

Week 3 - Lois de Newton

3. Lois de Newton

3.1. Quantité de mouvement : 1^{ère} loi de Newton

3.2. Conservation de la quantité de mouvement : 2nd loi de Newton

3.3. Action-réaction : 3^{ème} loi de Newton

3.4. 2nd loi de Newton dans un référentiel non-galiléen

3.5. $\mathcal{R}'$ en translation non-uniforme

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

3. Lois de Newton

Avant Newton : Physique d'Aristote



Aristote :
384 av.JC – 322 Av. JC

Quelle est l'origine du Mouvement?

On applique une force $\Rightarrow$ un objet bouge

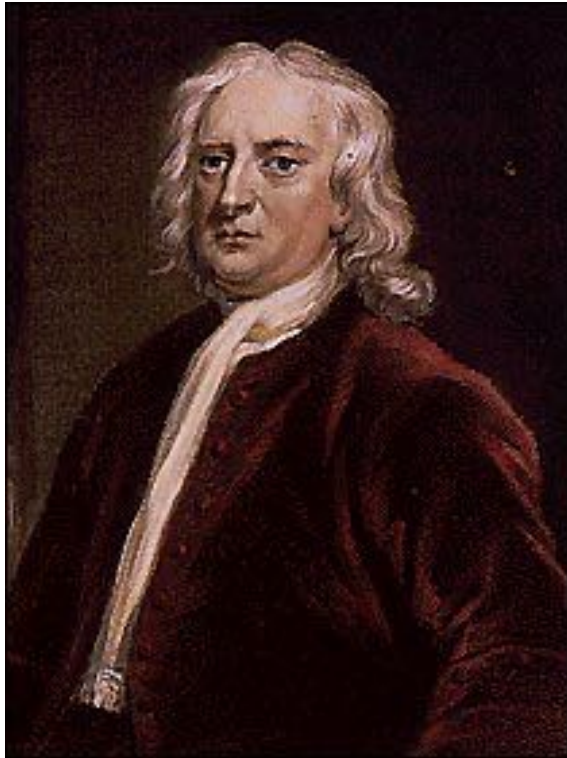
Force constante $\Rightarrow$ vitesse constante !

Un objet "lourd" tombe pour rejoindre son état au repos

3. Lois de Newton

- Cause(s) du mouvements $\Rightarrow$ **dynamique**

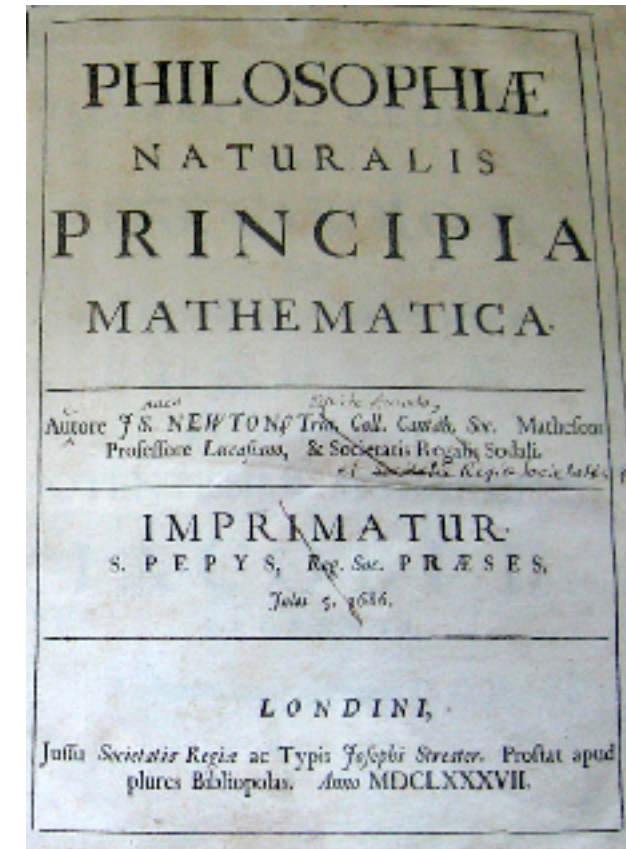
L Relation entre forces (interactions) et masse



Newton (1642 - 1727)

"Philosophiae naturalis principia mathematica", paru en 1687, contient:

- l'énoncé de la loi de la gravitation universelle
- et celui des trois fameuses lois de Newton.



3.1. Quantité de mouvement : 1^{ère} loi de Newton

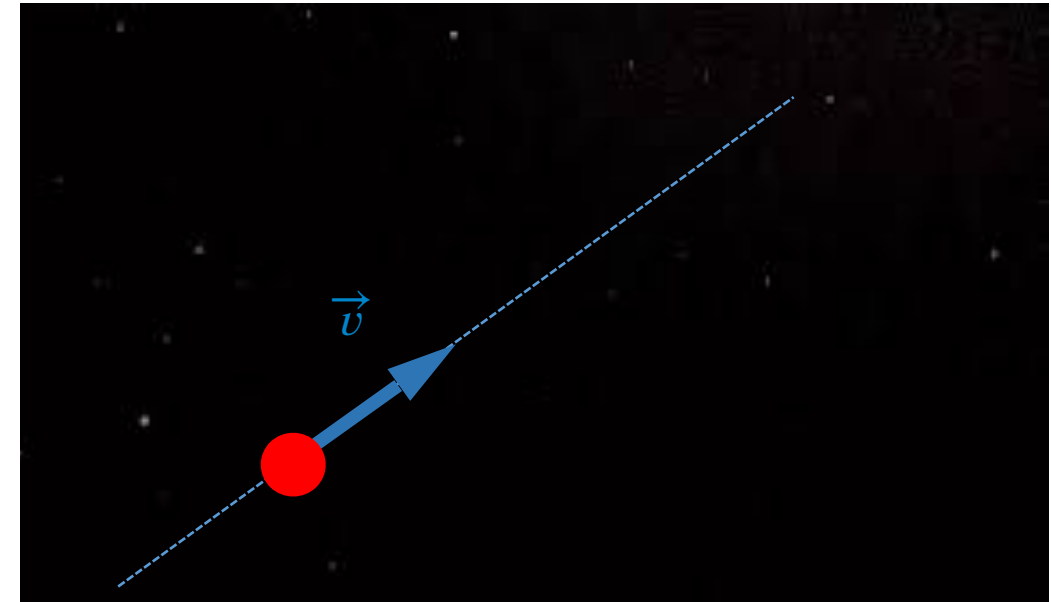
Particule libre $\Rightarrow$ Aucune interaction

■ 1^{ère} loi de Newton

Dans un référentiel galiléen, une particule libre possède toujours un vecteur vitesse constant (accélération nulle)

Deux cas possibles :

- mouvement rectiligne uniforme
- immobile



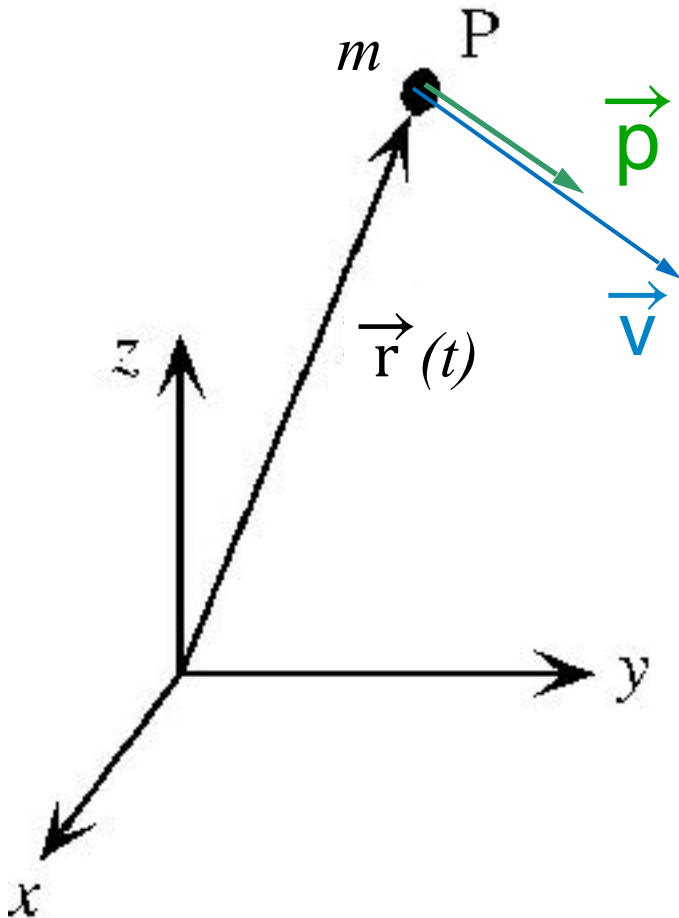
3.1. Quantité de mouvement : 1^{ère} loi de Newton

Un objet de masse m qui se déplace est caractérisé par sa quantité de mouvement :

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

*c'est une grandeur **vectorielle**, **extensive***

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$



■ 1^{ère} loi de Newton (ou loi d'inertie):

Un corps conserve un mouvement rectiligne et uniforme si aucune force extérieure n'agit sur lui ou si la résultante des forces est nulle

$$m \vec{v} = \vec{p} = \text{constante} \quad \text{si} \quad \Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

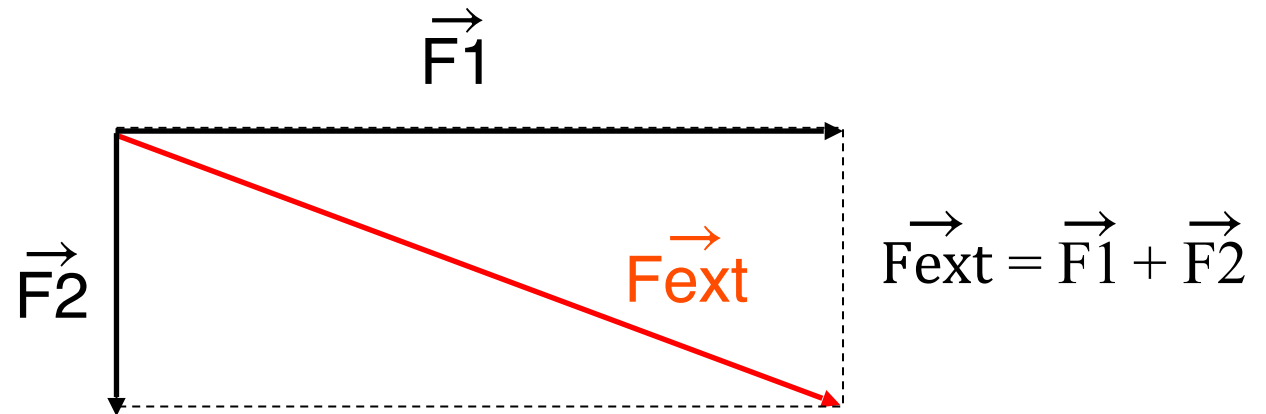
Attention : ceci n'est vrai que dans un référentiel galiléen (appelé aussi référentiel inertiel)

3.1. Quantité de mouvement : 1^{ère} loi de Newton

Notion de force

- Une **force** correspond à une **interaction** s'exerçant sur un objet.
- **Exemple:** l'attraction terrestre (force de gravitation) ou la répulsion électrostatique (force électromagnétique).
- Une **force** s'exprime sous la forme d'un vecteur: *direction, sens, intensité*.
- Lorsque plusieurs forces agissent sur un objet, celles-ci s'additionnent pour donner une seule force appelée résultante des forces externes (extérieures): $\vec{F}_{ext}$
- L'unité de force est le Newton [N] $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Résultante des forces : $\vec{F}_{ext} = \sum_i \vec{F}_i$



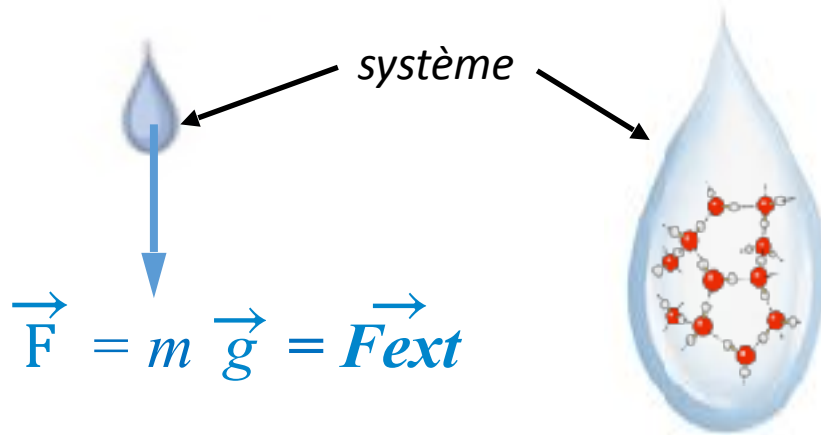
3.1. Quantité de mouvement : 1^{ère} loi de Newton

Force externe/Force interne

- Pour définir une force externe, il faut définir ce qu'est un **système**.
- **Système** = ensemble d'objets qui sont en interaction à travers des **forces dites internes**.
- Toute **force dont l'origine est extérieure au système** est alors une **force dite externe**.

Exemple : une goutte de pluie

Le système est la "goutte de pluie"



les forces d'interaction entre les molécules d'eau sont des forces internes au système "goutte de pluie"

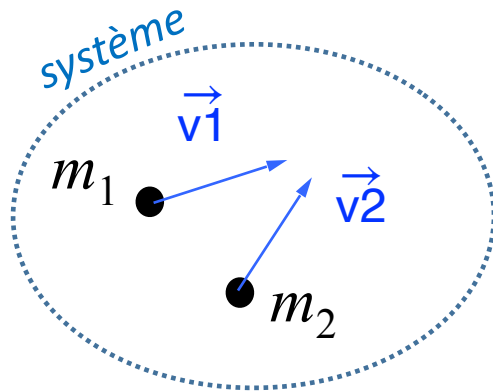
La force de gravitation est une force externe au système "goutte de pluie"

3.1 Quantité de mouvement : 1^{ère} loi de Newton

Quantité de mouvement d'un système de particules

La quantité de mouvement totale d'un système de plusieurs particules est la somme des quantités de mouvement de chaque particule.

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots = \sum_i \vec{p}_i$$



$$\begin{aligned}\vec{p}_1 &= m_1 \vec{v}_1 \\ \vec{p}_2 &= m_2 \vec{v}_2\end{aligned}$$



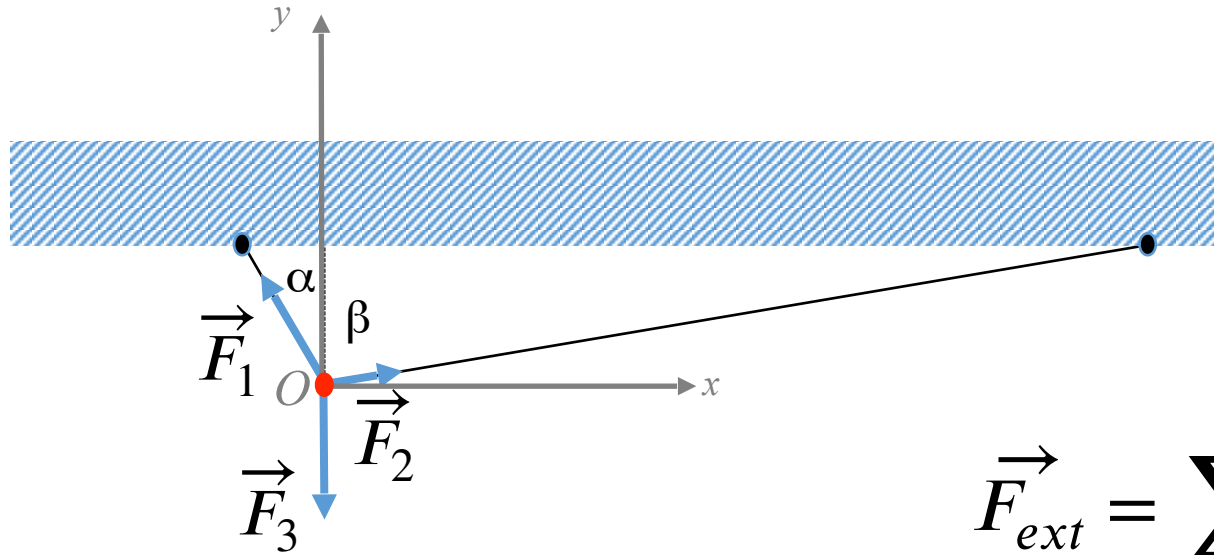
$$\vec{p}_{\text{tot}} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

Quantité de mouvement
totale du système constitué
des deux particules

3.1. Quantité de mouvement : 1^{ère} loi de Newton

Exemple de force

Composantes de $\vec{F}_{ext}$ obtenues par projection :



- Identification du système
- Choix référentiel
- Choix repère orthonormé direct
- Dessin
- Projection des forces
- Liste des conditions initiales
- On résout

$$\vec{F}_{ext} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

Cas d'un objet suspendu par 2 fils

On projette sur Ox et Oy :

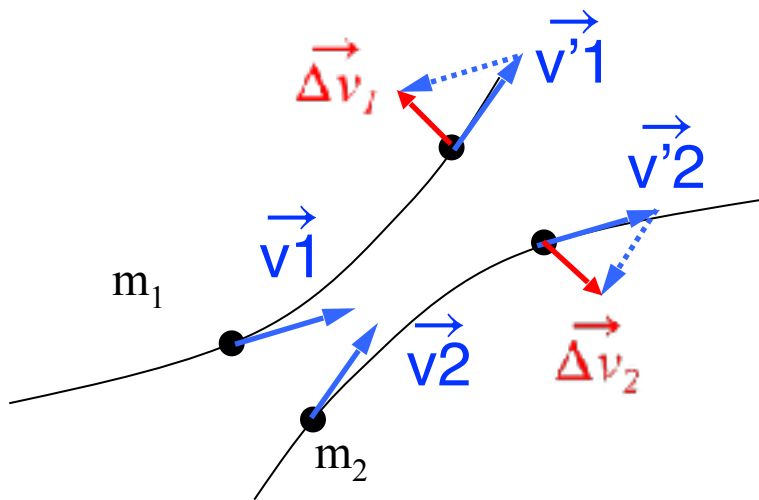
$$Ox: F_{ext,x} = -F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta + 0$$

$$Oy: F_{ext,y} = F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta - F_3$$

3.2. Conservation de la quantité de mvt : 2nd loi de Newton

Conservation de la quantité de mouvement

Interaction entre deux objets de masse m_1 et m_2



Variation de la vitesse (vectorielle) de chacun des objets :

$$\vec{\Delta v}_1 = \vec{v}'_1 - \vec{v}_1 \quad \vec{\Delta v}_2 = \vec{v}'_2 - \vec{v}_2$$

On a la relation suivante (conservation de la qté de mouvement):

$$m_1 \vec{\Delta v}_1 + m_2 \vec{\Delta v}_2 = \vec{0}$$

*interaction entre deux particules
(choc élastique par exemple)*

3.2. Conservation de la quantité de mvt : 2nd loi de Newton

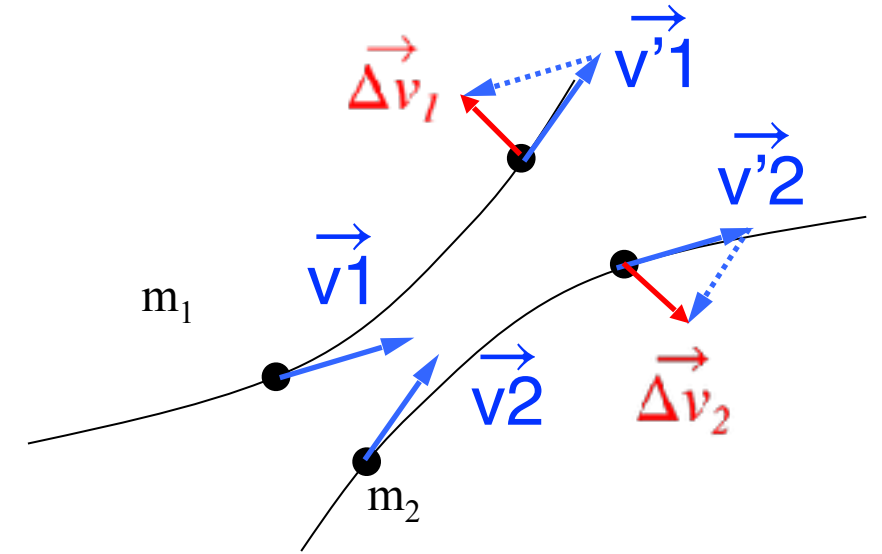
Conservation de la quantité de mouvement

$$\vec{\Delta p}_1 = \vec{p}'_1 - \vec{p}_1 \quad \vec{\Delta p}_2 = \vec{p}'_2 - \vec{p}_2$$

$$\vec{\Delta p}_2 = - \vec{\Delta p}_1$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

quantité de MVT à t = quantité de MVT à t '



La quantité de mouvement totale d'un système de plusieurs particules soumises à leurs seules interactions mutuelles (forces internes) est **constante**

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots = \sum \vec{p}_i = \text{cte}$$

⇒ **conservation de la quantité de mouvement**

3.2. Conservation de la quantité de mvt : 2nd loi de Newton

■ 2^{ème} loi de Newton

La dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la résultante des **forces extérieures** qui agissent sur ce point:

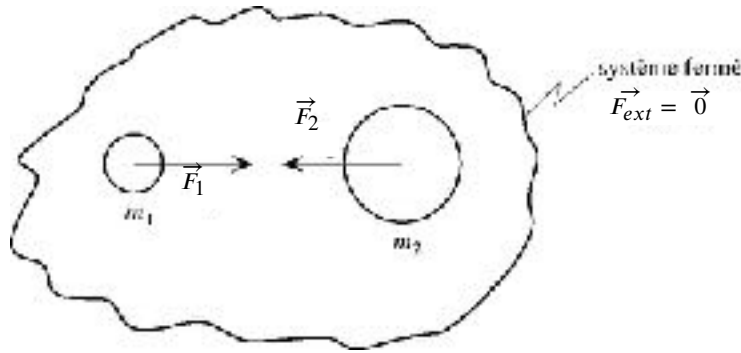
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = \sum_i \vec{F}_{ext,i} = \vec{F}_{ext} \quad (\text{fin XVII}^{\text{ème}})$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow m\vec{a} = \vec{F}_{ext}$$

Uniquement si m est constante

3.3. Action-réaction : 3^{ème} loi de Newton

■ 3^{ème} loi de Newton



L'action est toujours **égale** et **opposée** à la réaction



Les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et de directions opposées

Démonstration de la 3^{ème} loi de Newton :

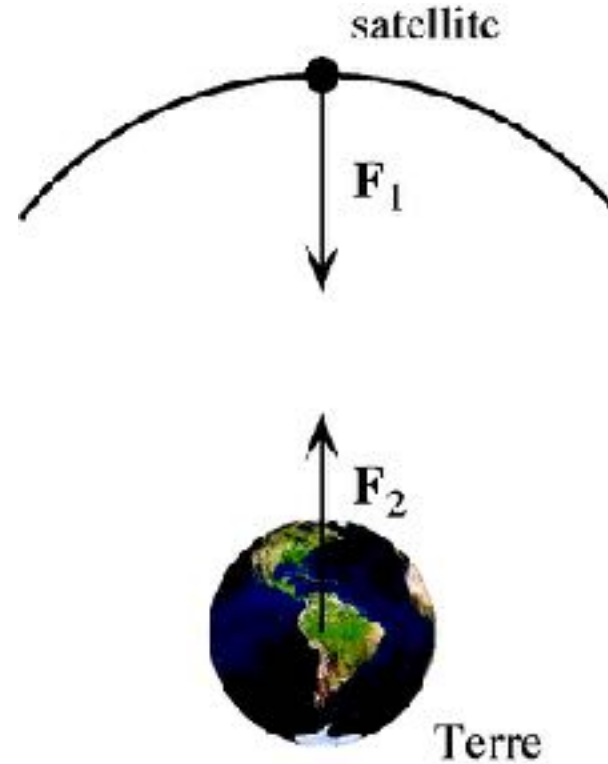
Soient 2 objets dans un système fermé et isolé tel que les forces extérieures sont nulles

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad (2^{\text{ème}} \text{ loi de Newton}) \text{ d'où } \mathbf{p} \text{ est constante}$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{cte} \text{ et } \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}_1}{dt} = - \frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad \text{soit } \boxed{\vec{F}_1 = - \vec{F}_2}$$

3.3. Action-réaction : 3^{ème} loi de Newton

- 3^{ème} loi de Newton : Exemple 1



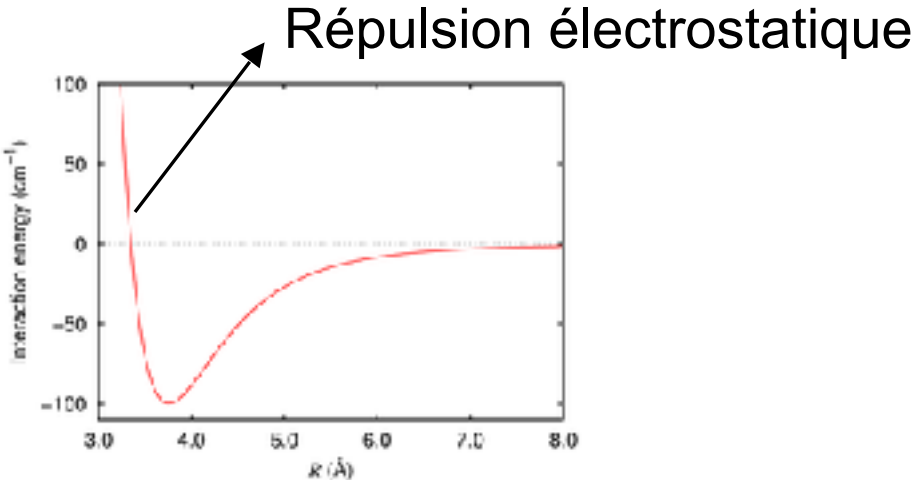
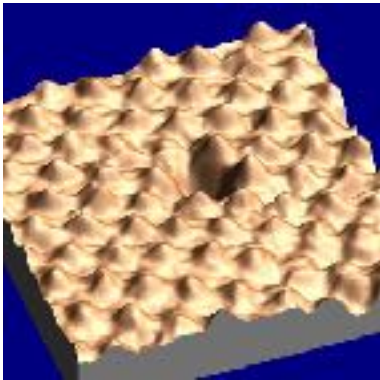
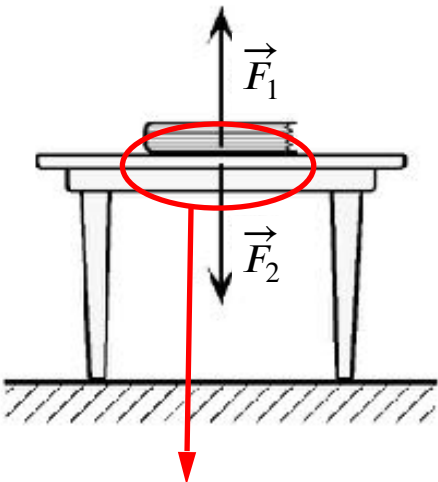
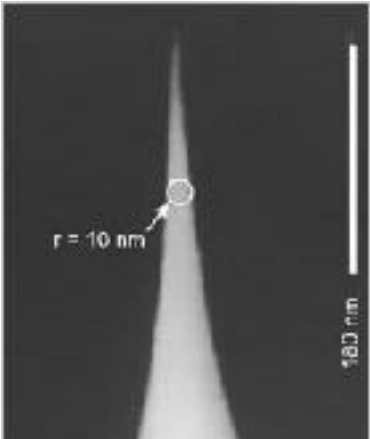
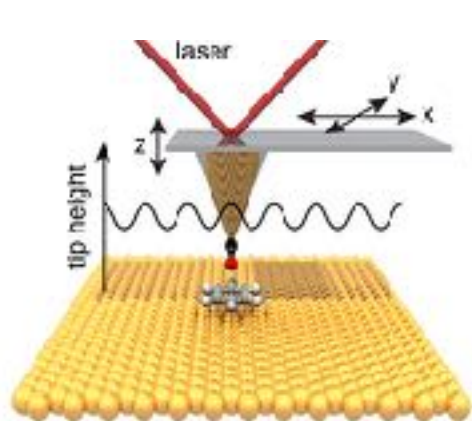
forces de gravitation entre
Terre et satellite

$$\vec{F}_1 = - \vec{F}_2$$

3.3. Action-réaction: 3^{ème} loi de Newton

■ 3^{ème} loi de Newton : Exemple 2

forces de « contact »



Energie d'interaction entre 2 atomes

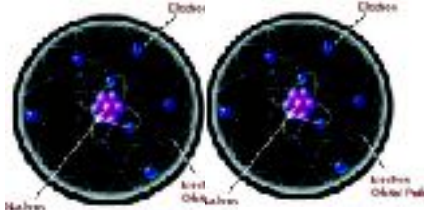


Image d'atomes en microscopie à force atomique (AFM)

Les atomes se repoussent (répulsion électrostatique des nuages électroniques)

Résumé des lois de Newton (dans référentiel galiléen)

- **1^{ère} loi de Newton** (ou loi d'inertie):

Un corps conserve un mouvement rectiligne uniforme si aucune force extérieure n'agit sur lui ou si la résultante des forces extérieures est nulle :

$$m \vec{v} = \vec{p} = \text{constante si } \Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

- **2^{ème} loi de Newton**

La dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la résultante des forces **extérieures** qui agissent sur ce point :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = \sum_i \vec{F}_{\text{ext},i} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

- **3^{ème} loi de Newton : Principe d'action – réaction**

L'action est toujours **égale** et **opposée** à la réaction

$$\vec{F}_1 = - \vec{F}_2$$

3.4. 2nd loi de Newton dans un référentiel non-galiléen

Accélération dans un repère fixe pour un point dans un référentiel en rotation constante

L'accélération d'un point dans $\mathcal{R}'$ vue de $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2 \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (\text{Cf. Week 2})$$

$\vec{a}$ est l'accélération dans le repère $\mathcal{R}$ qui est attaché à un référentiel galiléen
 $\vec{a}', \vec{v}', \vec{r}'$ sont les accélération, vitesse, et position de l'objet dans le repère $\mathcal{R}'$ en rotation

Un observateur sur la Terre est attaché à un référentiel en rotation et par conséquent non-galiléen.

L'étude du mouvement d'un objet se fait alors dans le repère $\mathcal{R}'$.

En revanche, la 2nd loi de Newton est valide seulement dans le repère $\mathcal{R}$ (Galiléen)

3.4. 2nd loi de Newton dans un référentiel non-galiléen

Accélération dans un repère fixe pour un point dans un référentiel en rotation constante

L'accélération dans $\mathcal{R}'$ s'écrit :

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}' - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

$$m \vec{a}' = m \vec{a} - m 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}' - m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

or $m \vec{a} = \sum_i \vec{F}_{ext,i}$ (2nd loi de Newton dans un référentiel galiléen)

et finalement

$$m \vec{a}' = \sum_i \vec{F}_{ext,i} - m 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}' - m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

3.4. 2nd loi de Newton dans un référentiel non-galiléen

On peut donc écrire l'équivalent de la 2nd loi de Newton dans $\mathcal{R}'$ en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$:

$$m\vec{a}' = \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{a}_{Cor} - m\vec{a}_{in}$$

$$\vec{a}_{in} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad \text{accélération d'inertie (entraînement/centrifuge)}$$

$$\vec{a}_{Cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad \text{accélération de Coriolis}$$



Gaspard-Gustave Coriolis
1792 – 1843

On peut écrire une loi de type $m\vec{a} = \sum \vec{F}$, avec la prise en compte de deux « forces fictives »

$$m\vec{a}' = \sum \vec{F}_{ext} + \underset{\text{Coriolis}}{\vec{F}_{Cor}} + \underset{\text{inertie}}{\vec{F}_{in}}$$

$$\begin{cases} \vec{F}_{Cor} = -m 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \\ \vec{F}_{in} = -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \end{cases}$$

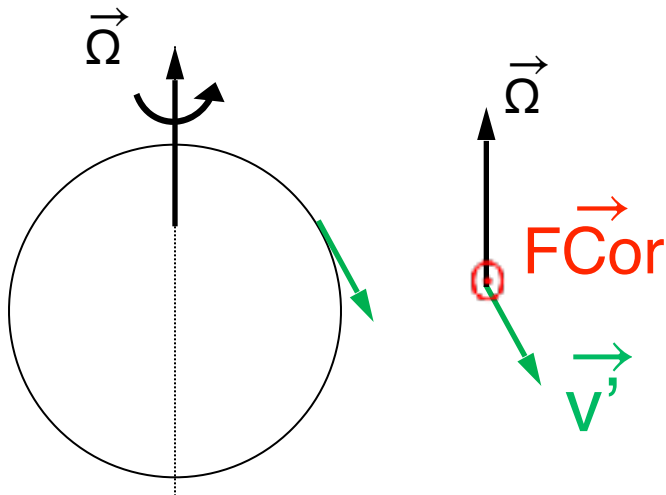


Remarque: la force d'inertie (d'entraînement ou centrifuge) et la force de Coriolis sont improprement appelées «force». Il est en revanche correct de parler d'accélération d'entraînement (d'inertie/centrifuge) et d'accélération de Coriolis, celles-ci découlant du mouvement de rotation du référentiel $\mathcal{R}'$ dans lequel se trouve l'observateur.

3.4. 2nd loi de Newton dans un référentiel non-galiléen

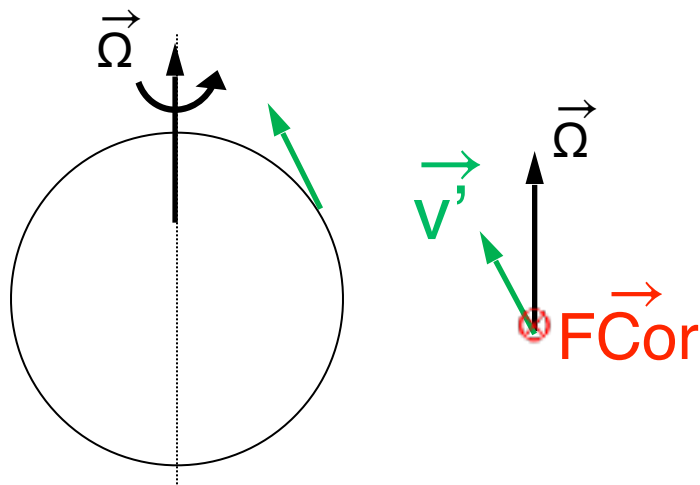
- La Terre est un référentiel en rotation (R') - $\vec{a}_{in} \neq \vec{0}$ et $\vec{\omega}_e \neq \vec{0}$

Lancé
vers le
Sud



$$\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}'$$

Lancé
vers le
Nord

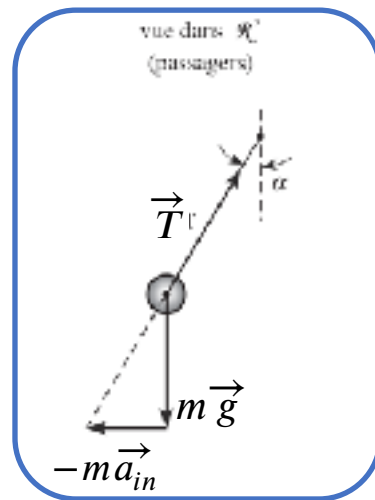
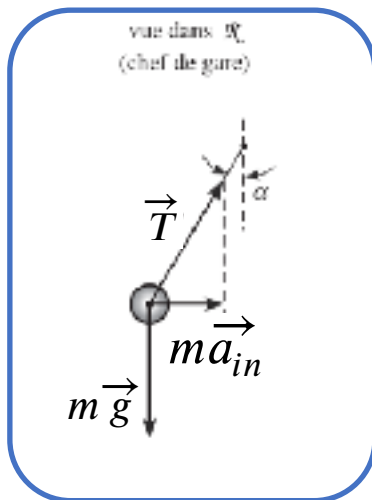
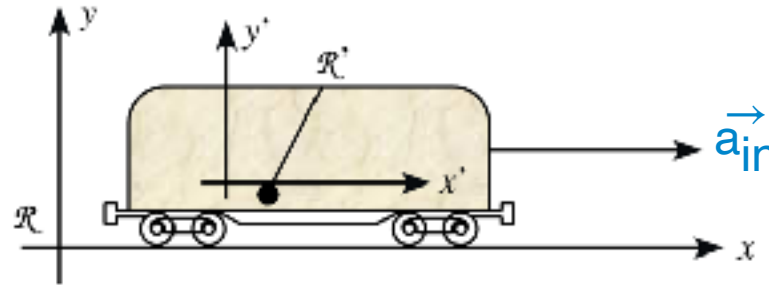


3.5. $\mathcal{R}'$ en translation non-uniforme

- $\vec{a}_{in} \neq \vec{0}$ et $\vec{\omega}_e = \vec{0}$

$$m\vec{a}' = \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{a}_{in}$$

Exemple : train accéléré sur un rail horizontal



Dans $\mathcal{R}$:

$$m\vec{a} = m\vec{a}_{in} = \vec{T} + m\vec{g}$$

Dans $\mathcal{R}'$ ($\vec{a}' = \vec{0}$):

$$m\vec{a}' = \vec{0} = \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a}_{in}$$

Week 3 - Balistique

4. Balistique - effet d'une force constante et uniforme

4.1. Chute libre

4.2. Mouvement balistique



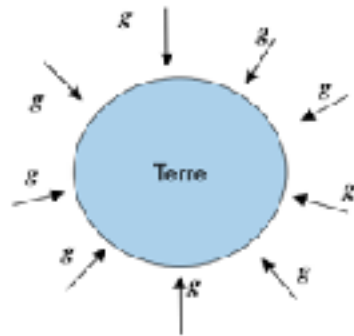
4.1. Chute libre

■ Force gravitationnelle

La Terre exerce sur un objet de masse m une force gravitationnelle, appelée communément le poids, dont la forme est

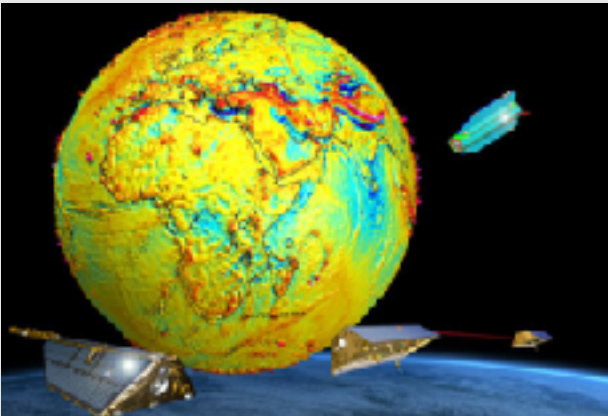
$$\vec{P} = m \vec{g}$$

$$\|\vec{g}\| = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$



$\vec{g}$ est dirigé vers le centre de la Terre

Note : à l'échelle du laboratoire $\vec{g}$ est perpendiculaire au sol (supposé plat) et de norme constante



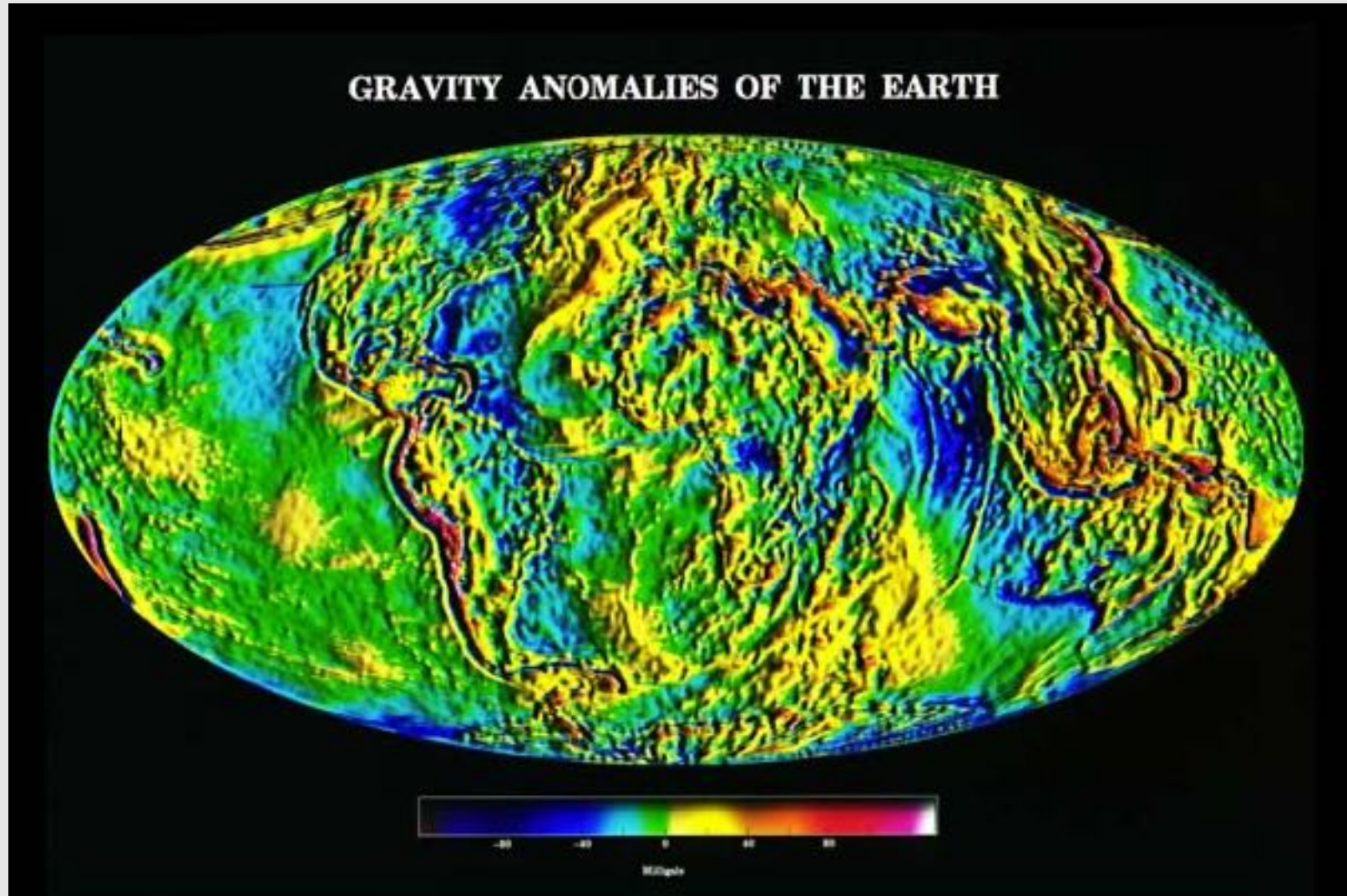
Information scientifique

La mesure de g se fait aujourd'hui grâce à des accéléromètres (ce sont des micro-systèmes) ultra-sensibles placés dans des satellites qui détectent leur changement de trajectoire. Ces micro-systèmes seraient capables de mesurer la force d'impact d'un flocon de neige ($0,2g$) tombant sur un pétrolier d'un million de tonnes!

4.1. Chute libre

Information scientifique

Variations de g à la surface de la Terre



4.1. Chute libre

■ Mouvement rectiligne : chute d'une balle (dans le vide)

Accélération :

2nd loi de Newton : $m \vec{a} = m \vec{g}$ et on projette sur Oz

$$a = \frac{d^2 z}{dt^2} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_z = -g \quad (= \text{constante})$$

Vitesse initiale $v(0) = 0$

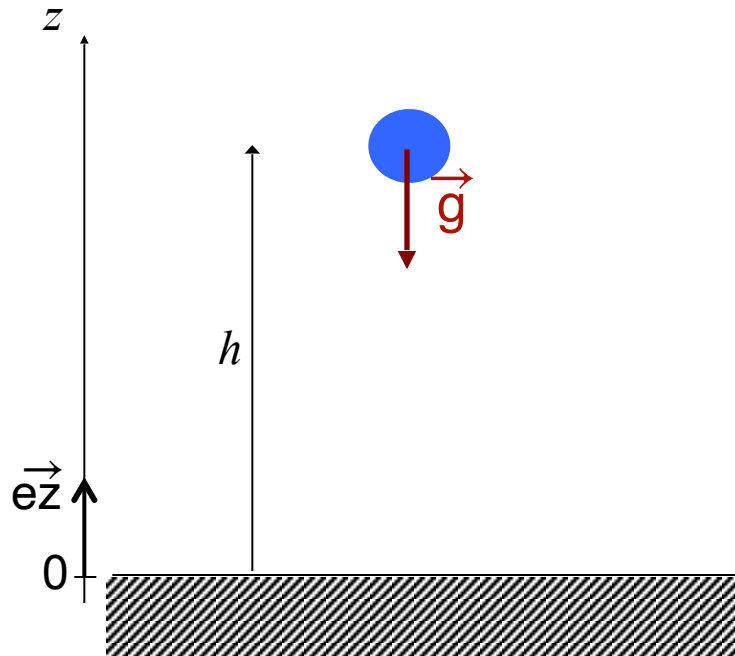
Position initiale $z(0) = h$

Vitesse
et
position :

$$v = \int a dt = \int -g dt = -gt + cte = -gt$$

$$\begin{aligned} z(t) &= \int v dt = \int -gt dt \\ &= -\frac{1}{2}gt^2 + cte \\ &= h - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Axe Oz vers le haut

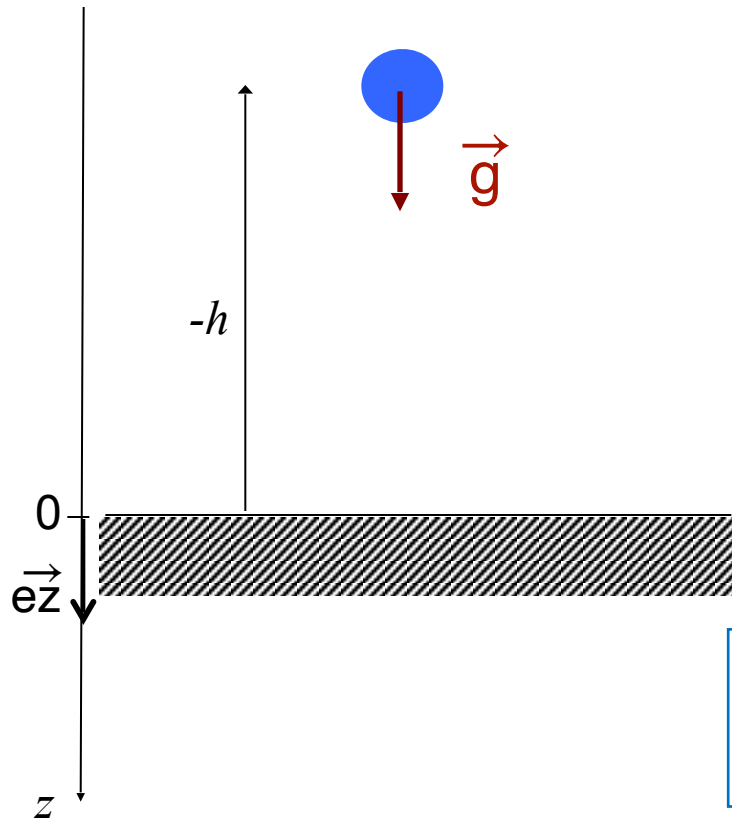


Equation du mouvement : $z(t)$

4.1. Chute libre

■ Mouvement rectiligne : chute d'une balle (dans le vide)

Attention : axe Oz vers le bas



Accélération :

2nd loi de Newton: $m \vec{a} = m \vec{g}$ et on projette sur Oz

$$a = \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_z = g \quad (= cte)$$

Vitesse initiale $v(0) = 0$

Position initiale $z(0) = -h$

Vitesse : $v(t) = gt$

Position :

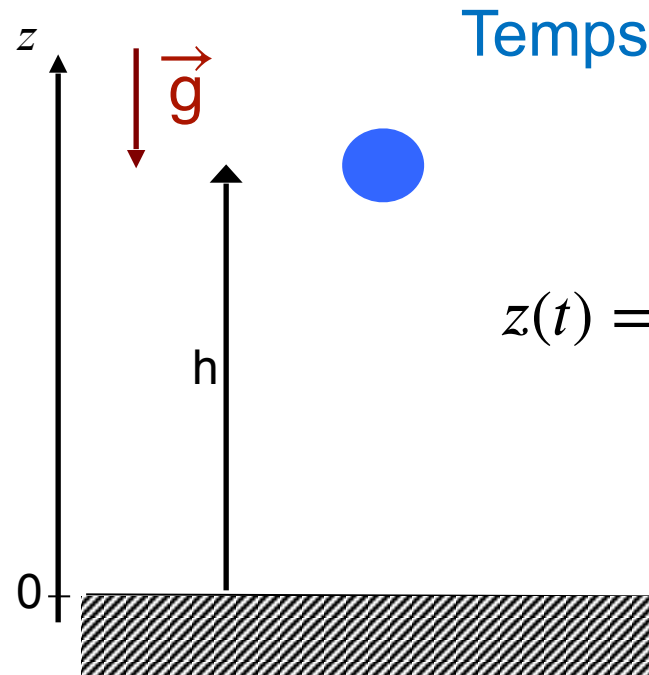
$$z(t) = \int_0^t gt \, dt = \frac{1}{2}gt^2 + cte = \frac{1}{2}gt^2 - h$$

Equation du mouvement : $z(t) = \frac{1}{2}gt^2 - h$

Remarque : l'équation du mouvement dépend du choix du repère

4.1. Chute libre

■ Mouvement rectiligne : chute d'une balle (dans le vide)



Temps pour que la balle touche le sol :

$$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

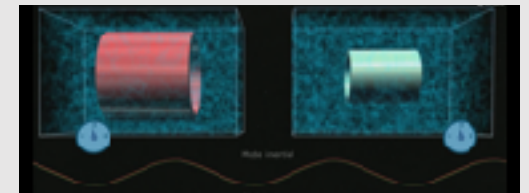
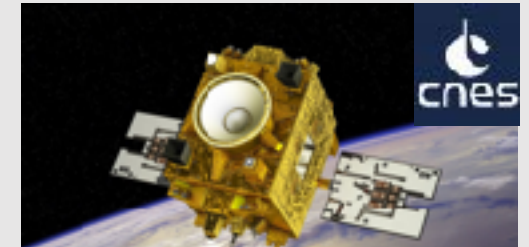
Indépendant de la masse

De la relation précédente, on peut exprimer g en fonction du temps de chute. C'est un moyen simple de mesurer g

$$g = \frac{2h}{t^2} \quad m.s^{-2}$$

Information Scientifique

Principe d'équivalence de Newton



Satellite Microscope

<https://www.youtube.com/watch?v=9Snf3mhdPYI>

4.1. Chute libre

■ Mouvement rectiligne : hauteur maximum

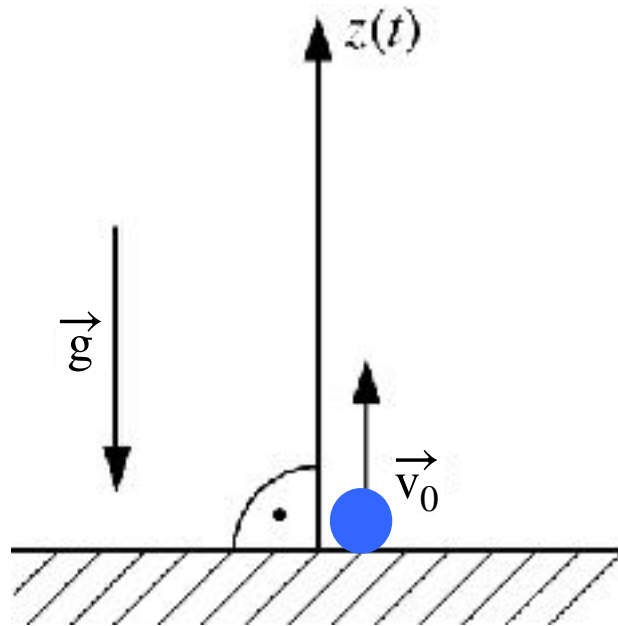
Balle lancée (dans le vide) verticalement avec une vitesse v_0

2nd loi de Newton : $m \vec{a} = m \vec{g}$ et on projette sur Oz : $a = -g$

Vitesse initiale ($t=0$) : $v(0) = v_0$

Position initiale ($t=0$) : $z(0) = 0$

projection de $\vec{v}_0$ sur Oz



$$v(t) = \int -g \, dt = -gt + cte$$

$$v(t) = v_0 - gt$$

$$z(t) = \int v(t) \, dt = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + cte$$

$= 0$

Equation du mouvement:

$$z(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

4.1. Chute libre

■ Mouvement rectiligne : hauteur maximum

Balle lancée (dans le vide) verticalement avec une vitesse v_0

Equation du mouvement:

$$z(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Hauteur maximum z_{max} ???

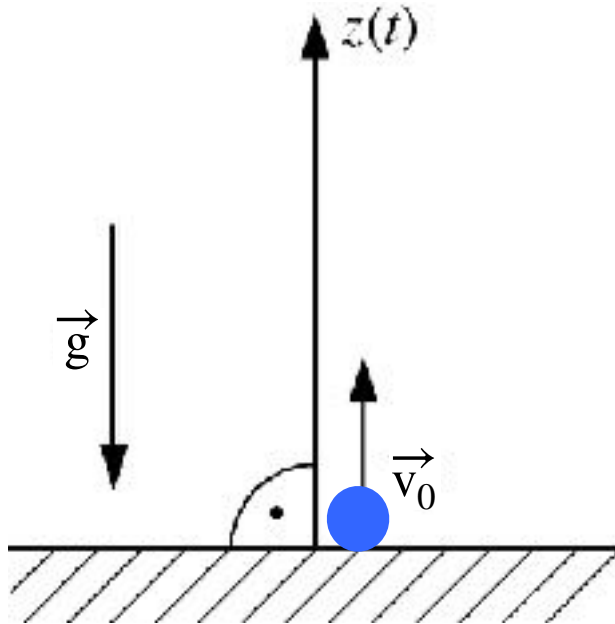
la vitesse est nulle à $z_{max} \Rightarrow t_{ret}$ est le temps à z_{max}

$$v(t_{ret}) = 0 = v_0 - g t_{ret} \Rightarrow t_{ret} = v_0 / g$$

$$z_{max} = v_0 t_{ret} - \frac{1}{2} g t_{ret}^2$$

on remplace t_{ret} par v_0 / g

$$h = \frac{1}{2} v_0^2 / g$$

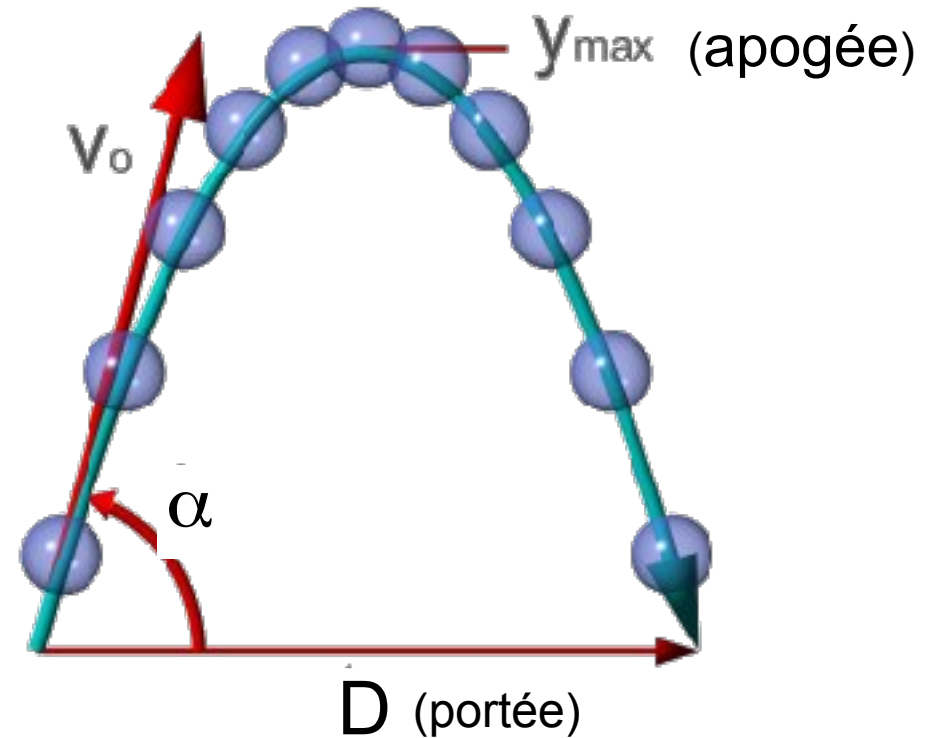
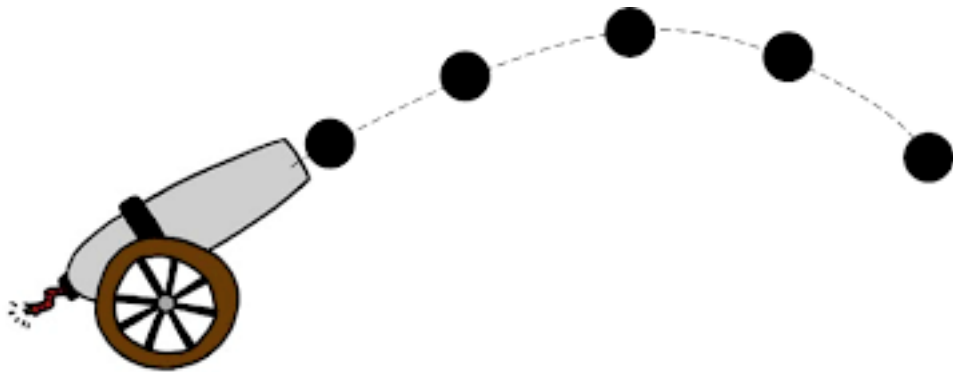


A.N.: $v_0 = 10$ m/s (36 km/h)
 $z_{max} = 5$ m (terre)
 $= 31$ m (lune)

Indépendant de la masse

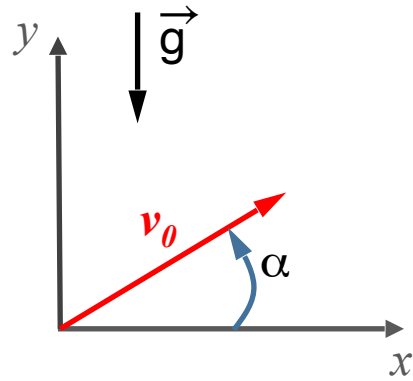
4.2. Mouvement balistique

Tir balistique : objet lancé avec une vitesse $\vec{v}_0$ formant un angle α par rapport au sol dans un champ gravitationnel $\vec{g}$



4.2. Mouvement balistique

■ Tir balistique



*Mouvement dans un plan:
repère à 2 dimensions*

Composantes du vecteur accélération :

2nd loi de Newton : $m \vec{a} = m \vec{g}$ et on projette sur Ox et Oy :

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{composante horizontale : projection sur } Ox \\ \text{composante verticale : projection sur } Oy \end{array}$$

Composantes de la vitesse :

On intègre l'accélération par rapport au temps pour obtenir la vitesse

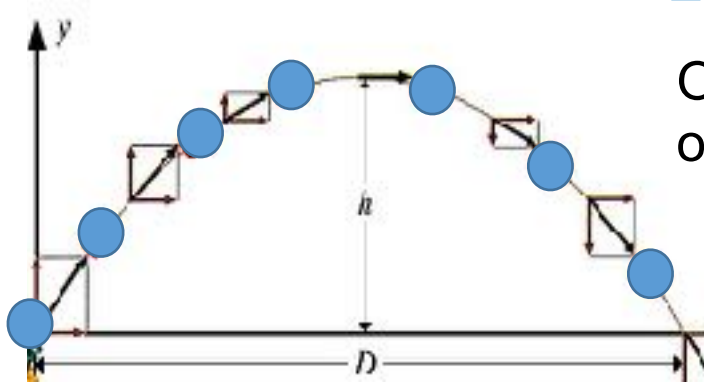
avec à $t=0$, $v_x(0) = v_0 \cos\alpha$ et $v_y(0) = v_0 \sin\alpha$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha & \text{composante horizontale suivant } Ox \\ v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt & \text{composante verticale suivant } Oy \end{cases}$$

on rappelle que $v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

4.2. Mouvement balistique

■ Tir balistique



Equation horaire du mouvement :

On intègre la vitesse par rapport au temps pour obtenir les composantes du vecteur position

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha t \\ y(t) = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Equation intrinsèque de la trajectoire :

on cherche $y = f(x)$

$$x = v_0 \cos \alpha t$$

d'où $t = x / (v_0 \cos \alpha)$

On remplace t

$$y(t) = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$



$$y(x) = x \tan \alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

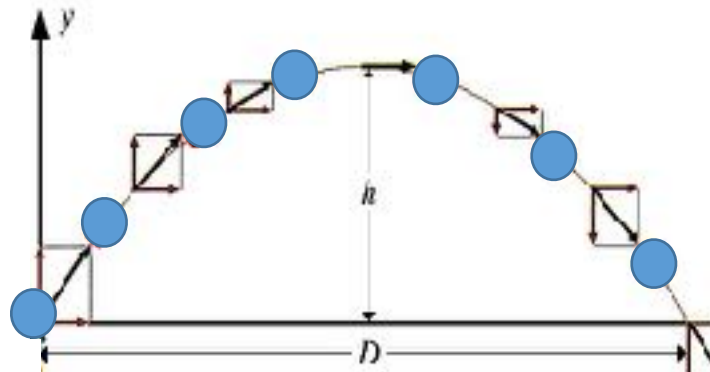
Equation d'une parabole ($y = ax + bx^2$)

4.2. Mouvement balistique

■ Tir balistique

Distance D (portée) :

D définie par $y = 0$ (balle touche le sol) et $x = D$



$$y(x) = x \tan \alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2} \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$\Downarrow$

$$y(D) \doteq 0 = D \tan \alpha - D^2 \frac{g}{2v_0^2} \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$0 = \sin \alpha - D \frac{g}{2v_0^2} \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$D = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$$

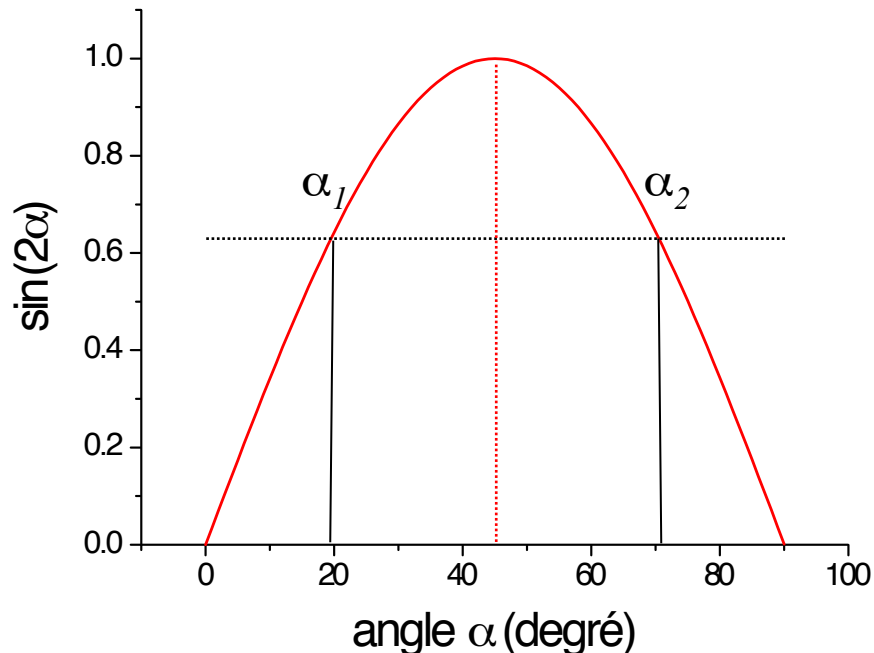
$$\sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha$$

4.2. Mouvement balistique

■ Tir balistique

Portée : $D = (v_0^2/g) \sin 2\alpha$

- 1) Le sinus est maximum pour $2\alpha = 90^\circ$, soit $\alpha = 45^\circ$
- 2) Lorsque α varie entre 0 et 90° , il existe deux angles α_1 et α_2 tel que $\sin(2\alpha_1) = \sin(2\alpha_2)$



1) D maximum pour 45°

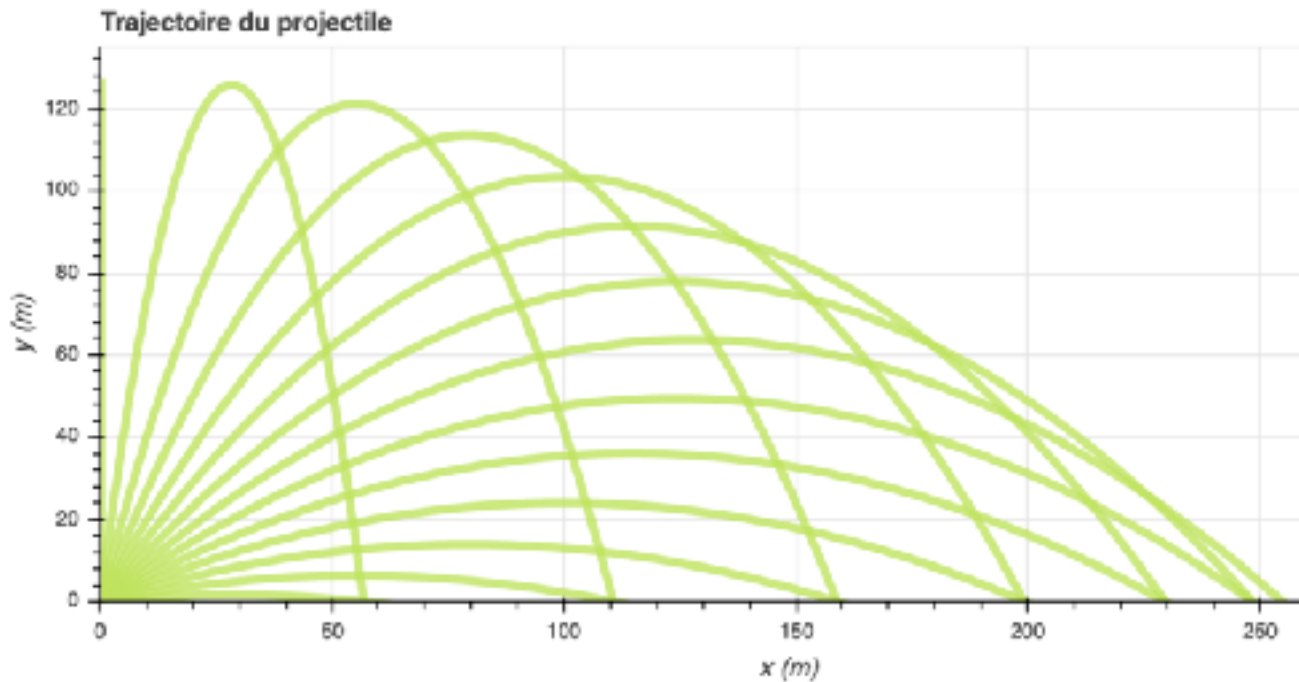
2) Il existe 2 angles donnant la même distance D

4.2. Mouvement balistique

■ Tir balistique

Portée : $D = (v_0^2/g) \sin 2\alpha$

- 1) Le sinus est maximum pour $2\alpha = 90^\circ$, soit $\alpha = 45^\circ$
- 2) Lorsque α varie entre 0 et 90° , il existe deux angles α_1 et α_2 tel que $\sin(2\alpha_1) = \sin(2\alpha_2)$

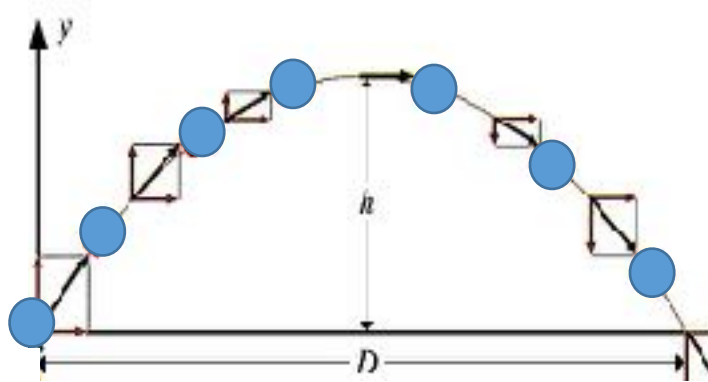


1) D maximum pour 45°

2) Il existe 2 angles donnant la même distance D

4.2. Mouvement balistique

■ Tir balistique



Hauteur maximum :

h_{max} définie par la condition suivante :

Vitesse ascensionnelle $v_y = 0$

On part de la vitesse v_y : $v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt$ et on pose $v_0 \sin \alpha - gt = 0$

d'où $t = (v_0 \sin \alpha)/g$ temps de vol

On injecte le temps dans l'équation du mouvement

$$y(t) = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_{max} = v_0 \sin \alpha ((v_0 \sin \alpha)/g) - 1/2g(v_0 \sin \alpha)^2/g^2$$

$$y_{max} = (v_0 \sin \alpha)^2/2g$$

4.2. Mouvement balistique

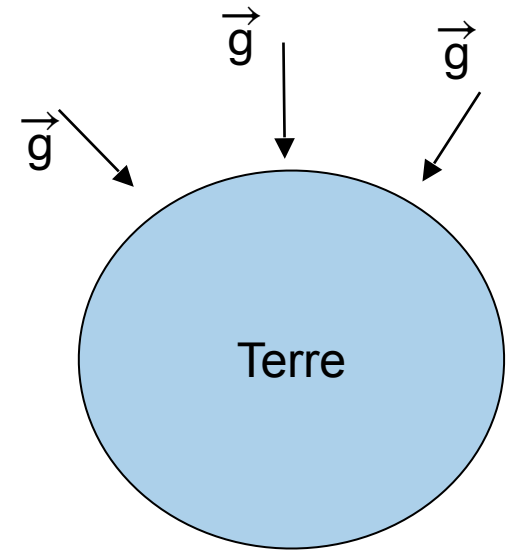
■ Remarques

- La trajectoire n'est plus une parabole si

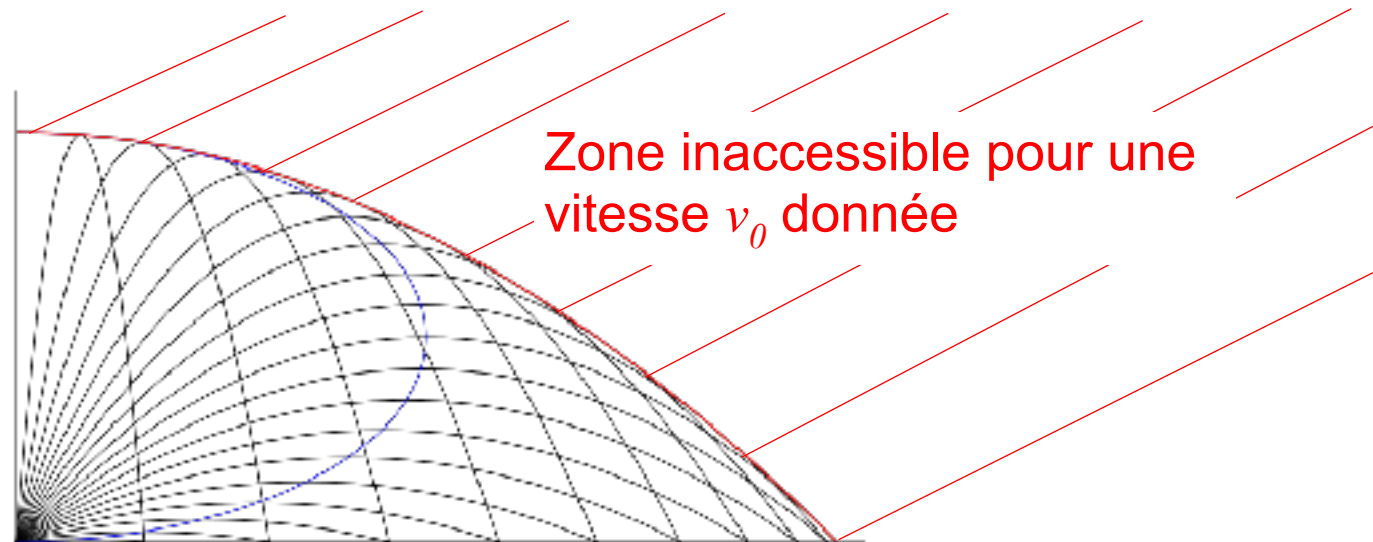
- 1) On tient compte de la résistance de l'air

- 2) Pour des tirs de projectiles à longue portée

Les vecteurs $\vec{g}$ sont dirigés vers le centre de la terre. Si 2 points sont très éloignés alors les vecteur $\vec{g}$ en ces points ne sont plus parallèles



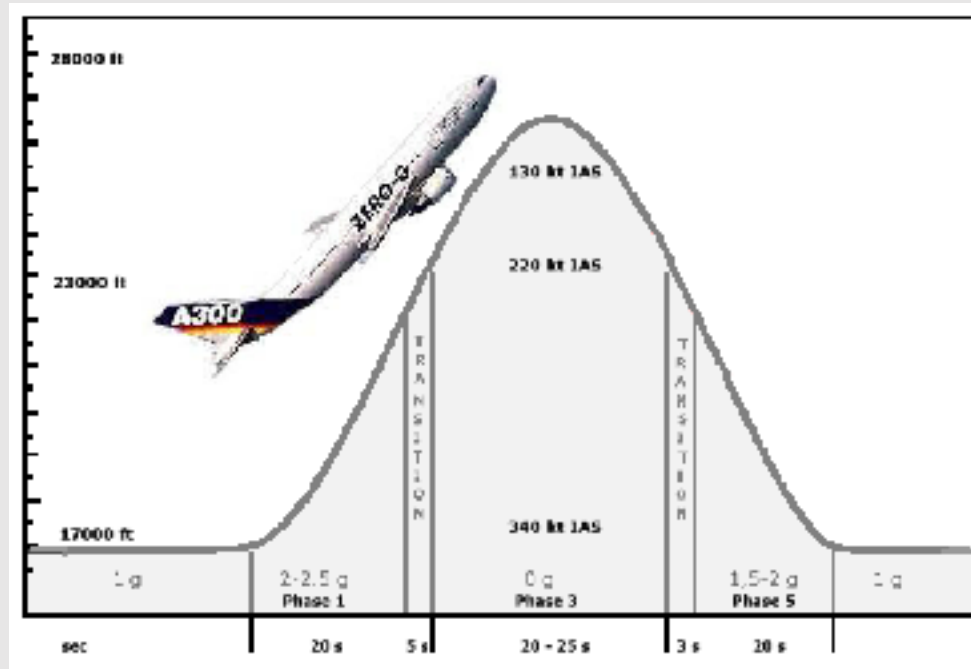
- Parabole de sureté



4.2. Mouvement balistique

Information scientifique

Vol parabolique pour créer une micro-pesanteur (situation de chute libre)

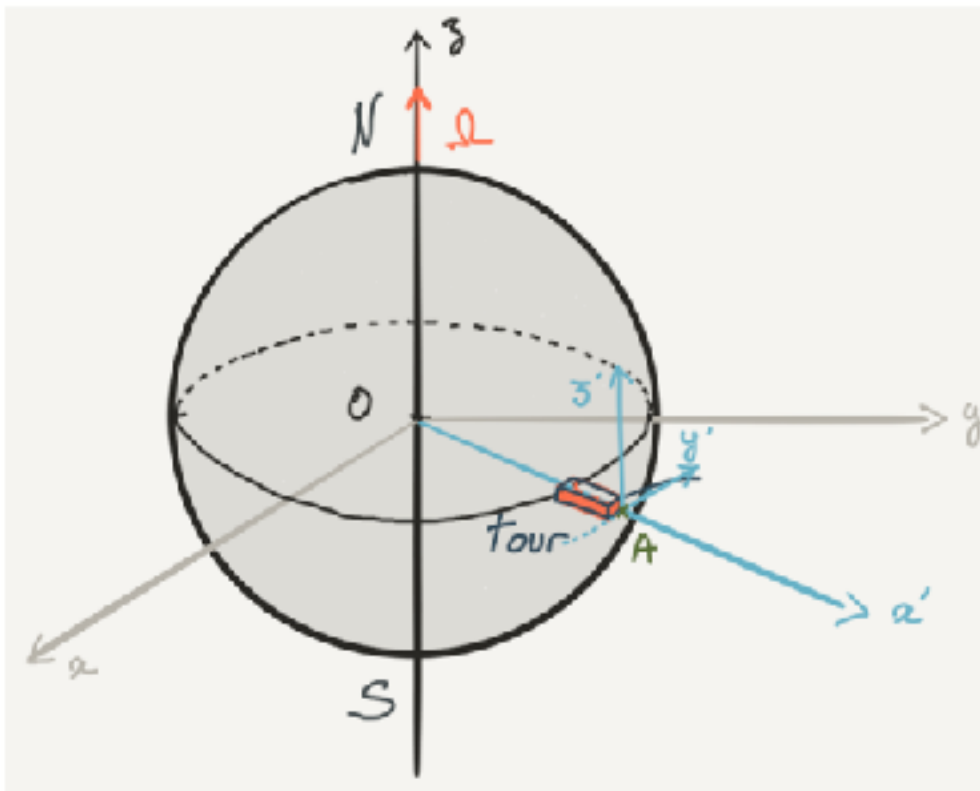


Permet de tester l'influence de la gravitation sur de nombreux phénomènes physiques

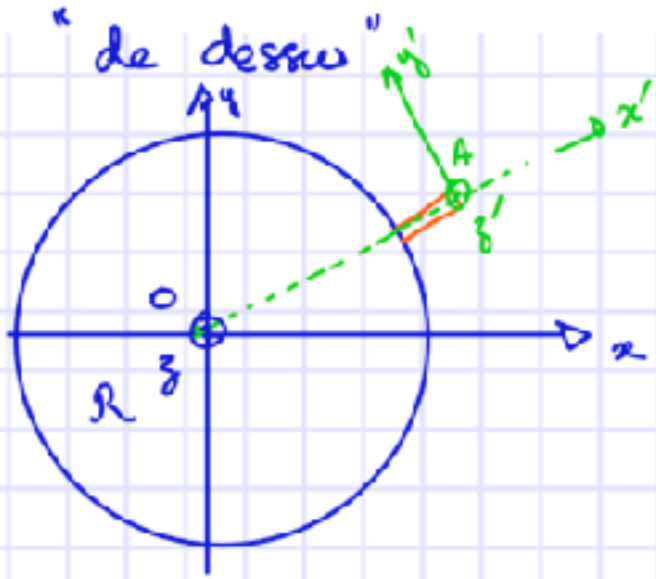
4.2. Mouvement balistique

- **Exercice d'application:** Pierre qui tombe d'une tour à l'équateur

On considère qu'on lâche une pierre d'une hauteur h depuis une tour située à l'équateur. De quelle distance et dans quelle direction la pierre est-elle déviée ?



Calcul "intuitif", ne prenant en compte que les vitesses de rotations :



$$\vec{v}_i = (R+h)\Omega \vec{e}_{y'}$$

$$\vec{v}_s = R\Omega \vec{e}_{y'}$$

$$t_{chute} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

R : rayon de la Terre
h : hauteur bar

$\vec{D}_{plane}$ selon $\vec{e}_{y'}$

$$\vec{D}_{plane} = \vec{v}_i \cdot t_{chute} = (R+h)\Omega \sqrt{\frac{2h}{g}} \vec{e}_{y'}$$

$$\vec{D}_{sol} = \vec{v}_s \cdot t_{chute} = R\Omega \sqrt{\frac{2h}{g}} \vec{e}_{y'}$$

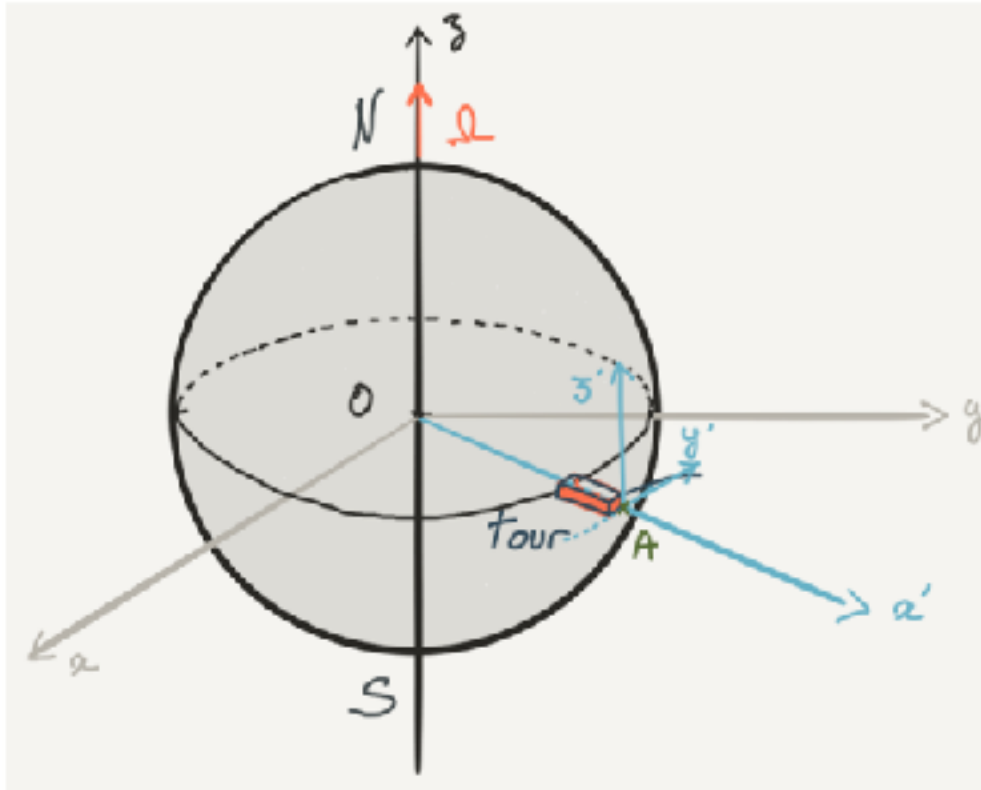
$$\begin{aligned} \vec{D}_{\text{déviation}} &= \vec{D}_{plane} - \vec{D}_{sol} = (R+h)\Omega \sqrt{\frac{2h}{g}} \vec{e}_{y'} - R\Omega \sqrt{\frac{2h}{g}} \vec{e}_{y'} \\ &= h\Omega \sqrt{\frac{2h}{g}} \vec{e}_{y'} \end{aligned}$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1} \quad h = 300 \text{ m} \Rightarrow \vec{D}_{\text{déviation}} \approx \underline{17 \text{ cm}}$$

Calcul complet

$\mathcal{R}(O, x, y, z)$ repère fixe avec O centre de la Terre

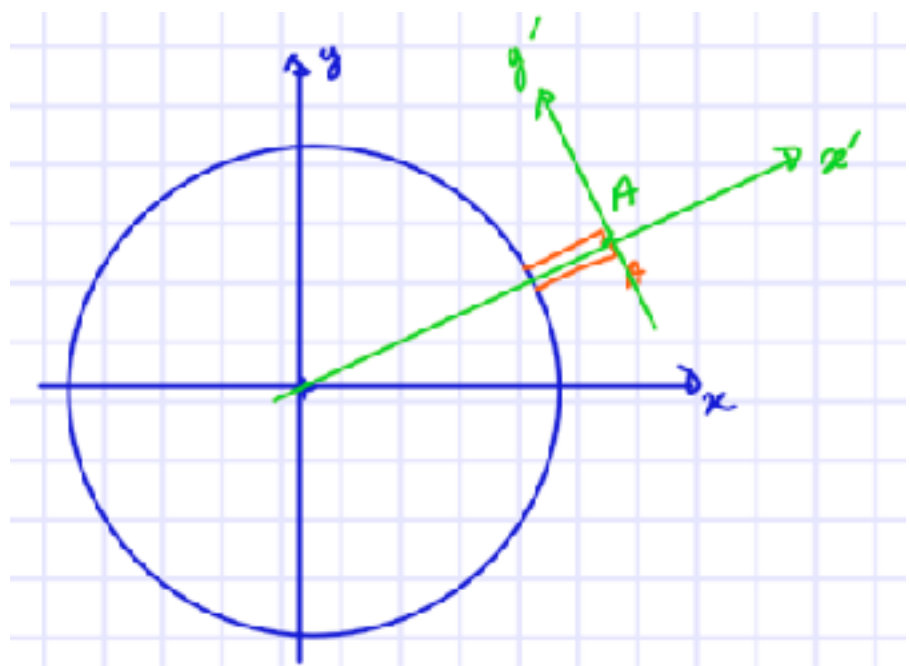
$\mathcal{R}'(A, x', y', z')$ repère lié à la tour avec A sommet de la tour (d'où on lâche la pierre P).



$$m a(\vec{P}) = m \vec{g}$$

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z = \Omega \vec{e}_{z'}$$

$$\vec{g} = g \vec{e}_{x'}$$



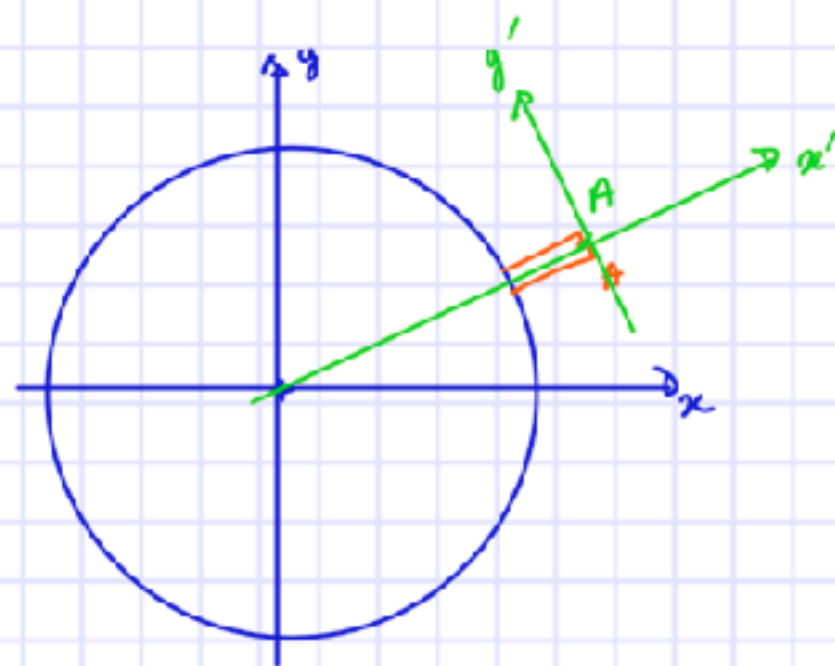
$$\vec{a}_R(P) = \vec{a}_{R'}(P) + \underbrace{\vec{a}_R(A) + \cancel{\vec{\Omega} \wedge \vec{AP}} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{AP})}_{\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OP})} + 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{R'}(P)$$

$$\vec{a}_{R'}(P) = \vec{a}_R(P) - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OP}) - 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{R'}(P)$$

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_R(P) = m \vec{g}$$

$$\vec{a}_{R'}(P) = \underbrace{\vec{g} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OP})}_{-g_{\text{eff}} \vec{e}_{x'}} - 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{R'}(P)$$

$$\vec{a}_{R'}(P) = -g_{\text{eff}} \vec{e}_{x'} - 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{R'}(P)$$



$$\int_{t=0}^t \vec{a}_{R'}(P) dt = \int_{t=0}^t -g_{\text{eff}} \vec{e}_x' dt - \int_{t=0}^t 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{R'}(P) dt$$

$$\vec{v}_{R'}(P) - \vec{v}_{R'}(P)(t=0) = -g_{\text{eff}} t \vec{e}_x' - 2 \vec{\Omega} \wedge (\vec{r}_{R'}(t) - \vec{r}_{R'}(t=0))$$

$$\vec{v}_{R'}(P) = -g_{\text{eff}} t \vec{e}_x' - 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{AP}$$

$$\vec{v}_{R'}(P) \begin{vmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{vmatrix} \quad \vec{\Omega} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{vmatrix} \quad \vec{AP} \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix}$$

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{AP} \quad \vec{\Omega} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{vmatrix} \wedge \vec{AP} \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\Omega y' \\ +\Omega x' \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$-2 \vec{\Omega} \wedge \vec{AP} \begin{vmatrix} 2\Omega y' \\ -2\Omega x' \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_{R'}(P) \begin{vmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{vmatrix} = g_{\text{eff}} t \vec{e}_x' \begin{vmatrix} -g_{\text{eff}} t \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} - 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{R'}(P) \begin{vmatrix} 2\Omega y' \\ 2\Omega x' \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}' = -g_{\text{eff}} t + 2\Omega y' \\ \ddot{y}' = -2\Omega x' \\ \ddot{z}' = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{z}' = 0 \Rightarrow \dot{z}' = \text{cte} = \dot{z}'(t=0) = 0$$

$\dot{z}' = 0$ pas de déviation N-S

$$\ddot{x}' = -g_{\text{eff}} t + 2\cancel{\Omega y'} \text{ négligeable devant } g_{\text{eff}} t \Rightarrow \ddot{x}' = -g_{\text{eff}} t$$

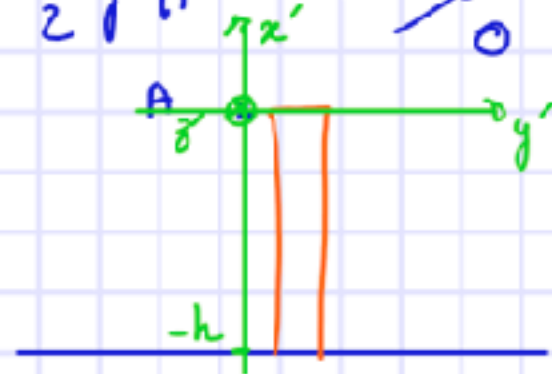
$$\ddot{y}' = -2\Omega x'$$

$$\dot{y}' = \cancel{2\Omega} \left(\cancel{\frac{1}{2}} g_{\text{eff}} t^2 \right) = \Omega g_{\text{eff}} t^2$$

$$y' = \Omega g_{\text{eff}} \frac{1}{3} t^3 + \cancel{y'(t=0)}$$

$$\vec{AP} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} g_{\text{eff}} t^2 \\ \Omega g_{\text{eff}} t^3 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$x' = -\frac{1}{2} g_{\text{eff}} t^2 + \cancel{x'(t=0)}$$



t_f = temps auquel la pierre est aussi 0

$$-h = -\frac{1}{2} g_{\text{eff}} t_f^2 \Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2h}{g_{\text{eff}}}}$$

$$\text{Déviation} = y'(t_f) = \frac{\Omega g_{\text{eff}} t_f^3}{3} = \frac{\Omega \cancel{g_{\text{eff}}}}{3} \frac{2h}{\cancel{g_{\text{eff}}}} \sqrt{\frac{2h}{g_{\text{eff}}}}$$

$$\text{Déviation} = \frac{2}{3} \Omega h \sqrt{\frac{2h}{g_{\text{eff}}}}$$

Ferdinand Reich 1799–1882



Expérience en 1833; $h = 158\text{m}$ $\lambda = 51^\circ$

Mesure $\approx 2,5\text{ cm}$
Théorie $\approx 3\text{ cm}$

