

Semaine 0 – 10 Sept 2024

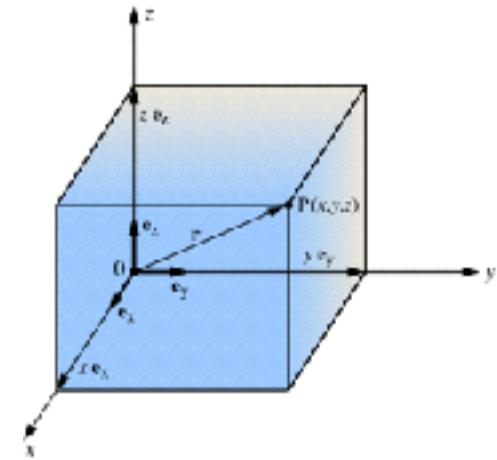
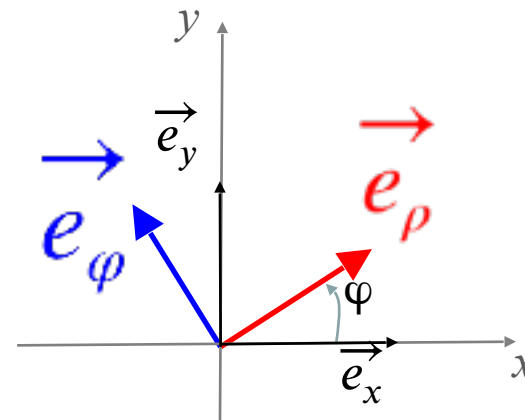
1. Introduction

1.3. Cinématique

(a) Position, vitesse, accélération, trajectoire

(b) Coordonnées cartésiennes

(c) Coordonnées polaires



1.3. Cinématique

■ Repère, Référentiel

Cinématique = *description des mouvements*.

Référentiel : système de référence par rapport auquel on mesure le mouvement

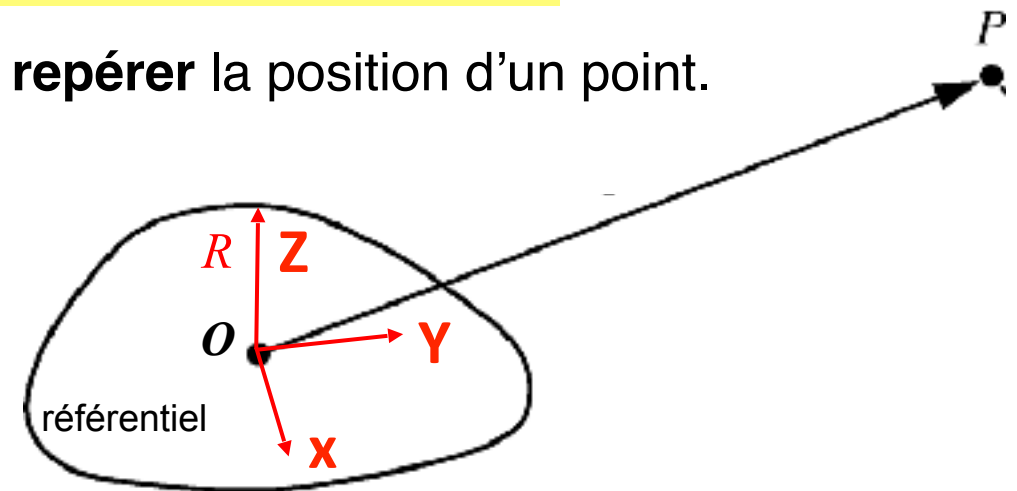
Origine du référentiel : un **point particulier fixe** dans le référentiel par rapport auquel on définira la position d'un objet.

Repère : systèmes de **vecteurs unitaires formant un trièdre orthonormé direct**, par exemple $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ dans lequel on va exprimer le mouvement.

Attention !! le repère n'est pas forcément fixe dans le référentiel, et dans un même référentiel, on peut utiliser plusieurs repères.

Coordonnées : Ensemble des grandeurs qui permettent de **repérer** la position d'un point.

Exemple : coordonnées cartésiennes ; coordonnées GPS...



1.3. Cinématique

■ Vecteurs et mouvement d'un point P

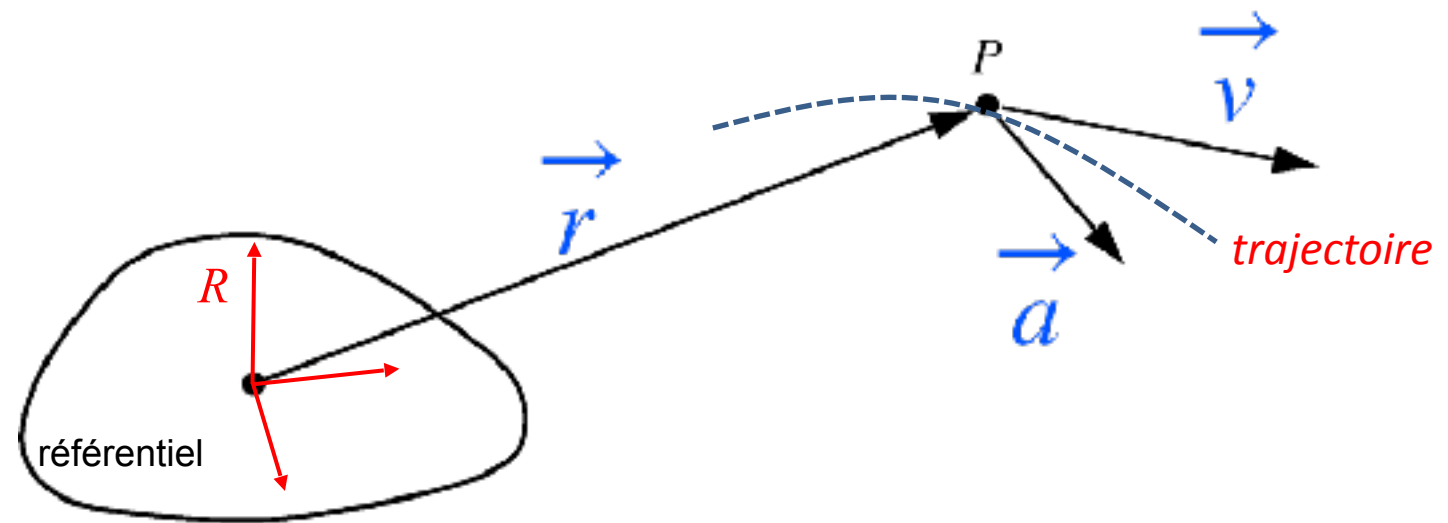
On peut associer plusieurs vecteurs à un seul point P en mouvement:

- le vecteur « position » $\vec{r}$
- le vecteur « vitesse » $\vec{v}$
- le vecteur « accélération » $\vec{a}$

m
 m/s
 m/s^2

↓ Dérivée par rapport au temps
↓ Dérivée par rapport au temps

La **position** du point P est repérée par les coordonnées du vecteur “position” $\vec{r}$ dans le repère R associé au référentiel



1.3. Cinématique

■ Vitesse et accélération

- **Vitesse** = variation du **vecteur position** par rapport au temps
- **Accélération** = variation du **vecteur vitesse** par rapport au temps

- le vecteur « position » $\vec{r}$

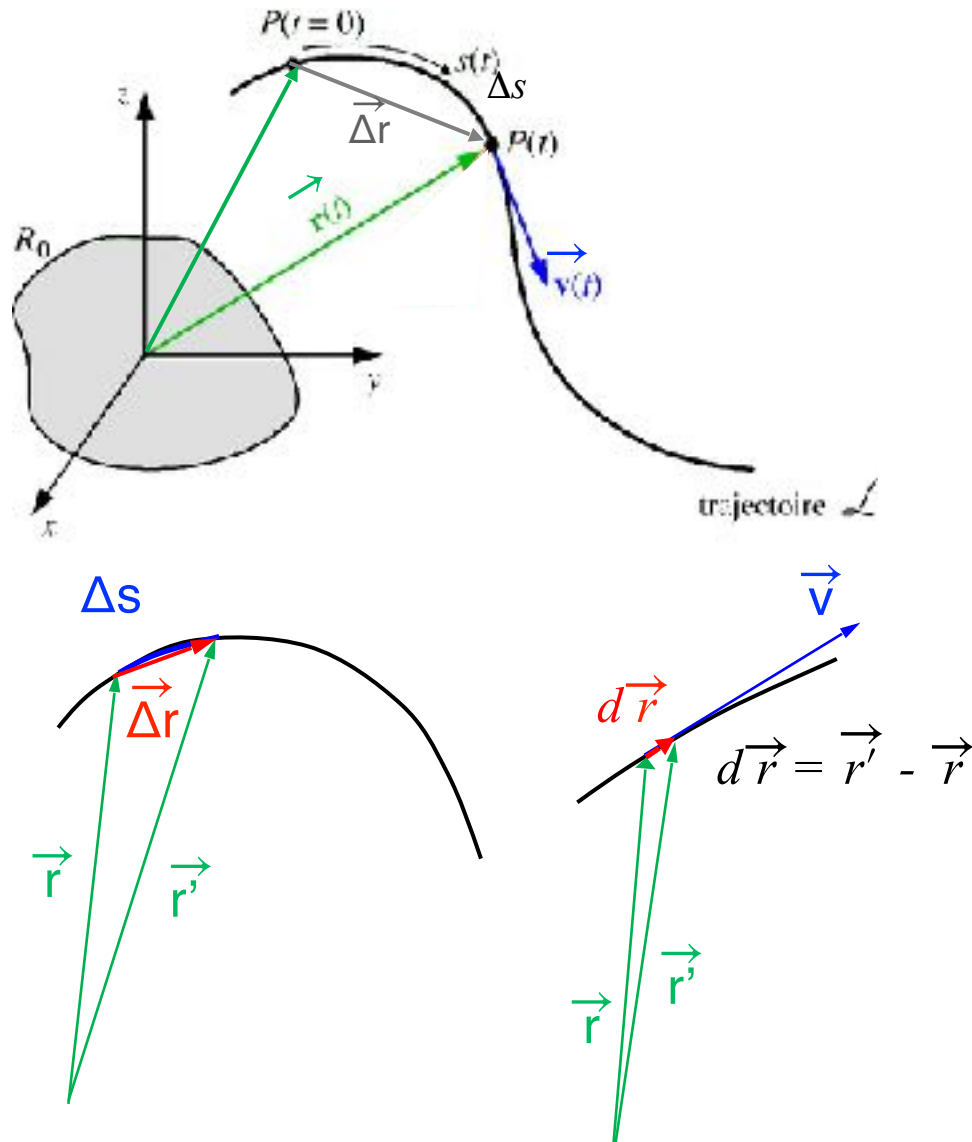
- le vecteur « vitesse » $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

- le vecteur « accélération » $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$

Attention : la **norme** d'un **vecteur peut rester constante et sa direction changer**. Dans ce cas là, le vecteur n'est donc pas constant et sa dérivée par rapport au temps n'est pas nulle.

1.3. Cinématique

■ Vecteur **vitesse** instantanée



Vitesse moyenne entre $P(t=0)$ et $P(t)$:

$$v_{moy} = \Delta s / \Delta t$$

Vitesse instantanée :

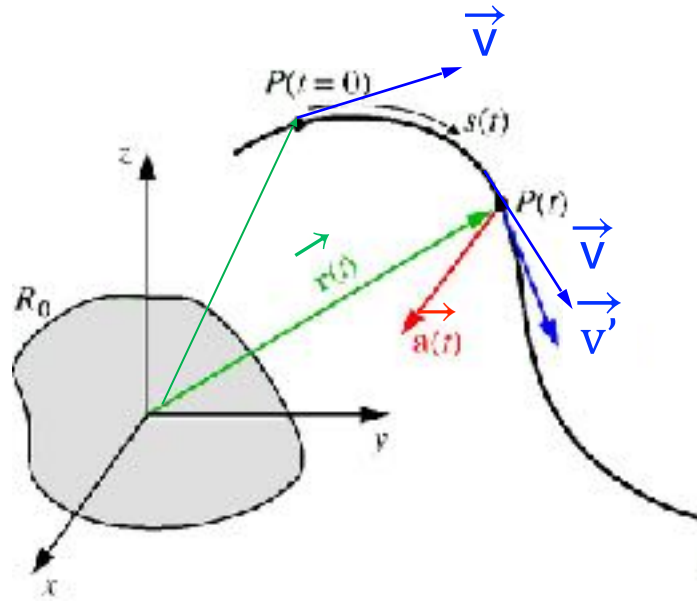
$$\Delta t \rightarrow 0 \text{ alors } \Delta s \rightarrow \|\Delta \vec{r}\|$$

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Le vecteur « vitesse instantanée » est dirigé selon la direction de la tangente à la courbe (trajectoire)

1.3. Cinématique

■ Vecteur **accélération** instantanée

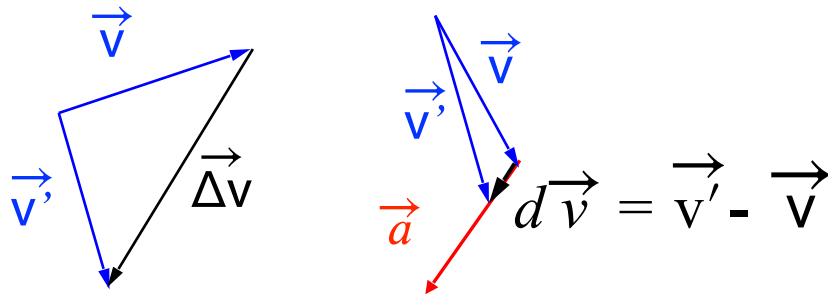


Accélération moyenne entre $P(t=0)$ et $P(t)$:

$$a_{\text{moy}} = \Delta v / \Delta t$$

Accélération instantanée :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

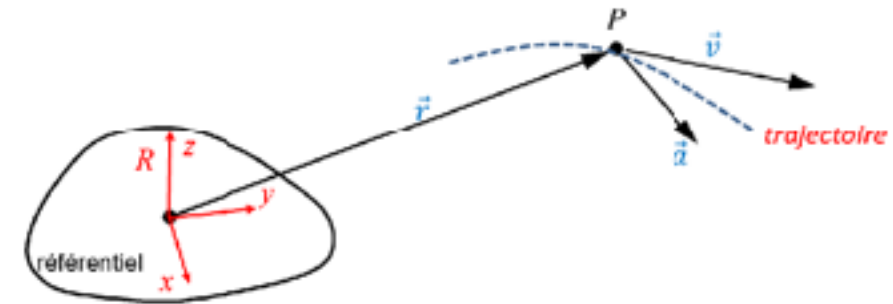


Le vecteur «accélération instantanée» est lié au changement de direction et est dirigé vers l'intérieur de la courbe (c'est-à-dire du côté concave)

1.3. Cinématique

Pour étudier la trajectoire d'un objet, il faut un **système de coordonnées** afin de suivre sa position en fonction du temps. Il faudra choisir celui le mieux adaptés au mouvement considéré :

- *coordonnées cartésiennes*
- *coordonnées polaires*
- *coordonnées curvilignes (repère de Frenet)*
- *coordonnées cylindriques*
- *coordonnées sphériques*



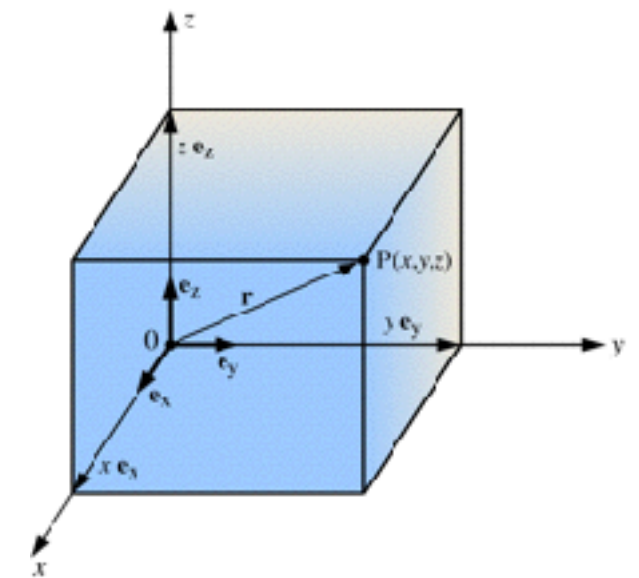
Pour chaque système de coordonnées, un **repère** permet d'obtenir les composantes des vecteurs position, vitesse, et accélération.

Le repère doit être orthonormé direct.

$\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ forment une base orthonormée directe (règle du tire bouchon)

$\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ sont dits « vecteurs de base » du repère

$\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ sont des vecteurs unitaires (de norme 1)
et formant des angles à 90°



1.3.b Coordonnées cartésiennes

Vecteur position :

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

$$\vec{r} \longrightarrow \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Norme du vecteur position

Vecteur vitesse :

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} v_x = \dot{x}(t) \\ v_y = \dot{y}(t) \\ v_z = \dot{z}(t) \end{cases}$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Norme de la vitesse

Vecteur accélération :

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} a_x = \ddot{x}(t) \\ a_y = \ddot{y}(t) \\ a_z = \ddot{z}(t) \end{cases}$$

$$= \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

Norme de l'accélération

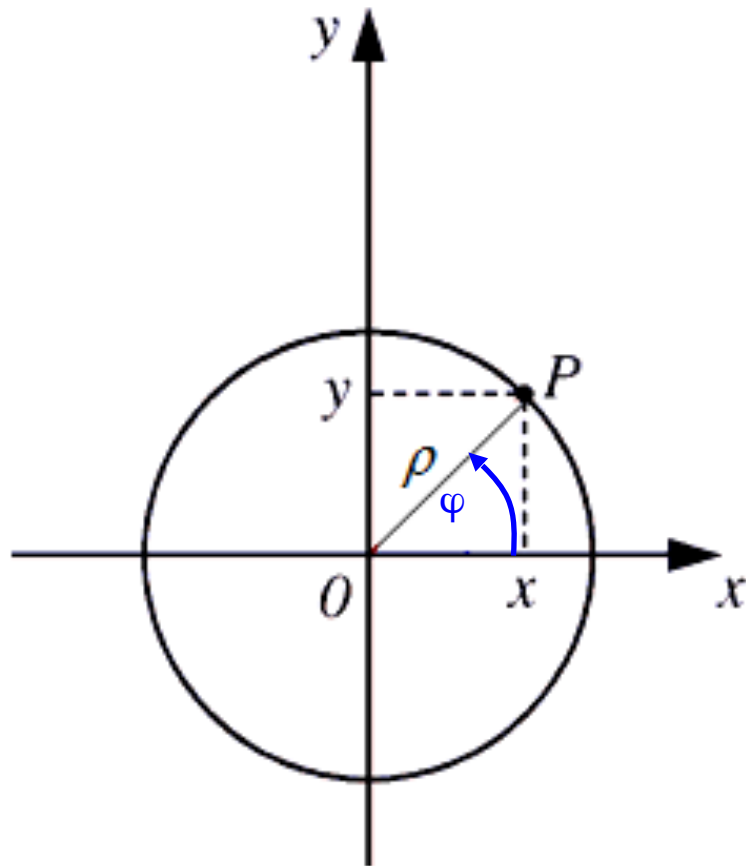
On dérive

On dérive

1.3.b Coordonnées cartésiennes

Dans certains cas, les coordonnées cartésiennes ne sont pas les plus appropriées

- Exemple : calcul des composantes a_x et a_y de l'accélération en coordonnées cartésiennes pour un mouvement circulaire en fonction du rayon ρ et de l'angle φ



On note $\dot{\varphi}$ et $\dot{\rho}$ les dérivées temporelles de φ et ρ

Expression de x et y en fonction du rayon ρ et de l'angle φ :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

Expression des composantes du vecteur vitesse :

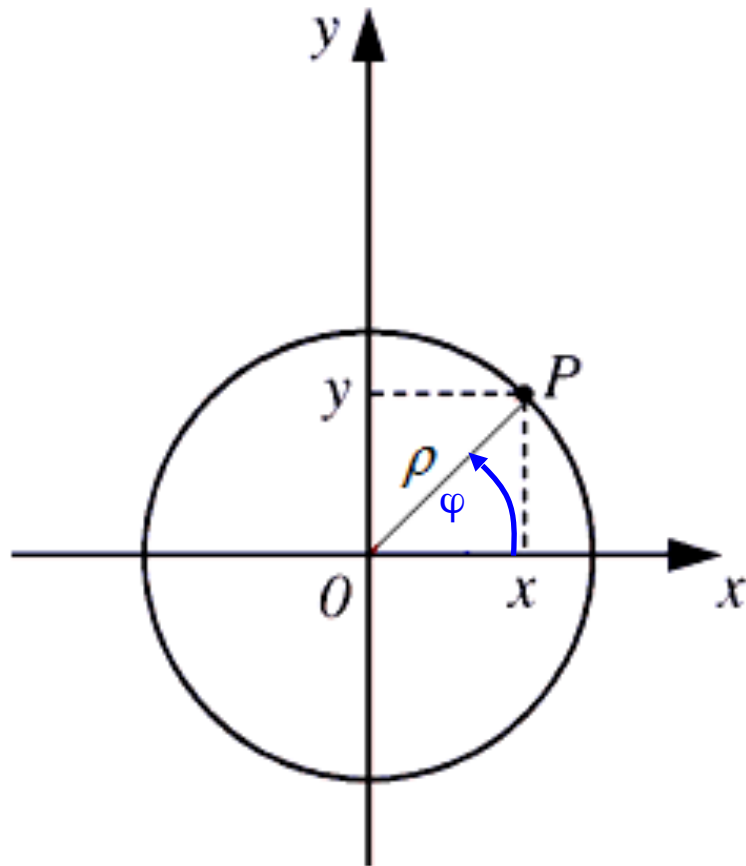
$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \end{cases}$$

Calcul

1.3.b Coordonnées cartésiennes

Dans certains cas, les coordonnées cartésiennes ne sont pas les plus appropriées

- Exemple : calcul des composantes a_x et a_y de l'accélération en coordonnées cartésiennes pour un mouvement circulaire en fonction du rayon ρ et de l'angle φ



On note $\dot{\varphi}$ et $\dot{\rho}$ les dérivées temporelles de φ et ρ

Expression de x et y en fonction du rayon ρ et de l'angle φ :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

Expression des composantes du vecteur vitesse :

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = \rho (-\dot{\varphi} \sin \varphi) + \dot{\rho} \cos \varphi = -\rho \dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\rho} \cos \varphi \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \rho (\dot{\varphi} \cos \varphi) + \dot{\rho} \sin \varphi = \rho \dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\rho} \sin \varphi \end{cases}$$

1.3.b Coordonnées cartésiennes

Expression des composantes du vecteur accélération :

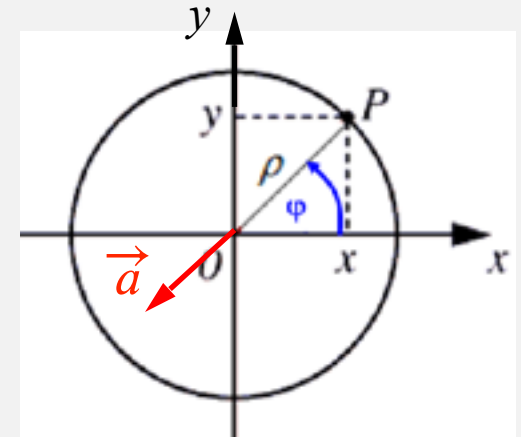
$$\left\{ \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} [-\rho \dot{\varphi} \sin\varphi + \dot{\rho} \cos\varphi] = -\rho [\ddot{\varphi} \sin\varphi + \dot{\varphi} \dot{\varphi} \cos\varphi] - \dot{\rho} (\dot{\varphi} \sin\varphi) + \ddot{\rho} \cos\varphi - \dot{\rho} (\dot{\varphi} \sin\varphi) \\ &= -\rho [\ddot{\varphi} \sin\varphi + \dot{\varphi}^2 \cos\varphi] - 2\dot{\rho} \dot{\varphi} \sin\varphi + \ddot{\rho} \cos\varphi \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt} [\rho \dot{\varphi} \cos\varphi + \dot{\rho} \sin\varphi] = \rho [\ddot{\varphi} \cos\varphi - \dot{\varphi} \dot{\varphi} \sin\varphi] + \dot{\rho} (\dot{\varphi} \cos\varphi) + \ddot{\rho} \sin\varphi + \dot{\rho} (\dot{\varphi} \cos\varphi) \\ &= \rho [\ddot{\varphi} \cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi] + 2\dot{\rho} \dot{\varphi} \cos\varphi + \ddot{\rho} \sin\varphi \end{aligned} \right.$$

Cas particulier : mouvement circulaire uniforme (ρ et $\dot{\varphi}$ constants) $\Rightarrow \dot{\rho} = 0, \ddot{\rho} = 0$, et $\ddot{\varphi} = 0$

$$\begin{cases} a_x = -\rho \dot{\varphi}^2 \cos\varphi \\ a_y = -\rho \dot{\varphi}^2 \sin\varphi \end{cases}$$

soit $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \rho \dot{\varphi}^2 = \rho \omega^2$

ω : **vitesse
angulaire**



1.3.c Coordonnées polaires

<https://www.geogebra.org/m/qqqremda>

Les expressions des composantes du vecteur accélération sont compliquées en coordonnées cartésiennes pour un mouvement circulaire quelconque.

Il existe un système de coordonnées plus approprié qui permet de simplifier les expressions des vecteurs vitesse et accélération pour un mouvement circulaire dans un plan.

Coordonnées cartésiennes

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$$

$$\begin{cases} a_x = -\rho [\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi] - 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \sin \varphi + \ddot{\rho} \cos \varphi \\ a_y = \rho [\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi] + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \cos \varphi + \ddot{\rho} \sin \varphi \end{cases}$$

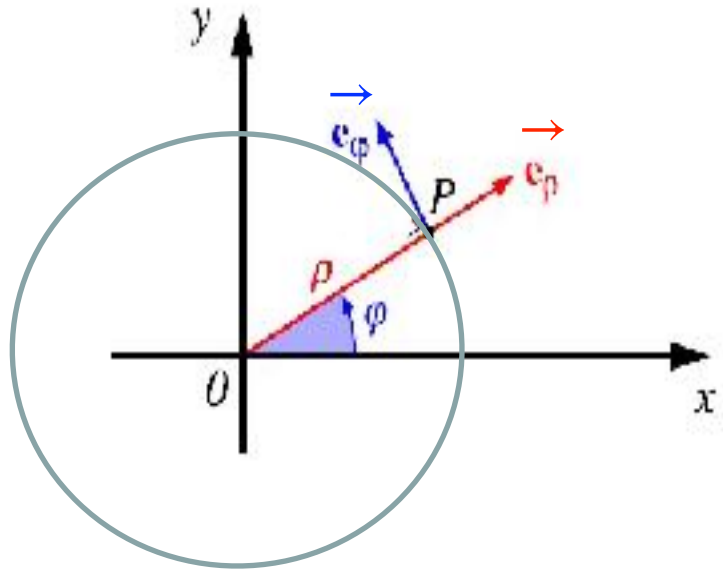
Coordonnées polaires

$$\vec{a} = a_\rho \vec{e}_\rho + a_\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 \\ a_\varphi = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi} \end{cases}$$

⇒ Il faut définir maintenant ce que sont $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$

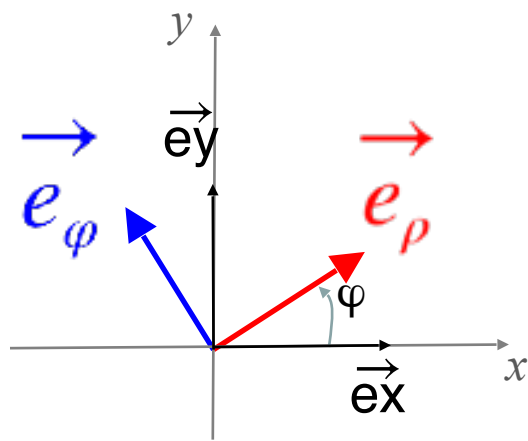
1.3.c Coordonnées polaires



Le système de coordonnées polaires est un système de coordonnées à 2 dimensions:

La position du point P est définie par sa distance ρ à l'origine O du repère et par un angle φ . φ est défini entre l'axe Ox et un axe, appelé axe polaire, qui porte le vecteur $\overrightarrow{OP}$.

Les vecteurs unitaires orthonormés sont $\mathbf{e}_\rho$ et $\mathbf{e}_\varphi$



$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\rho \perp \vec{e}_\varphi$$

Expressions de

$$\vec{e}_\rho \text{ et } \vec{e}_\varphi$$

dans le repère $\vec{e}_x, \vec{e}_y$

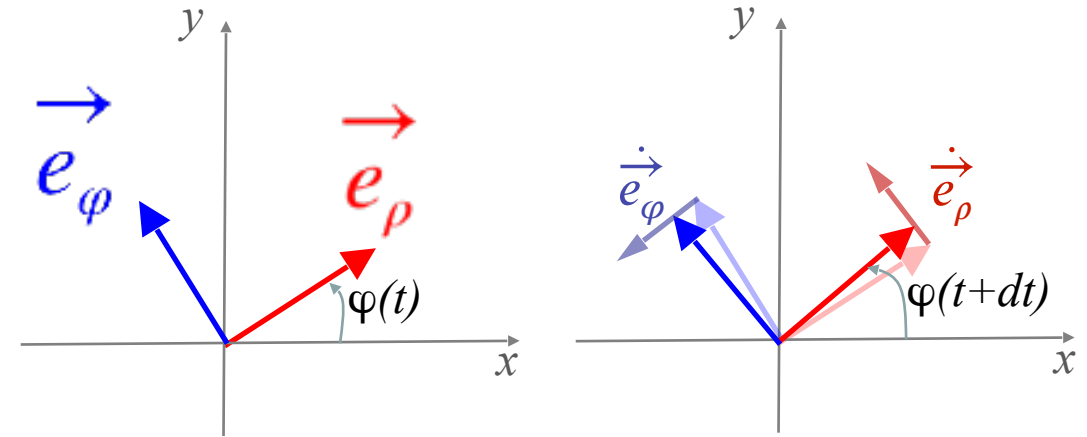


$$\vec{e}_\rho \text{ et } \vec{e}_\varphi$$

dépendent du temps car φ dépend du temps

1.3.c Coordonnées polaires

- $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$:
- dépendent du temps
 - forment une base orthonormée
- $\vec{e}_\rho$:
- forme un angle $\varphi(t)$ avec l'axe Ox



Dérivées par rapport au temps des vecteurs $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$:

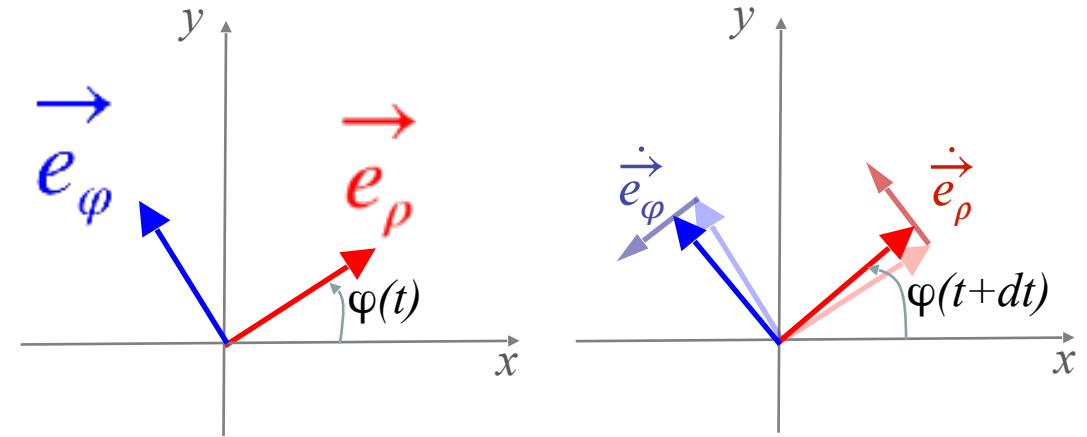
$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y \longrightarrow \dot{\vec{e}}_\rho =$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y \longrightarrow \dot{\vec{e}}_\varphi =$$

Calcul

1.3.c Coordonnées polaires

- $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$:
 - dépendent du temps
 - forment une base orthonormée
- $\vec{e}_\rho$:
 - forme un angle $\varphi(t)$ avec l'axe Ox



Dérivées par rapport au temps des vecteurs $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$:

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y \longrightarrow \dot{\vec{e}}_\rho = -\dot{\varphi} \sin\varphi \vec{e}_x + \dot{\varphi} \cos\varphi \vec{e}_y = \dot{\varphi} \left[-\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y \right] = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y \longrightarrow \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \cos\varphi \vec{e}_x - \dot{\varphi} \sin\varphi \vec{e}_y = -\dot{\varphi} \left[\cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y \right] = -\dot{\varphi} \vec{e}_\rho$$

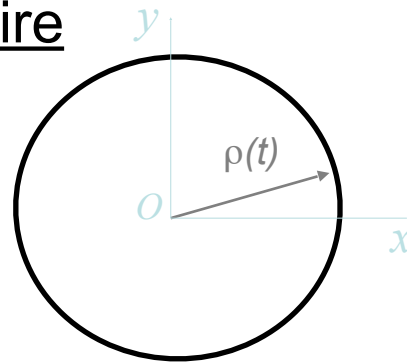
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_\rho &= \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi & \dot{\vec{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi} \vec{e}_\rho \end{aligned}}$$

On remarque que $\dot{\vec{e}}_\rho \perp \vec{e}_\rho$ et $\dot{\vec{e}}_\varphi \perp \vec{e}_\varphi$ (car $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$ sont de norme constante)

1.3.c Coordonnées polaires

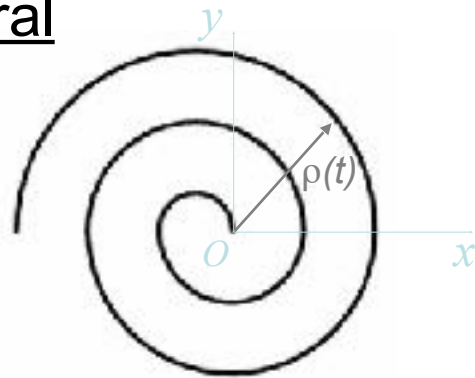
- **Exemple** d'équations du mouvement en coordonnées polaires

Mouvement circulaire



$$\vec{r}(t) = \rho(t) \vec{e}_\rho \quad \text{avec} \quad \rho(t) = \text{cte}$$

Mouvement en spirale



$$\vec{r}(t) = \rho(t) \vec{e}_\rho \quad \text{avec} \quad \rho(t) \neq \text{cte}$$

1.3.c Coordonnées polaires

Equation générale du mouvement :

$$\vec{r}(t) = \rho(t) \vec{e}_\rho$$

- **Vitesse** exprimée dans le repère $O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ en fonction de ρ et φ (ρ et φ dépendent du temps)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\vec{e}}_\rho \quad \text{avec} \quad \dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

d'où $\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_\rho \vec{e}_\rho + v_\varphi \vec{e}_\varphi \quad \left\{ \begin{array}{l} v_\rho = \dot{\rho} \\ v_\varphi = \rho \dot{\varphi} \end{array} \right.$$

- **Accélération** exprimée dans le repère. $O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ en fonction de ρ et φ

$$\frac{d}{dt} \vec{v}_\rho = \frac{d}{dt} \dot{\rho} \vec{e}_\rho = \dot{\rho} \dot{\vec{e}}_\rho + \ddot{\rho} \vec{e}_\rho = \underline{\dot{\rho} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi} + \underline{\ddot{\rho} \vec{e}_\rho}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{v}_\varphi = \frac{d}{dt} \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = \rho \left[\dot{\varphi} \dot{\vec{e}}_\varphi + \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi \right] + \dot{\rho} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = - \underline{\rho \dot{\varphi}^2 \vec{e}_\rho} + \underline{\rho \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi} + \underline{\dot{\rho} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 \\ a_\varphi = 2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi} \end{array} \right. \begin{array}{l} \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\varphi \end{array}$$