

# Week 2 - 23 Septembre , 2024

## 1. Introduction

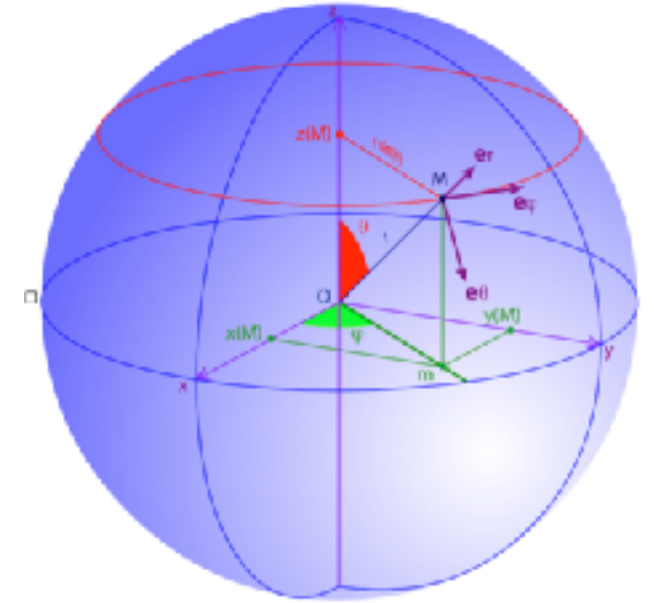
### 1.3. Cinématique

#### 1.3.f. Coordonnées sphériques (rappel)

#### 1.3.g. Mouvement circulaire uniforme

#### 1.3.h. Mouvement circulaire – cas général

#### 1.3.i. Trajectoire, équation horaire



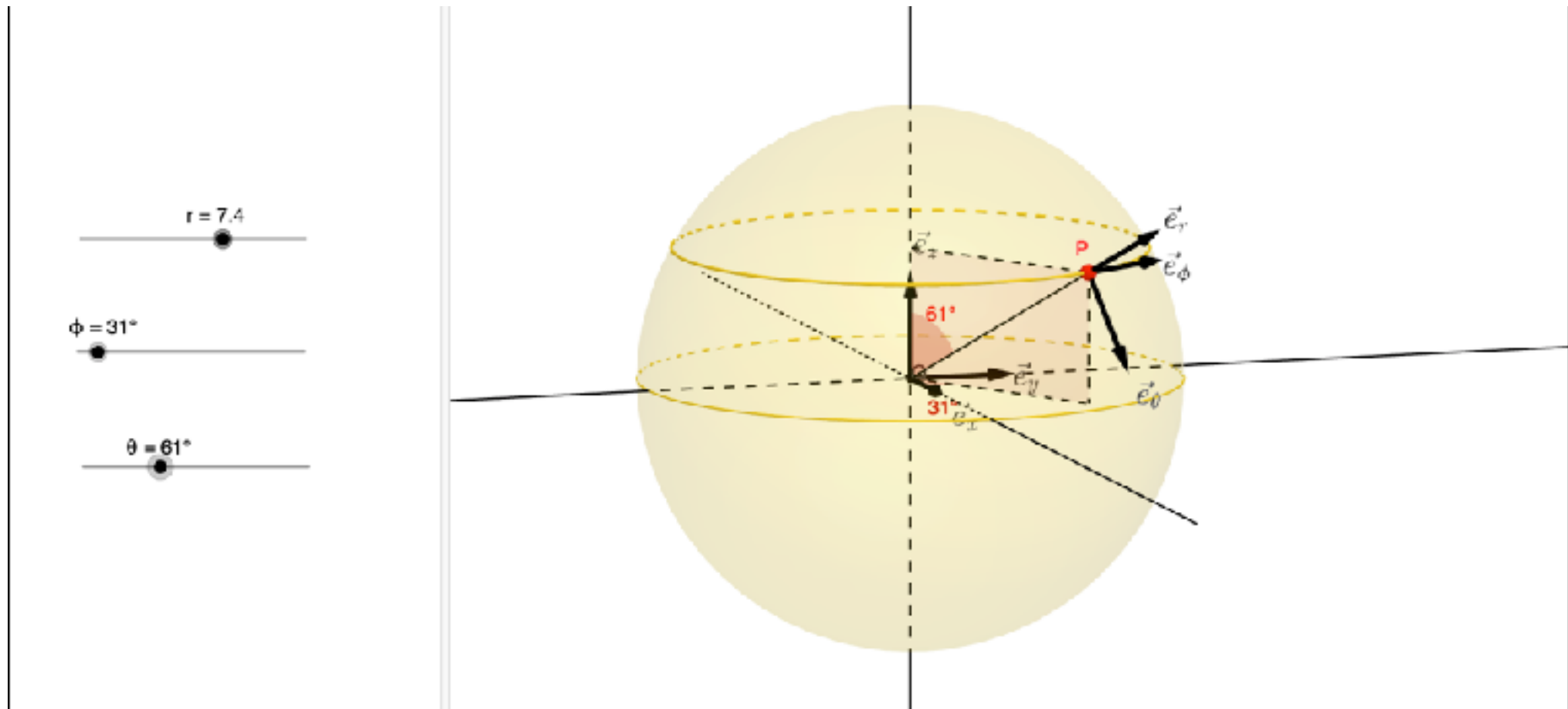
## 2. Référentiels accélérés

### 2.1. Introduction

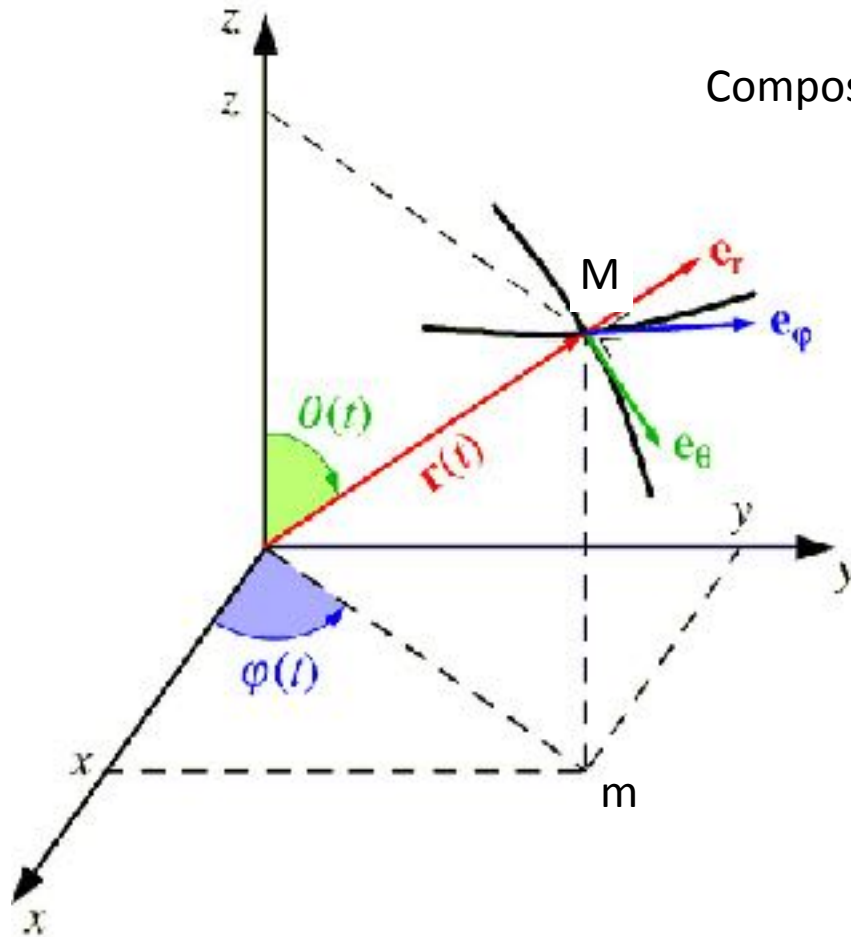
### 2.2. Accélération d'inertie et accélération de Coriolis

Geogebra App (link in the Moodle)

<https://www.geogebra.org/m/vwb5kmvq>



## 1.3.f. Coordonnées sphériques



Les coordonnées de  $M$  sont  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$

Equation du mouvement:  $\vec{r}(t) = r(t) \vec{e}_r$

Composantes des vecteurs  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$ ,  $\vec{e}_\varphi$  dans le repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

$\vec{e}_r$  vecteur unité dans la direction  $r$  (déplacement de  $M$  si  $\varphi$  et  $\theta$  sont constants);  

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_\varphi$  vecteur unité dans la direction  $\varphi$  ( $\vec{e}_\varphi$  est tangent au cercle horizontal de rayon  $r \sin \theta$ ). Dépl. de  $M$  si  $r$  et  $\theta$  sont const;  

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

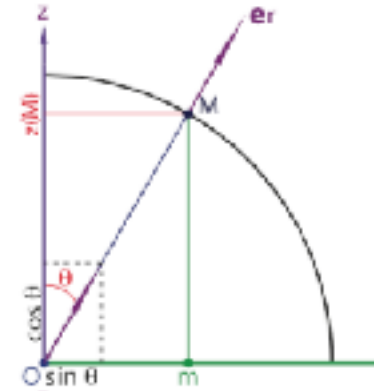
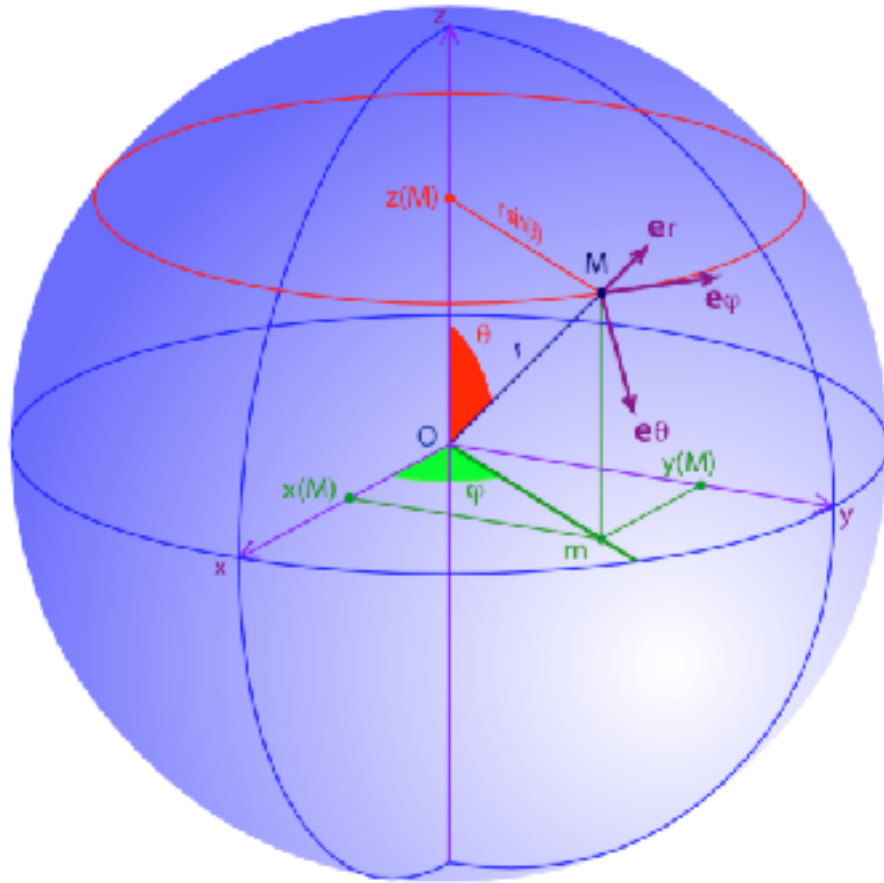
$\vec{e}_\theta$  vecteur unité dans la direction  $\theta$  ( $\vec{e}_\theta$  est tangent au cercle vertical de rayon  $r$ ). Dépl. de  $M$  si  $\varphi$  et  $r$  sont const;  

$$\vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

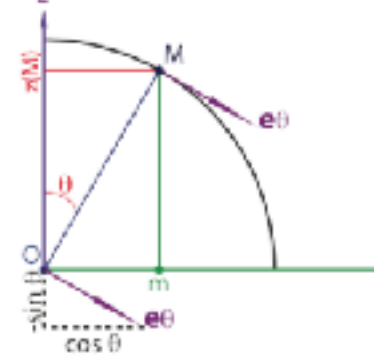
Coordonnées cartésiennes des vecteurs unitaires  
 $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$

## 1.3.f. Coordonnées sphériques

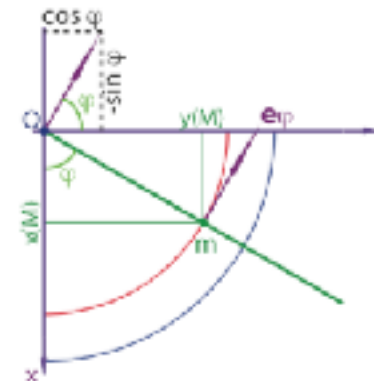
Composantes des vecteurs  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$ ,  $\vec{e}_\phi$  dans le repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$



$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$



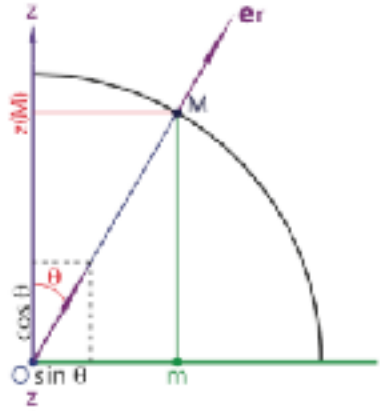
$$\vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$



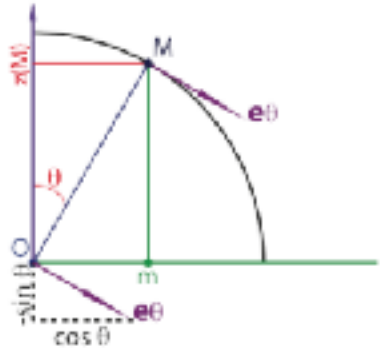
$$\vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 1.3.f. Coordonnées sphériques

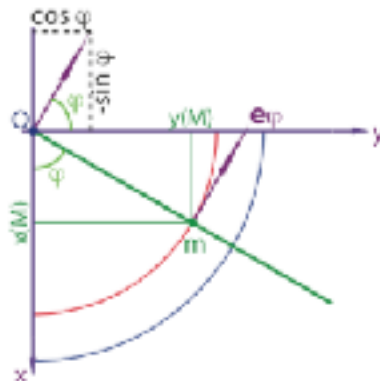
Composantes des vecteurs  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$ ,  $\vec{e}_\phi$  dans le repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$



$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$



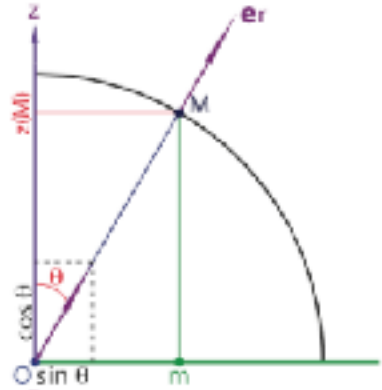
$$\vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$



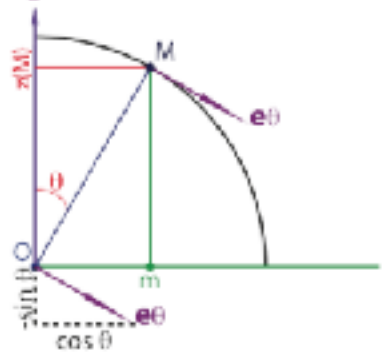
$$\vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 1.3.f. Coordonnées sphériques

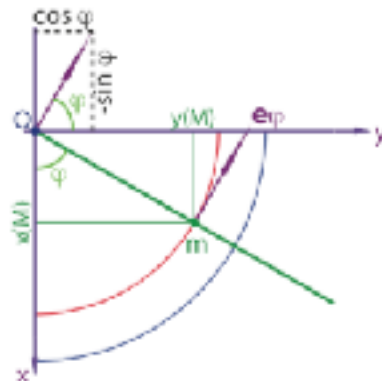
Composantes des vecteurs  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$ ,  $\vec{e}_\phi$  dans le repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$



$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$



$$\vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$



$$\vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dérivation des vecteurs  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_\phi$ ...

$$\dot{\vec{e}}_r = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi - \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \sin \phi + \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix} = -\dot{\theta} \vec{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\phi$$

$$\dot{\vec{e}}_\phi = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \cos \phi \\ -\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_r - \dot{\phi} \cos \theta \vec{e}_\theta$$

## 1.3.f. Coordonnées sphériques

### Position, vitesse en coordonnées sphériques

dans le repère  $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  en fonction de  $r$ ,  $\theta$ , et  $\varphi$

$$\vec{r}(t) = r(t) \vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d(r \vec{e}_r)}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_\theta \vec{e}_\theta \quad \begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\varphi = r \dot{\varphi} \sin \theta \\ v_\theta = r \dot{\theta} \end{cases}$$

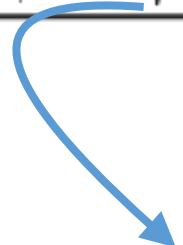
## 1.3.f. Coordonnées sphériques

### Vitesse et accélération en coordonnées sphériques

dans le repère  $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  en fonction de  $r$ ,  $\theta$ , et  $\varphi$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta)$$


$$\ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\vec{e}}_r$$

$$\vec{a} =$$

## 1.3.f. Coordonnées sphériques

### Vitesse et accélération en coordonnées sphériques

dans le repère  $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  en fonction de  $r$ ,  $\theta$ , et  $\varphi$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta)$$

$$\vec{a} = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\vec{e}}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\vec{e}}_\theta + \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \cos \theta \dot{\vec{e}}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \dot{\vec{e}}_\varphi + r \ddot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \cos \theta \dot{\vec{e}}_\varphi + r \dot{\varphi} \sin \theta \dot{\vec{e}}_\varphi$$

## 1.3.f. Coordonnées sphériques

### Vitesse et accélération en coordonnées sphériques

dans le repère  $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  en fonction de  $r, \theta$ , et  $\varphi$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta)$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = & \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \frac{d}{dt} \vec{e}_r \\ & + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d}{dt} \vec{e}_\theta \\ & + \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \sin \theta \frac{d}{dt} \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{e}_r &= \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \frac{d}{dt} \vec{e}_\theta &= -\dot{\theta} \vec{e}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \vec{e}_\varphi \\ \frac{d}{dt} \vec{e}_\varphi &= -\dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

## 1.3.f. Coordonnées sphériques

### Vitesse et accélération en coordonnées sphériques

dans le repère  $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  en fonction de  $r, \theta$ , et  $\varphi$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_\theta \vec{e}_\theta \quad \begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\varphi = r \dot{\varphi} \sin \theta \\ v_\theta = r \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{r} \vec{e}_r + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + \dot{\theta} \vec{e}_\theta)}{dt}$$

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_\theta \vec{e}_\theta \quad \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \\ a_\varphi = r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta + 2\dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \\ a_\theta = r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta \end{cases}$$

# Week 2 - 23 Septembre , 2024

## 1. Introduction

### 1.3. Cinématique

1.3.f. Coordonnées sphériques

**1.3.g. Mouvement circulaire uniforme**

**1.3.h. Mouvement circulaire – cas général**

1.3.i. Trajectoire, équation horaire



## 2. Référentiels accélérés

2.1. Introduction

2.2. Accélération d'inertie et accélération de Coriolis

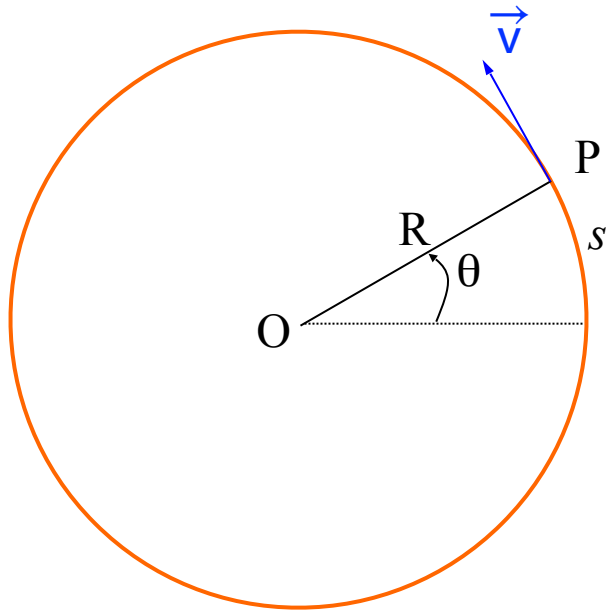
## 1.3.g. Mouvement circulaire uniforme

La vitesse angulaire  $\omega$  est constante pour un mouvement circulaire uniforme

Nous savons que

$$v = ds/dt = R d\theta/dt$$

car  $ds = R d\theta$



La vitesse angulaire est donnée par

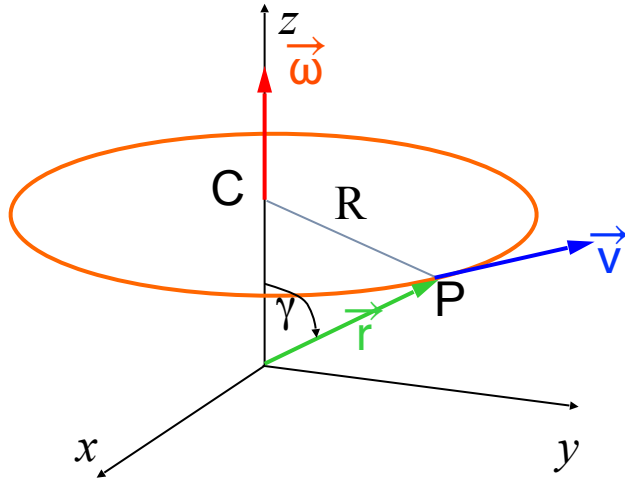
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{en rad.s}^{-1} \text{ ou s}^{-1})$$

d'où

$$v = \omega R$$

## 1.3.g. Mouvement circulaire uniforme

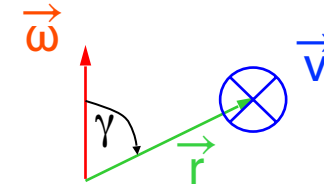
Expression vectorielle de la vitesse  $\mathbf{v}$  pour un mvt circulaire uniforme ( $\omega = cte$ )



$$R = r \sin\gamma \quad \Leftrightarrow$$

$$v = \omega R = \omega r \sin\gamma$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}}$$



Si  $\omega = cte$  alors mouvement périodique

$\left\{ \begin{array}{l} P \text{ période} \\ f \text{ fréquence (nb de tours par unité de temps)} \end{array} \right.$

Si  $n$  tours pendant le temps  $t$  alors

$$\left\{ \begin{array}{l} P = t/n \\ f = n/t \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad v = 1/P \text{ en s}^{-1} \text{ ou hertz (Hz)}$$

$$\theta = \omega t \Leftrightarrow \omega = \theta/t$$

tour complet:  $t = P$  et  $\theta = 2\pi$

$$\text{d'où } \omega = 2\pi/P = 2\pi \cdot f$$

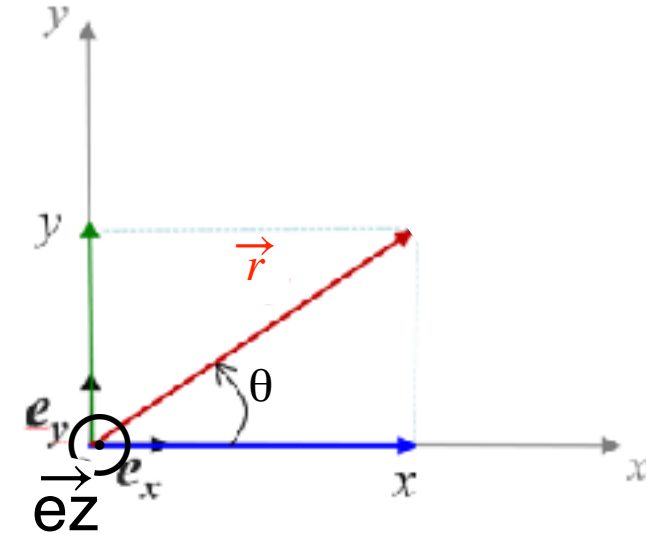
# 1.3.g. Mouvement circulaire uniforme

## Dérivée d'un vecteur en rotation de norme constante

Coordonnées du vecteur  $\vec{r}$  de norme  $\rho$  
$$\begin{cases} x = \vec{r} \cdot \vec{e}_x = \rho \cos \theta \\ y = \vec{r} \cdot \vec{e}_y = \rho \sin \theta \\ z = 0 \end{cases}$$

Coordonnées du vecteur  $\dot{\vec{r}}$  : 
$$\begin{cases} \dot{x} = \rho \dot{\theta} (-\sin \theta) + \dot{\rho} \cos \theta = -\omega \rho \sin \theta \\ \dot{y} = \rho \dot{\theta} \cos \theta + \dot{\rho} \sin \theta = \omega \rho \cos \theta \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

Rayon constant



Le vecteur “vitesse angulaire” pour une rotation dans le sens direct (anti-horaire) est  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$

$$\begin{array}{c} \dot{\vec{r}} \\ \hline -\omega \rho \sin \theta \\ \hline \omega \rho \cos \theta \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \vec{\omega} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \begin{matrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{matrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vec{r} \\ \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{matrix} \end{array}$$

Produit vectoriel :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{e}_x (a_y b_z - a_z b_y) + \vec{e}_y (a_z b_x - a_x b_z) + \vec{e}_z (a_x b_y - a_y b_x)$$

Nous avons finalement

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$(\omega \neq cte)$

et par conséquent

$$\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} = 0$$

La dérivée d'un vecteur de norme constante en rotation est un vecteur perpendiculaire

## 1.3.h. Mouvement circulaire – Cas général

soit  $\omega(t)$  la vitesse angulaire

Accélération angulaire :

$$\alpha = d\omega/dt$$

Accélération tangentielle:

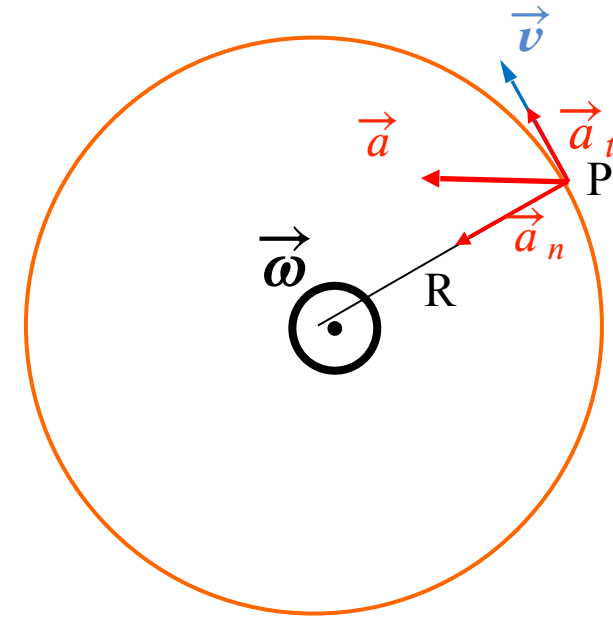
$$a_t = dv/dt = R d\omega/dt = R\alpha$$

$$(v = \omega R \text{ avec } R \text{ cte})$$

Accélération normale (centripète):

$$a_n = v^2/R = R\omega^2$$

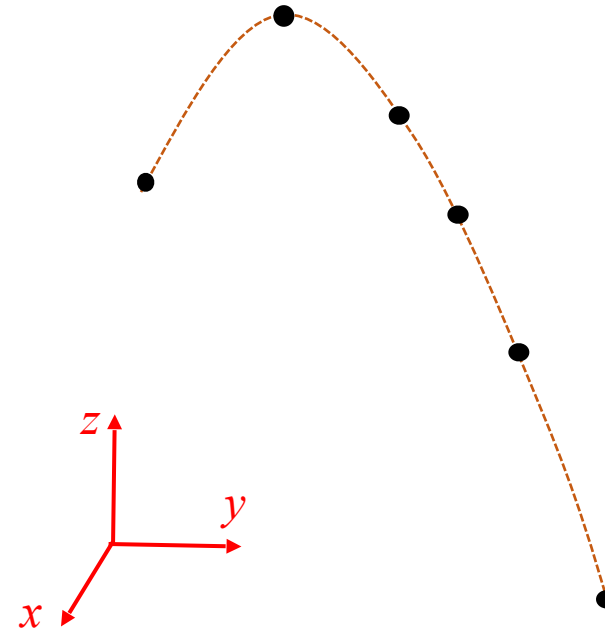
$$(v = R\omega)$$



$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

**Remarque:** mouvement circulaire uniforme  $\Leftrightarrow v = \text{cte}$   
d'où  $a_t = 0$  mais  $a_n$  non nulle ( $=v^2/R$ )

## 1.3.i. Trajectoire, équation horaire

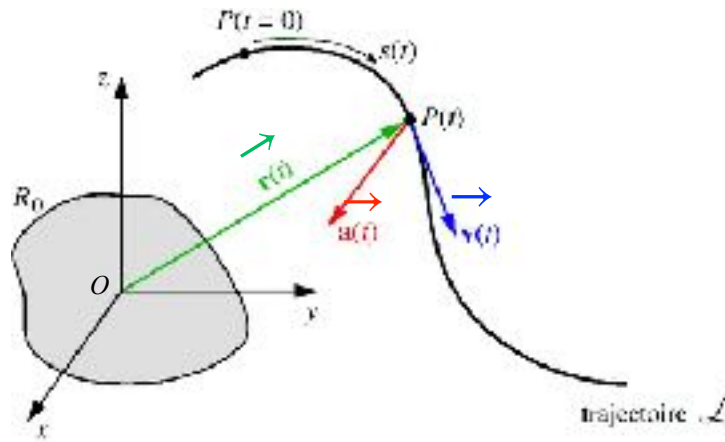


**Mécanique du point** : nous simplifions le « monde réel » en associant un objet à un point matériel possédant une masse

**Mécanique du solide** : on tiendra compte du volume de l'objet

## 1.3.i. Trajectoire, équation horaire

### ■ Equations (paramétriques) du mouvement



- le vecteur « position »  $\vec{r}$

- le vecteur « vitesse »  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

- le vecteur « accélération »  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$

Le mouvement de  $P$ , dans le repère  $R_O$ , est donné par les équations paramétriques du mouvement, obtenues par projection du vecteur position dans un repère

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP(t)}$$

en projetant  
sur un repère

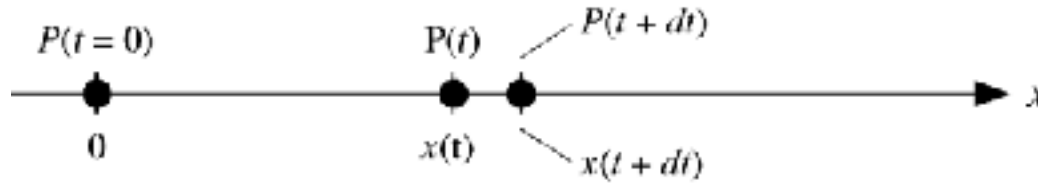
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

*Equations paramétriques*

## 1.3.i. Trajectoire, équation horaire

### ■ Equation du mouvement - cas 1D

**Mouvement rectiligne uniforme – (MRU) :  $a(t) = 0$**



Conditions initiales:

à  $t=0$  :  $v(0) = v_0$  et  $x(0) = 0$

$\forall t, a(t) = 0$

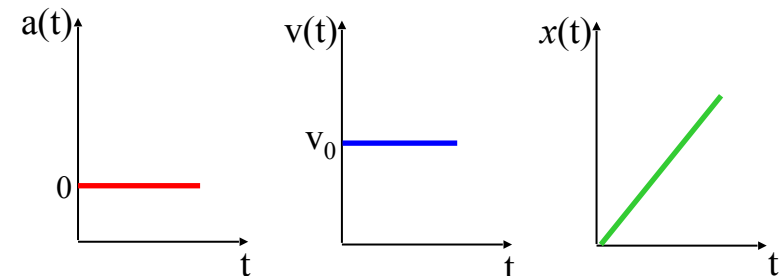
Calcul de l'équation de mouvement :

$$a(t) = 0$$

$$v(t) = \int_0^t a(t) dt = cte \quad \text{or} \quad v(t=0) = v_0 \rightarrow cte = v_0 \quad (v_0 \text{ vitesse initiale})$$

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t v_0 dt = v_0 t - 0 + cte \quad \text{or} \quad x(t=0) = 0 \rightarrow cte = 0$$

Equation du mouvement :  $x(t) = v_0 t$



## 1.3.i. Trajectoire, équation horaire

### ■ Equation du mouvement – cas 1D

**Mouvement rectiligne uniformément accéléré : - MRUA:  $a(t) = a$**

Conditions initiales à  $t=0$  :  $v(0) = v_0$  et  $x(0) = 0$

Calcul de l'équation de mouvement :  $a(t) = a$

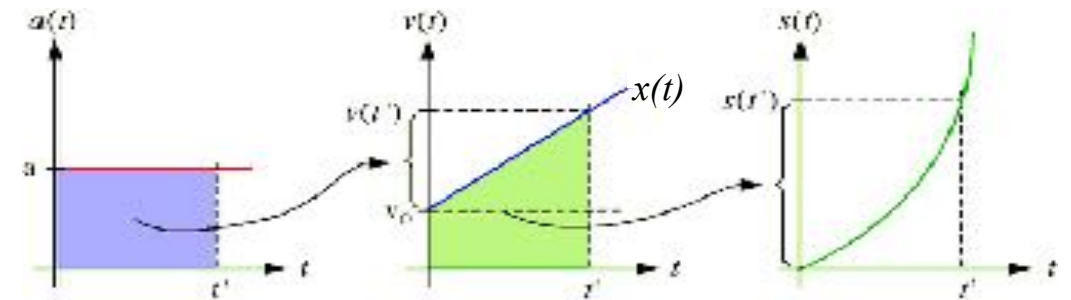
$$v(t) = \int_0^t a \, dt = at - 0 + cte \quad \text{Avec} \quad v(t=0) = v_0 \rightarrow cte = v_0$$

$$v(t) = v_0 + at$$

$$x(t) = \int_0^t v(t) \, dt$$

$$= \int_0^t (v_0 + at) \, dt$$

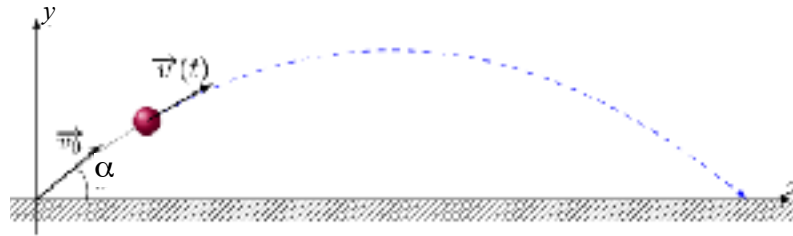
$$= v_0 t + \frac{1}{2} at^2 + cte \quad \text{Avec } x(0) = 0 \Rightarrow cte = 0$$



$$\text{Equation du mouvement : } x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

## 1.3.i. Trajectoire, équation horaire

### ■ Equations (paramétriques) du mouvement



$$\begin{aligned}x(t) &= v_0 \cos \alpha t \\y(t) &= v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

Equations paramétriques

### ■ Equation intrinsèque de la trajectoire (parabolique)



$$y(t) = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$

↓ on élimine le temps avec  $t = x / (v_0 \cos \alpha)$

$$y(x) = x \tan \alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Equation de la trajectoire

la trajectoire est la « trace » du déplacement



# Week 2 - 24 Septembre , 2024

## 1. Introduction

### 1.3. Cinématique

#### 1.3.f. Coordonnées sphériques

#### 1.3.g. Mouvement circulaire uniforme

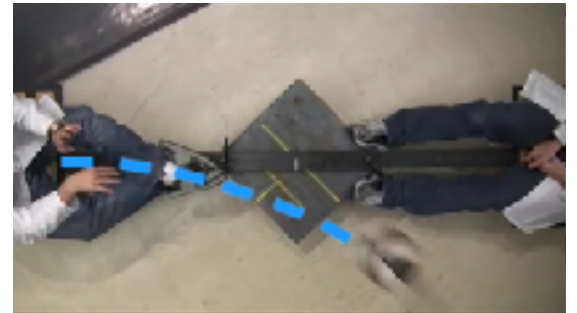
#### 1.3.h. Mouvement circulaire – cas général

#### 1.3.i. Trajectoire, équation horaire

## 2. Référentiels accélérés

### 2.1. Introduction

### 2.2. Accélération d'inertie et accélération de Coriolis

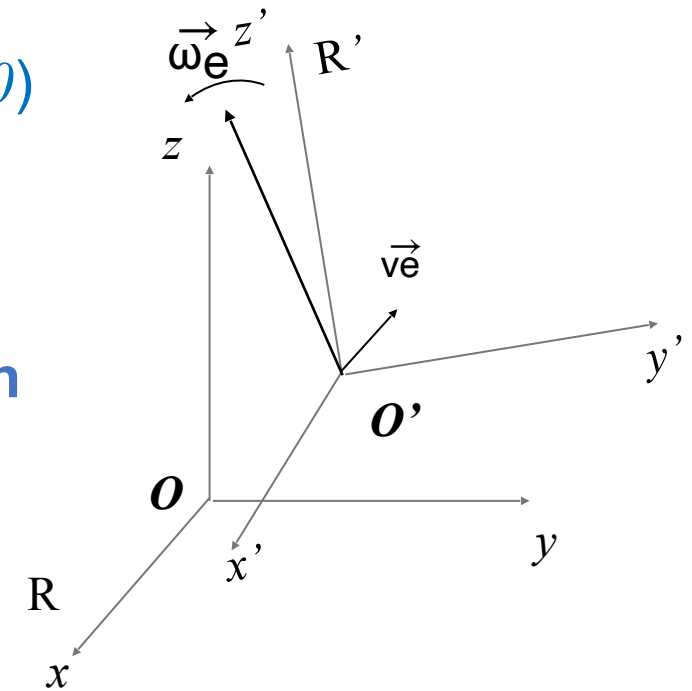


## 2.1. Introduction

### ■ Référentiel galiléen (inertiel)

**Définition** : dans un référentiel galiléen tout corps isolé qui se déplace présente un mouvement rectiligne uniforme

- Si  $R$  est un référentiel galiléen alors  $R'$  est un aussi un référentiel galiléen s'il est en translation uniforme ( $v_e = cte, \omega_e = 0$ )
- Si  $R'$  est accéléré ou en rotation par rapport à  $R$  ( $v_e \neq cte$  et/ou  $\omega_e \neq 0$ ) alors  $R'$  n'est pas un référentiel galiléen



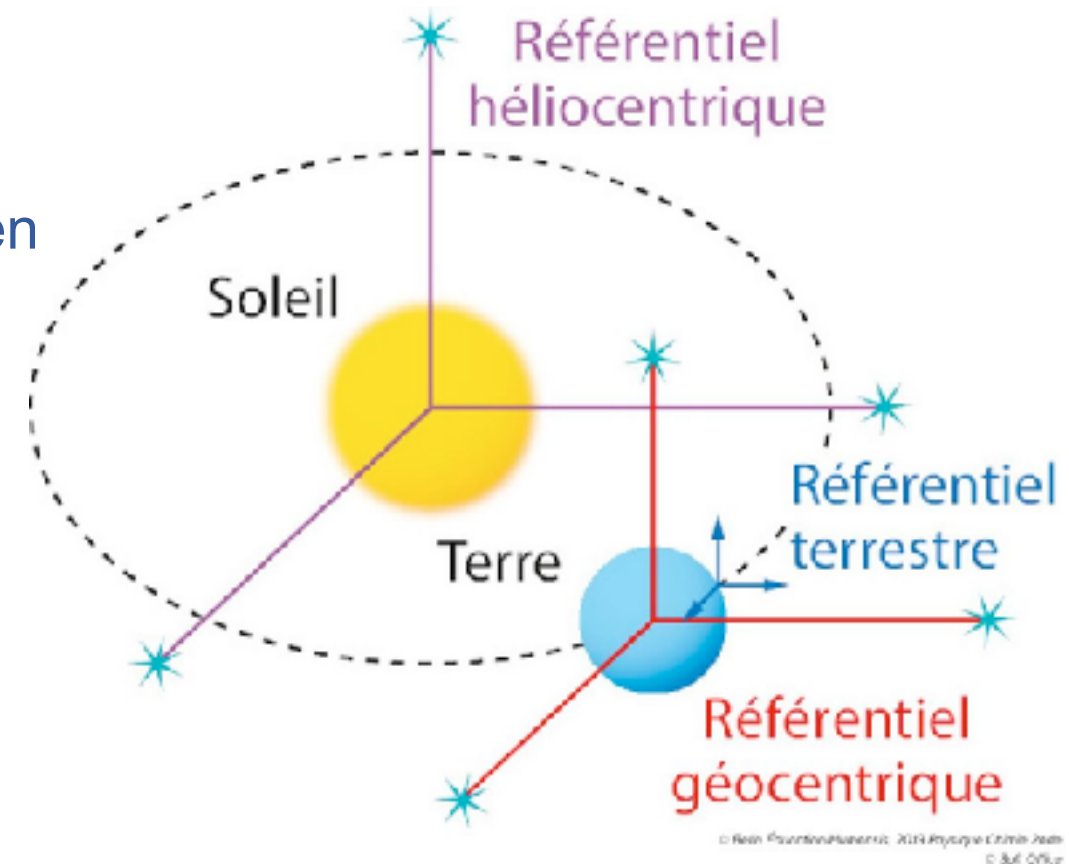
## 2.1. Introduction

### Example :

Le référentiel d'un train en mouvement (accélération et/ou rotation)  
=> est non galiléen

Le référentiel terrestre, n'est pas un référentiel galiléen  
 $R$  = référentiel héliocentrique, géocentrique  
 $R'$  = référentiel terrestre (rotation)

Référence héliocentrique galiléen ???



## 2. Référentiels accélérés

### 2.1. Introduction

Sur Terre, nous sommes dans un référentiel en mouvement donc non-galiléen  
⇒ c'est un *référentiel en rotation à vitesse angulaire constante*

#### Conséquence :

- a) Tout objet placé dans ce référentiel subit une accélération, appelée *accélération d'inertie* (ou encore appelée « *d'entraînement* », « *centrifuge* »)
- b) La trajectoire d'un objet en mouvement, telle qu'observée depuis la Terre, présente une déviation systématique par rapport à la trajectoire calculée tenant compte seulement du champ de pesanteur (2<sup>nd</sup> loi de Newton).
  - ➡ Cette trajectoire peut être décrite en tenant compte d'une accélération supplémentaire dite *accélération de Coriolis*

## 2. Référentiels accélérés

### 2.1. Introduction

Donc ....

La 2<sup>nd</sup> loi de Newton (qui sera présenté lors des prochaines semaines)

$$m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}_{ext}$$

ne s'applique pas dans un référentiel en rotation ou dans un référentiel en accélération de translation - mais on peut y apporter des corrections!!!

*Nous allons déterminer les expressions de la vitesse et de l'accélération dans des référentiels en rotation afin de pouvoir décrire la trajectoire observée.*

## 2.1. Introduction

- Trajectoire dans un référentiel en rotation

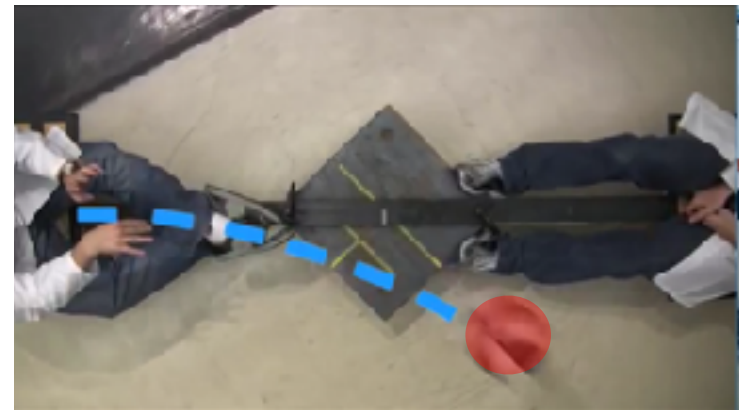
### Le manège



trajectoire vue  
dans le référentiel  
de la salle

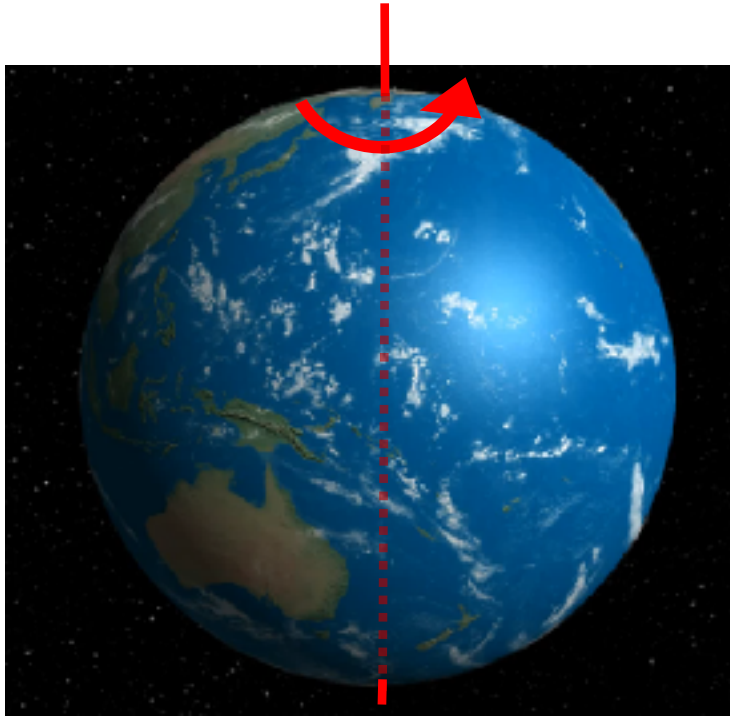


trajectoire vue  
dans le référentiel  
de la plateforme  
tournante



## 2.1. Introduction

- La Terre est un référentiel en rotation



La terre tourne  
à la vitesse angulaire  $\Omega$



Déviaton due à la rotation de la terre :  
Etude de la trajectoire d'un objet lancé  
vers le Sud/vers le Nord

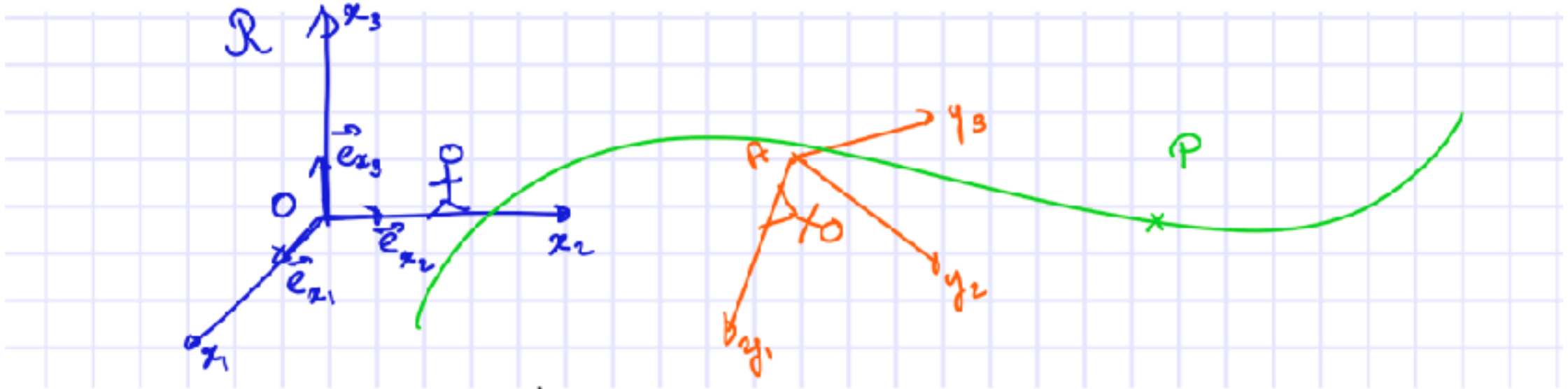
## 2.2. Accélération d'inertie et accélération de Coriolis

- Notation et détermination de la position/vitesse/accélération

référentiel  $\mathcal{R}$  fixe, muni du repère cartésien  $(O, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$

référentiel  $\mathcal{R}'$  muni du repère cartésien  $(A, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)$  en mouvement dans  $\mathcal{R}$ .

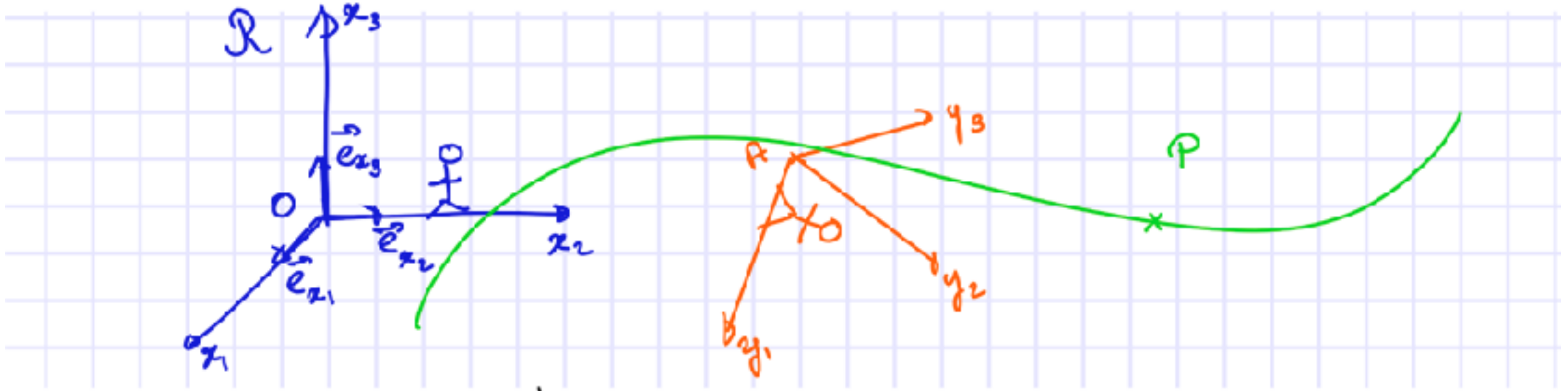
On notera  $\mathbf{e}_{xj}$  respectivement  $\mathbf{e}_{yj}$  les vecteurs unitaires de ces deux repères.



position/vitesse/accélération ???

## 2.2. Accélération d'inertie et accélération de Coriolis

- Notation et détermination de la position/vitesse/accélération



Dans  $\mathcal{R}$  :  $\vec{OP} = \sum_i x_i \vec{e}_{x_i}$        $\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \sum_i \dot{x}_i \vec{e}_{x_i}$        $\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \sum_i \ddot{x}_i \vec{e}_{x_i}$

Dans  $\mathcal{R}'$  :  $\vec{AP} = \sum_i y_i \vec{e}_{y_i}$        $\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) = \sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i}$        $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = \sum_i \ddot{y}_i \vec{e}_{y_i}$

## 2.2. Accélération d'inertie et accélération de Coriolis

### ■ Notation et détermination de la position/vitesse/accélération

$$\text{Dans } \mathcal{R} : \quad \overrightarrow{OP} = \sum_i x_i \vec{e}_{x_i} \quad \vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \sum_i \dot{x}_i \vec{e}_{x_i} \quad \vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \sum_i \ddot{x}_i \vec{e}_{x_i}$$

$$\text{Dans } \mathcal{R}' : \quad \overrightarrow{AP} = \sum_i y_i \vec{e}_{y_i} \quad \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) = \sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i} \quad \vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = \sum_i \ddot{y}_i \vec{e}_{y_i}$$

On sépare le mouvement de  $\mathcal{R}'$  dans  $\mathcal{R}$  en 2 composantes: *une rotation et une translation*.

- La **translation** donne le mouvement de A dans  $\mathcal{R}$ .

- La **rotation** c'est la rotation des axes ( $y_j$ ) par rapport aux axes ( $x_i$ ).

On appelle  $\vec{\omega}$  le vecteur rotation.

Les vecteurs  $\vec{e}_{y_i}$  changent dans  $\mathcal{R}$ .

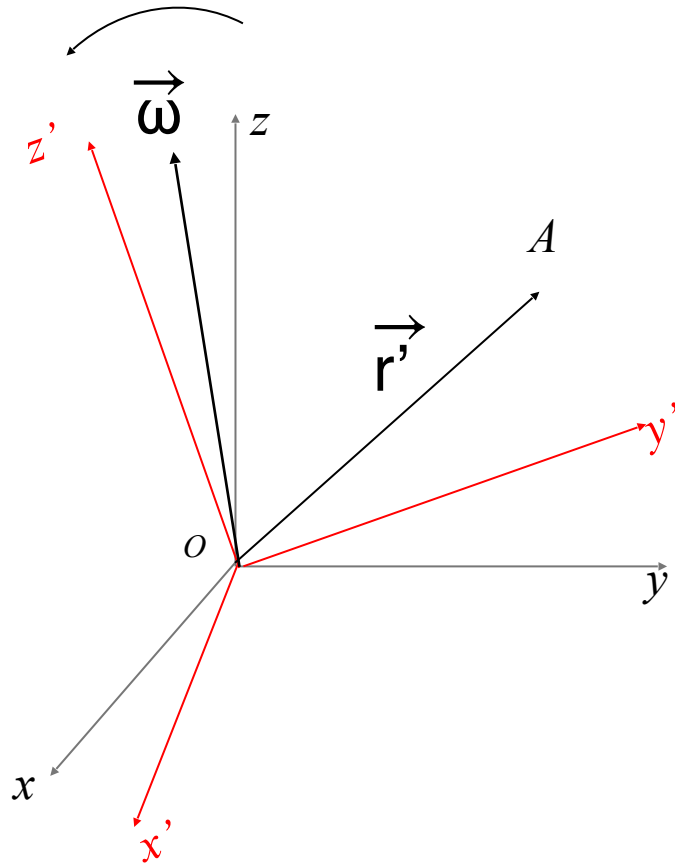
On obtient leur dérivée par:

$$\frac{d\vec{e}_{y_i}}{dt} = \dot{\vec{e}}_{y_i} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_{y_i}$$

## 2.2. Accélération d'inertie et accélération de Coriolis

### ■ Introduction : **repère en rotation** dans un repère fixe

Calcul de la vitesse d'un point A, dans un repère  $\mathcal{R}'$  attaché à un référentiel en rotation uniforme ( $\omega$ ), exprimée dans un repère  $\mathcal{R}$  attaché à un référentiel fixe (galiléen)



$\mathcal{R}'$  en rotation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$   
( $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  ont la même origine).

- **Si A est au repos** dans  $\mathcal{R}'$ ,  
alors A présente un mouvement de rotation  
dans  $\mathcal{R}$  avec une vitesse telle que

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

- **Si A se déplace à la vitesse  $v'$**  dans  $\mathcal{R}'$ ,  
alors A aura la vitesse  $v$  dans  $\mathcal{R}$  telle que

$$\vec{v} = \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right) = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

## 2.2. Accélération d'inertie et accélération de Coriolis

### ■ Introduction : repère en rotation dans un repère fixe

A au repos dans  $\mathcal{R}'$ .  $A$  se déplace avec un mouvement circulaire uniforme dans  $\mathcal{R}$  et l'accélération est donnée par

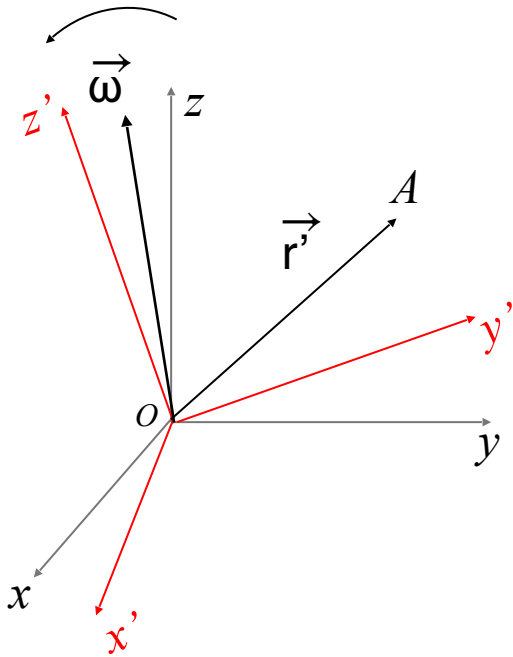
$$\vec{a} \text{ (rotation)} = \vec{\omega} \wedge \vec{v} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

A se déplace dans  $\mathcal{R}'$  avec une vitesse  $v'$  constante.  
Quelle est l'accélération dans  $\mathcal{R}$  ?

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ avec } \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \wedge \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)$$

$$\text{dans } \mathcal{R} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}' \\ \vec{\omega} \wedge \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right) = \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') \end{array} \right.$$

Finalement:  $\vec{a} = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$

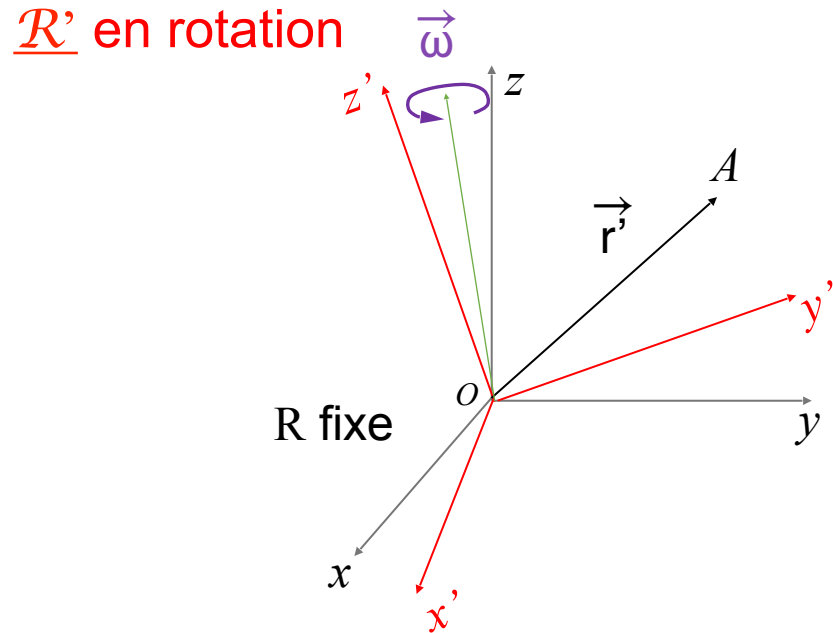


$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$  est faux

## 2.2. Accélération d'inertie et accélération de Coriolis

- Introduction : repère en rotation dans un repère fixe

Vitesse et Accélération exprimées dans un repère fixe  $\mathcal{R}$  pour un point  $A$  en mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}'$  en rotation



### Vitesse du point $A$

dans  $\mathcal{R}'$ :  $\vec{v}'$

dans  $\mathcal{R}$ :  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$

### Accélération du point $A$

dans  $\mathcal{R}'$ :  $\vec{a}'$

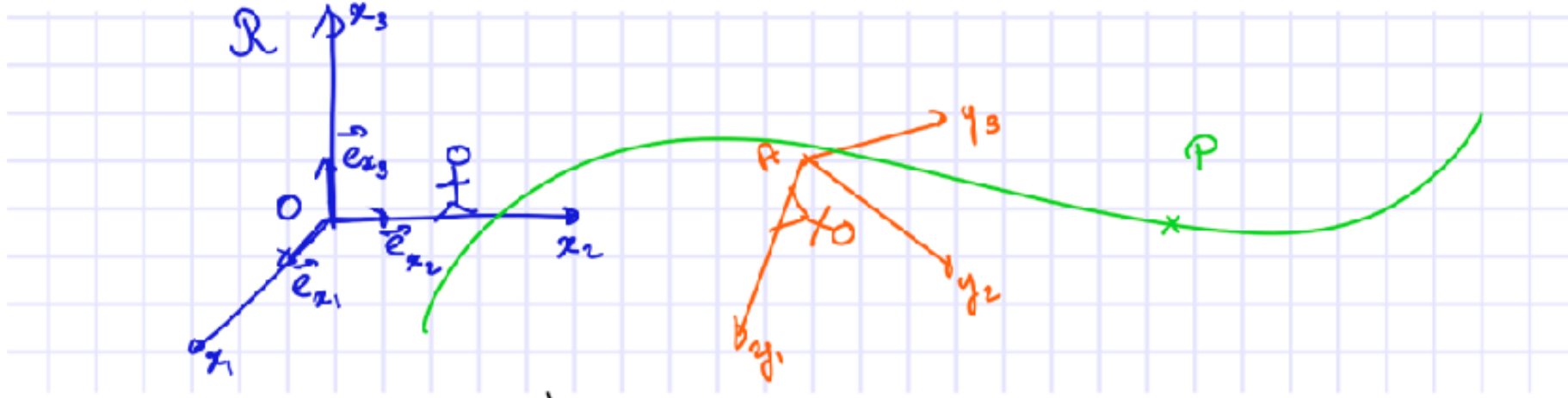
dans  $\mathcal{R}$ :  $\vec{a} = \vec{a}' + 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$

Acceleration  
De Coriolis

Acceleration  
D'entraînement

## 2.2. Accélération d'inertie et accélération de Coriolis

- Repère en rotation et translation dans un repère fixe



### Position du point $P$

dans  $\mathcal{R}'$ :  $\vec{AP}$

dans  $\mathcal{R}$ :  $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$

### Vitesse du point $P$

dans  $\mathcal{R}'$ :  $\vec{v}'(P)$

dans  $\mathcal{R}$ :  $\vec{v}(P) = \vec{v}(A) + \vec{v}'(P) + \vec{\omega} \wedge \vec{AP}$

## Cas Général

$$\vec{v}_R(P) = \vec{v}_R(A) + \vec{v}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge \vec{AP} \quad \rightarrow \text{dérivation}$$

$$\vec{a}_R(P) = \vec{a}_R(A) + \frac{d}{dt} \left[ \sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i} \right] + \frac{d}{dt} \left[ \vec{\omega} \wedge \sum_i y_i \vec{e}_{y_i} \right]$$

$$= \vec{a}_R(A) + \sum_i \frac{d}{dt} (\dot{y}_i \vec{e}_{y_i}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \sum_i y_i \vec{e}_{y_i} + \vec{\omega} \wedge \sum_i \frac{d}{dt} (y_i \vec{e}_{y_i})$$

$$= \vec{a}_R(A) + \sum_i (\ddot{y}_i \vec{e}_{y_i} + \dot{y}_i \dot{\vec{e}}_{y_i}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AP} + \vec{\omega} \wedge \sum_i (\dot{y}_i \vec{e}_{y_i} + y_i \dot{\vec{e}}_{y_i})$$

$$= \vec{a}_R(A) + \sum_i \ddot{y}_i \vec{e}_{y_i} + \sum_i \dot{y}_i \dot{\vec{e}}_{y_i} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AP} + \vec{\omega} \wedge \sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i} + \vec{\omega} \wedge \left[ \sum_i y_i \dot{\vec{e}}_{y_i} \right]$$

$$= \vec{a}_R(A) + \vec{a}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge \sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AP} + \vec{\omega} \wedge \sum_i \dot{y}_i \vec{e}_{y_i} + \vec{\omega} \wedge \left[ \vec{\omega} \wedge \sum_i y_i \vec{e}_{y_i} \right]$$

$$\vec{a}_R(P) = \vec{a}_R(A) + \vec{a}_{R'}(P) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AP} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{R'}(P) + \vec{\omega} \left( \vec{\omega} \wedge \vec{AP} \right)$$

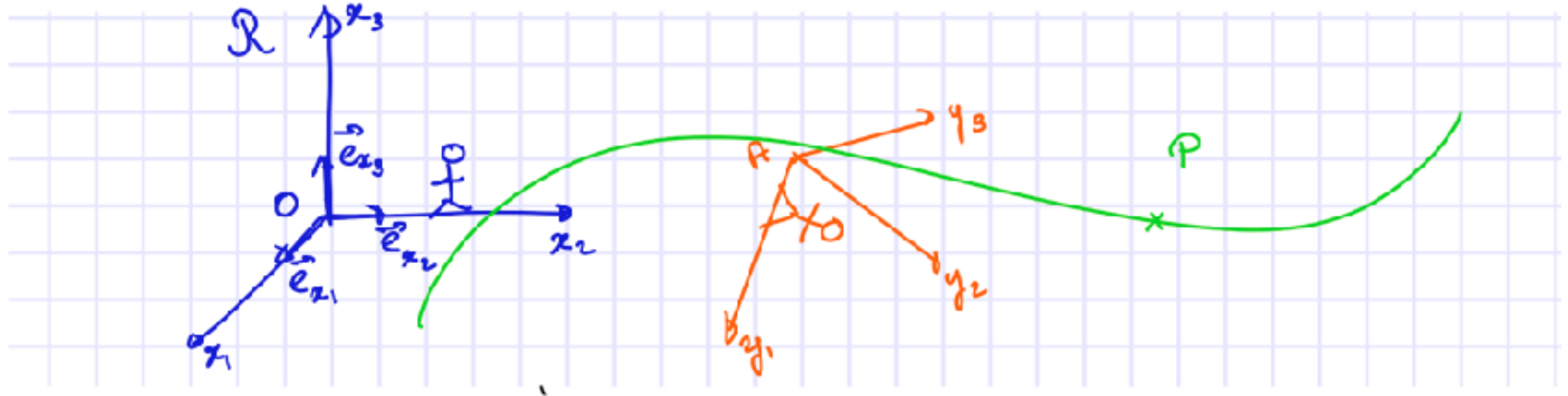
## 2.2. Accélération d'inertie et accélération de Coriolis

### ■ Repère en rotation et translation dans un repère fixe

#### Position du point $P$

dans  $\mathcal{R}'$ :  $\vec{AP}$

dans  $\mathcal{R}$ :  $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$



#### Vitesse du point $P$

dans  $\mathcal{R}'$ :  $\vec{v}'(P)$

dans  $\mathcal{R}$ :  $\vec{v}(P) = \vec{v}(A) + \vec{v}'(P) + \vec{\omega} \wedge \vec{AP}$

#### Accélération du point $P$

$\mathcal{R}'$ :  $\vec{a}'(P)$

$\mathcal{R}$ :  $\vec{a}(P) = \vec{a}'(P) + \vec{a}(A) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'(P)$