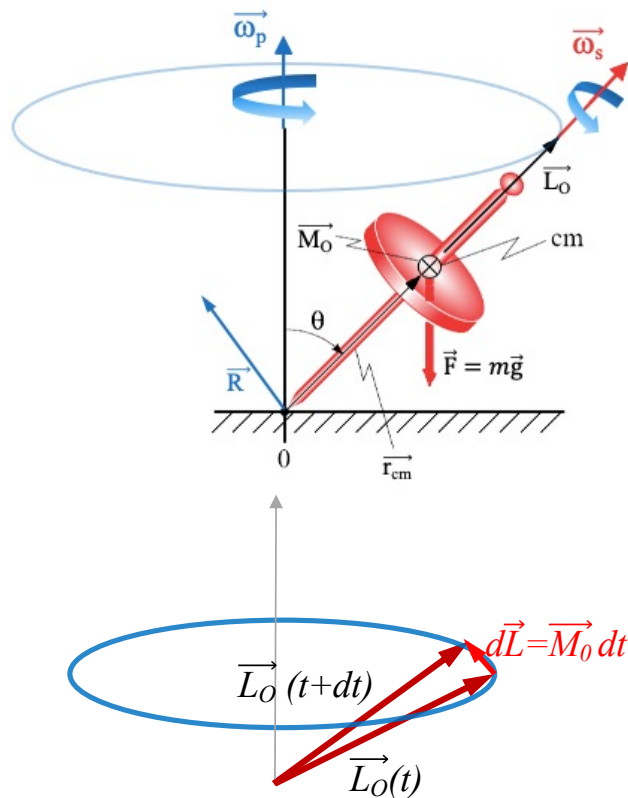
$\vec{M}_O$: moment de la force $\vec{F}$ appliqué au cm du gyroscope ($\vec{M}_O = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}$)

$\vec{L}_O$: moment cinétique par rapport au point de contact ($\vec{L}_O = I \vec{\omega}_s$) avec I moment d'inertie

12.4. Stabilité gyroscopique

■ Le gyroscope: étude de la stabilité gyroscopique

B) Analyse du mouvement



1) Mise en évidence du mouvement de précession

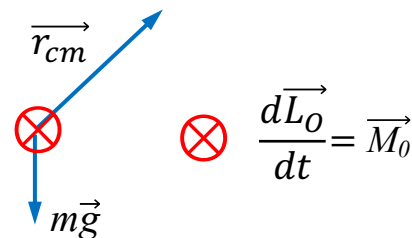
Théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{r}_{cm,i} \times \vec{F}_{ext,i} = \sum_i \vec{M}_O(F_{ext,i})$$

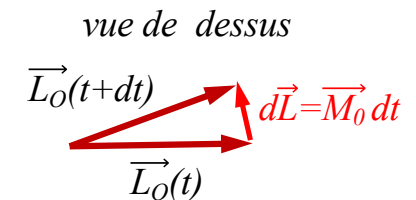
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r}_{cm} \times m\vec{g} + \underbrace{\vec{0} \times \vec{R}}_0 = \vec{M}_0$$

Calcul du produit vectoriel

$$\vec{r}_{cm} \times m\vec{g}$$



La direction du moment cinétique change selon $\vec{M}_0$

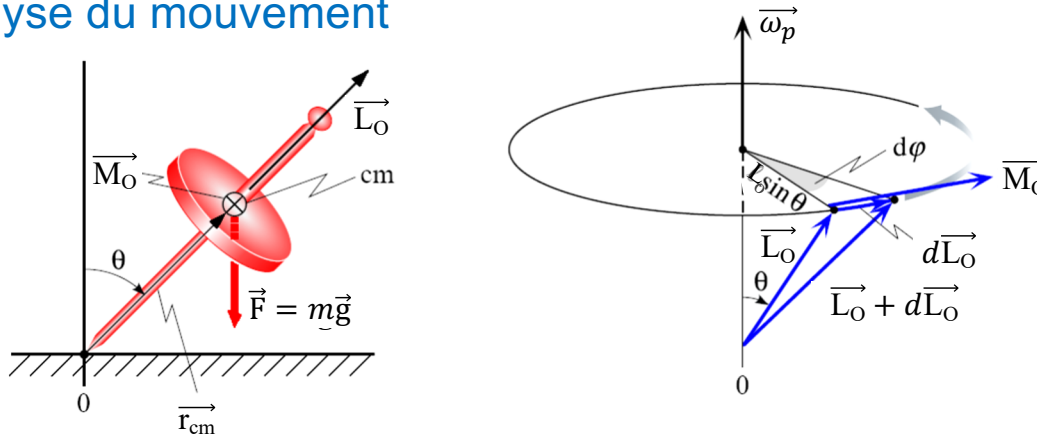


Le moment cinétique change de direction : il effectue un mouvement de précession autour de l'axe vertical passant par O

12.4. Stabilité gyroscopique

■ Etude de la stabilité gyroscopique

B) Analyse du mouvement



$$\tan d\phi \approx d\phi = \frac{dL_o}{L_o \sin \theta}$$

2) Calcul de la vitesse angulaire de précession ω_p

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{L}_o}{dt} \quad \vec{M}_o = \vec{r}_{cm} \times \vec{F} \quad \Rightarrow \quad M_o = r_{cm} F \sin \theta = r_{cm} mg \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \omega_p &= \frac{d\phi}{dt} = \frac{dL_o / L_o \sin \theta}{dt} = \frac{dL_o}{dt} \frac{1}{L_o \sin \theta} = \frac{M_o}{L_o \sin \theta} \\ &= \frac{r_{cm} F \sin \theta}{L_o \sin \theta} = \frac{r_{cm} F}{I \omega_s} = \frac{r_{cm} mg}{I \omega_s} \end{aligned}$$

Vitesse angulaire de précession est Indépendant de θ !

12.4. Stabilité gyroscopique

■ Etude de la stabilité gyroscopique

C) Propriétés



L'axe de rotation du gyroscope présente un **mouvement de précession** avec une **vitesse angulaire ω_p**

Pour qu'un **gyroscope** soit utile, il faut que le mouvement de précession soit très lent, c'est à dire que ω_p **soit très petit**.

La vitesse angulaire de la précession est donnée par

$$\omega_p = \frac{r_{cm}mg}{I\omega_s}$$

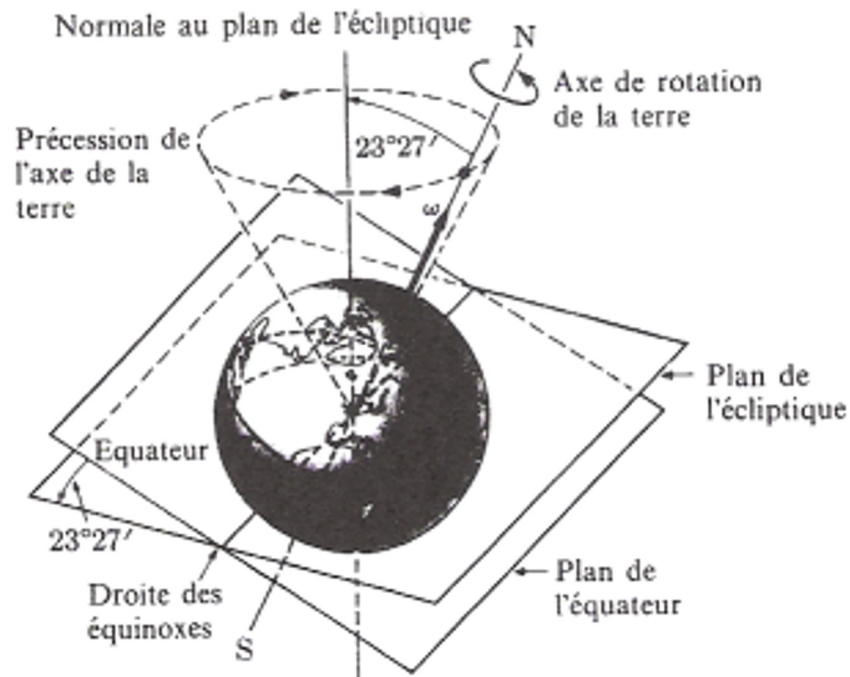
Pour avoir ω_p très petit, il faut

r_{cm}	<i>petit</i>
I	<i>grand</i>
ω_s	<i>très élevée</i>

*Compas gyroscopique dans les bateaux et avions:
 $\omega_s = 6.000$ à 24.000 tours/min et $\omega_p < 0.02^\circ/\text{jour}$*

12.4. Stabilité gyroscopique

■ Un «gyroscope » géant : la Terre



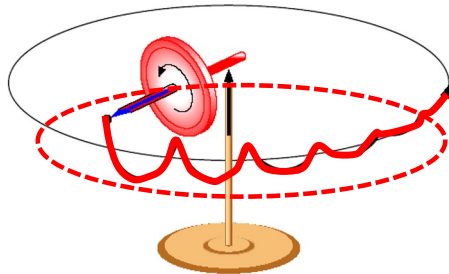
Période ($2\pi/\omega_p$): 25 770 années

La précession de la Terre (ou "précession des équinoxes") est semblable au phénomène observé pour le gyroscope. C'est un effet induit par les forces de gravitation du soleil et de la lune qui s'exercent sur la Terre.

12.4. Stabilité gyroscopique

■ Phénomène de nutation

Nous avons vu que lorsqu'on lâche un gyroscope dont l'axe de rotation repose sur un support, il se met à effectuer un mouvement de précession. Nous pouvons aussi observer de petites oscillations de l'extrémité de l'axe de rotation pendant le mouvement de précession. C'est le phénomène de nutation.



à $t=0$ l'axe de rotation est maintenu à l'horizontale
 $\Rightarrow$ la projection de $\vec{L}$ sur Oz est nulle ($L_z = 0$)

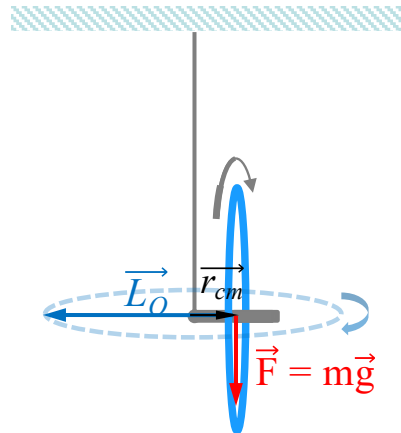
Quand on lâche la roue, l'axe s'incline vers le bas
sous l'effet du poids $\Rightarrow L_z < 0$

La conservation du moment cinétique impose une
composante verticale $L_p > 0$ telle que $L_z + L_p = 0$

$\Rightarrow$ Oscillation de l'axe autour de l'inclinaison initiale : c'est la **nutation**

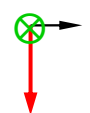
12.4. Stabilité gyroscopique

■ Exemple 1 : roue de vélo attachée à un fil



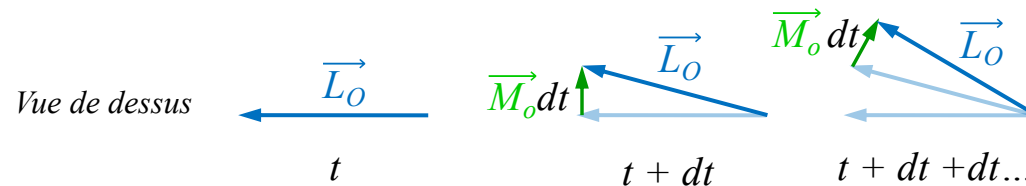
Le poids crée un moment de force sur l'axe de rotation. On définit r_{cm} entre le point d'attache et le centre de masse de la roue (qui est sur l'axe de rotation).

On peut appliquer le théorème du moment cinétique (on doit faire attention au sens de rotation de la roue pour bien orienter $\vec{L}_O$) :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r}_{cm} \times \vec{F} = \vec{M}_O$$


Le moment cinétique varie comme le moment de force.

A l'instant t , nous avons le moment cinétique $\vec{L}_O$. A l'instant $t + dt$, nous avons $\vec{L}_O + d\vec{L}_O$ avec $d\vec{L}_O = \vec{M}_O dt$. Le moment cinétique change donc de direction:



Le moment cinétique tourne. Comme $\vec{L}$ est selon l'axe de rotation de la roue, la roue tourne également.

12.4. Stabilité gyroscopique

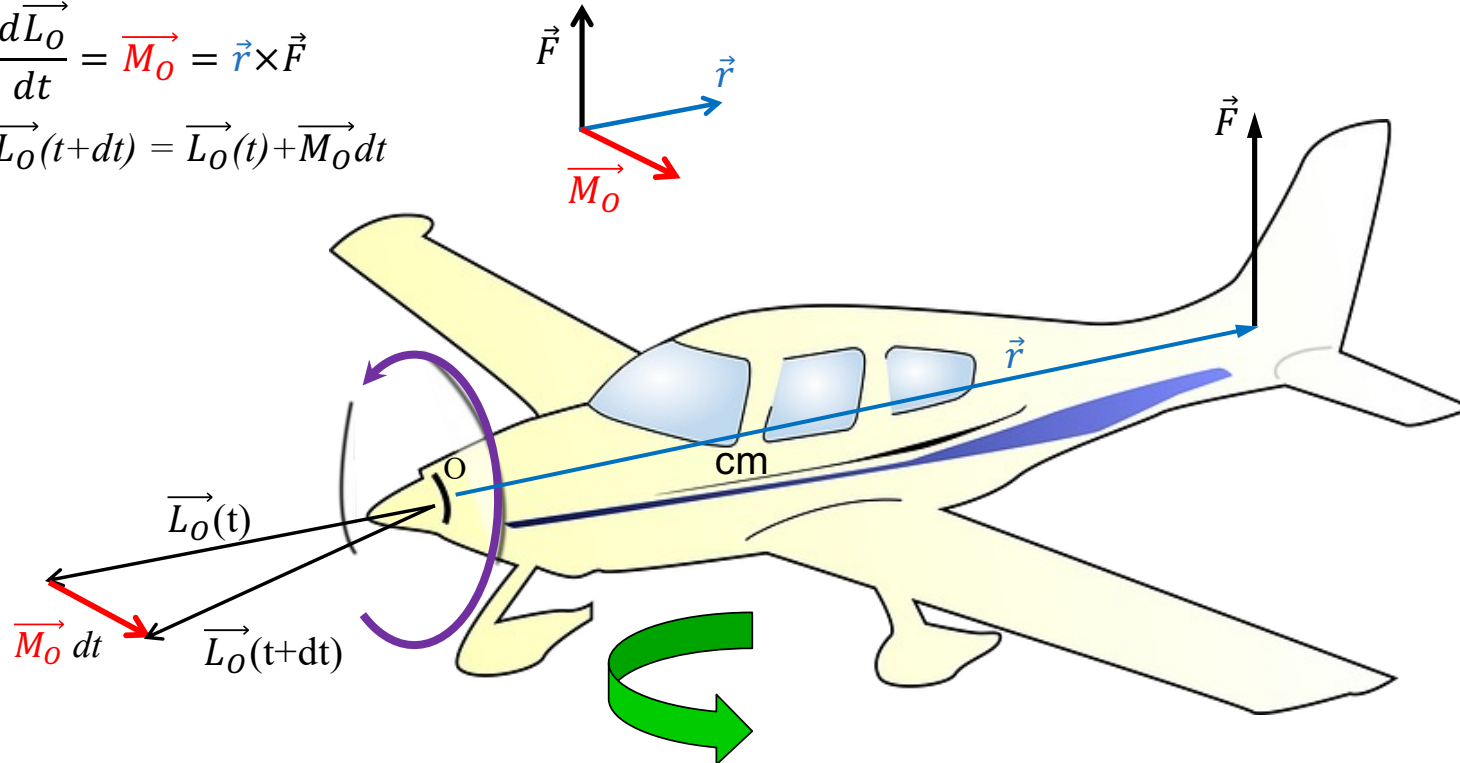
■ Exemple 2 : l'avion à hélice

Un avion à hélice que le pilote fait descendre. Vue du pilote, l'hélice tourne dans le sens des aiguilles d'une montre (sens direct) [~ 2500 tours/minutes]

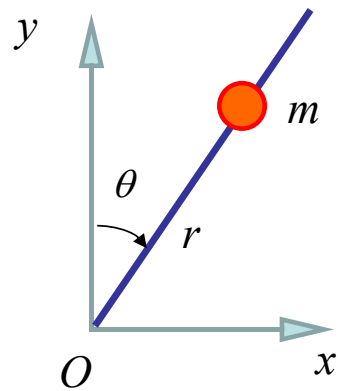
Observation : l'avion vire à gauche lorsque l'on veut descendre

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{L}_O(t+dt) = \vec{L}_O(t) + \vec{M}_O dt$$

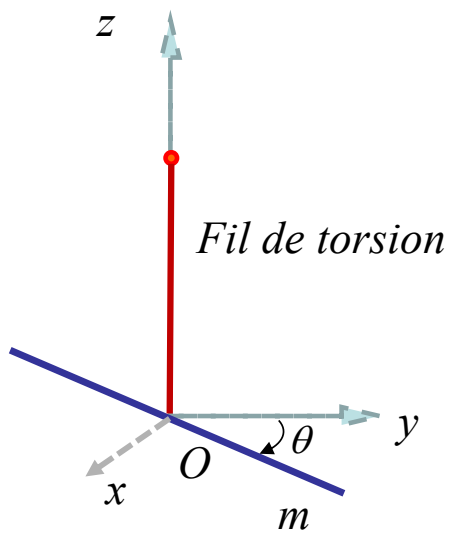


■ Exemple 1 : tige + masse qui tombe depuis la verticale:



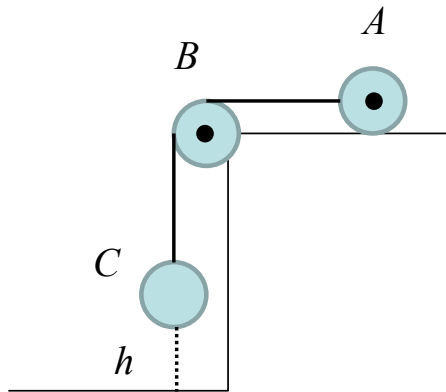
- Théorème du moment cinétique
- Calcul de la variation de la vitesse angulaire
- Bilan énergétique
- Cas d'une tige de masse nulle
- Cas d'une tige de masse non nulle

■ Exemple 2 : barre suspendue avec un fil de torsion



- Torsion du fil, couple de rappel: $-k\theta$
- Théorème du moment cinétique
- $I = mL^2/12$
- Oscillation

■ Exemple 3 : cylindres



- 3 cylindres de masse m :
 - A: roule et tourne
 - B: tourne
 - C: descend
- Vitesse quand C touche le sol?
- Accélération de C ?
- 2 cas:
 - a) cylindre plein: $I = mR^2/2$
 - b) cylindre creux: $I = mR^2$