Physique Générale: Mécanique SV (traditionnel)

Prof. Jean-Paul Kneib

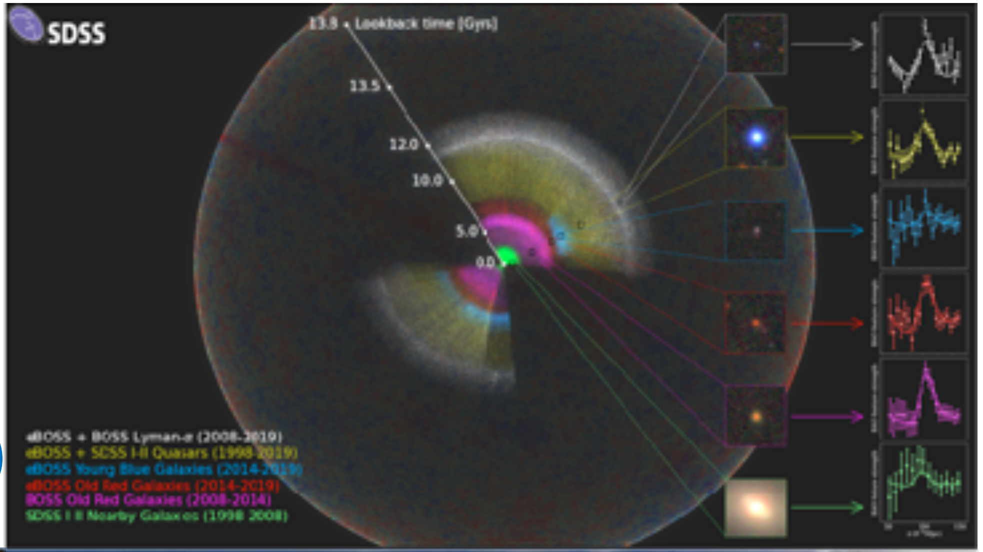
Directeur du Laboratoire d’Astrophysique

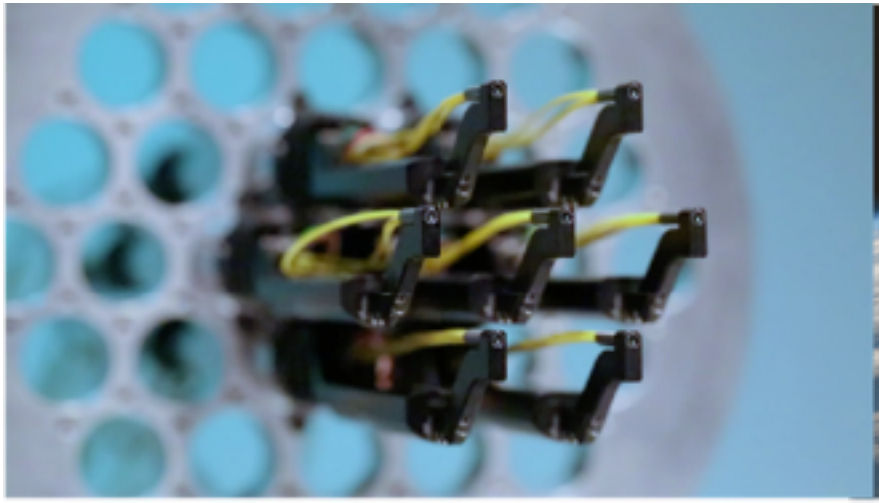
Directeur du EPFL Space Center

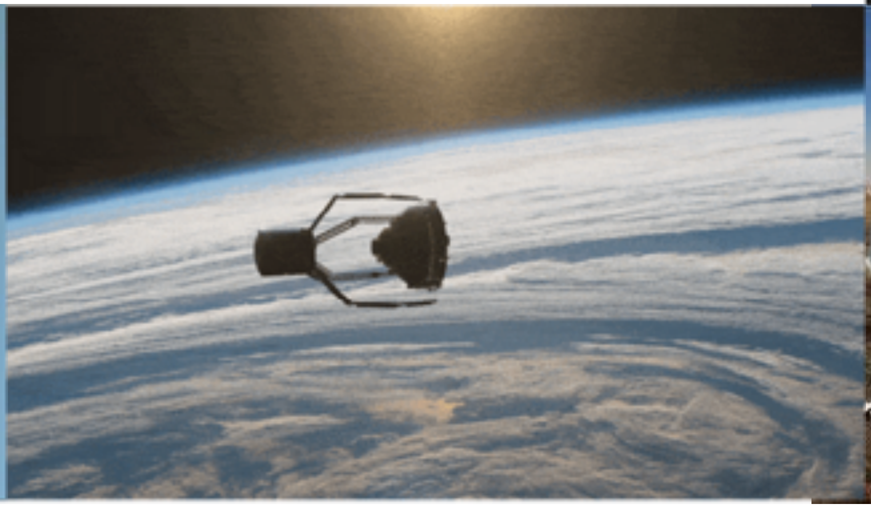
Leading Swiss SKAO Project

Dr. Yves Revaz:

Senior Scientist - LASTRO (Simulation/visualisation)







Mon CV

Classe Prépa au Lycée du Parc (Lyon)

SupAero - filière Espace

+Master d'Astrophysique & Techniques Spatiales (Toulouse)

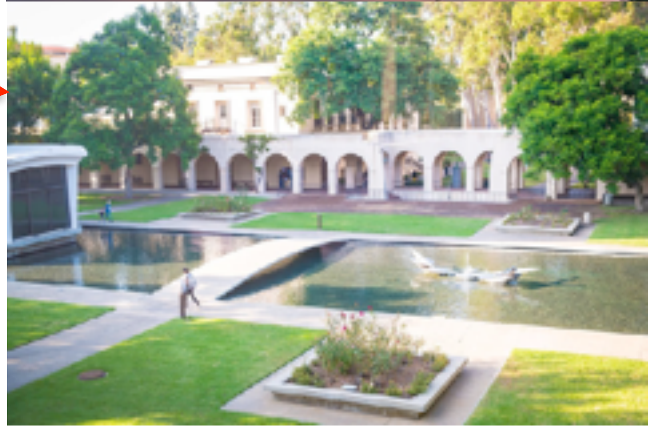
1993: **Thèse d'Astrophysique**

Postdoc à l'Observatoire de LaSilla au **Chili**

Postdoc à l'Université de **Cambridge**, UK

1996: Chargé de Recherche au **CNRS** à Toulouse

2002-2004: Prof Visiteur à **Caltech**



2004-2012: Directeur de Recherche au **CNRS** à Marseille

2012- Professeur d'Astrophysique à **l'EPFL**

Pourquoi la Physique?

Qu'est-ce que la Physique?

A quoi sert la Physique?

Pourquoi la Mécanique?

Pourquoi tant de Maths?

… **aussi très utile en SV** !

… et dans la vie de tous les jours !

Info Pratiques - 1 - Logistique

Classe traditionelle

Moodle: https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=16738

Cours en Amphi:

1. **Lundi 15:15 à 17:00 cours/experiences - CE1-4**

   (Jean-Paul Kneib ou Yves Revaz)

2. **Mardi 10:15 à 11:00 cours/experiences - CE1-4**

   (Jean-Paul Kneib ou Yves Revaz)

3. **Mercredi 16:15 à 17:00 cours/exercices - CE1-3**

   (Yves Revaz, Aurélien Verdier, Yoan Rappaz)

Info Pratiques - 1 - Logistique

Exercices en petites classe - tutorat - **CM 09; CO 017; CO 122; CO 123**

Mercredi 17:15 à 19:00 répartition en 4 classes de ~40 étudiant(e)s

suivi par des assistants étudiants (~4) et un assistant doctorant

La répartition entre les 4 classes sera annoncé mercredi en cours.

Info Pratiques - 2 - Logistique

Ce cours est aligné avec le cours de Cécile Hébert donné en **classe inversé**

– *même matière au même niveau*

– *mêmes séries d'exercices (en général)*

– *même examen*

Moodle du cours inversé:

https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=18235

A.SERWAY et J.W. JEWETT *
de boek

M. Alonso et E.J. Finn **
Dunod

J.Ph. Pérez ***
Dunod

J.Ph. Ansermet **(*)
PPUR

Livres disponibles
à la bibliothèque

Info Pratiques - 3 - Interactivité

Ce cours utilise **‘Ed’** pour les **quizzes + interactions diverses**

Si vous n’êtes pas déjà connecté:

enregistrez vous à partir du Moodle.

https://edstem.org/eu/courses/1457/discussion/

Info Pratiques - 4a - Exercices

Exercices, un peu de <u>méthode</u> !

Pour la résolution des exercices:

– ANALYSER le problème - *le comprendre*

– **faire un beau DESSIN** - *une figure vaut milles mots*

– résoudre ANALYTIQUEMENT - *numérique seulement si demandé*

Les **tuteurs (assistants)** sont là *pour vous **accompagner***,
pas pour vous donner la solution.
Profitez de leur expérience pour apprendre à travailler efficacement.

In case of emergency: les "super-tuteurs" (étudiants doctorants)

Info Pratiques - 4b - Exercices

– **Exercices sont cruciaux:** Il faut savoir les faire, pas les "apprendre !”

– **passez *longtemps* sur un exercice avant de regarder la solution.**

Laissez le, revenez-y, parlez en avec vos collègues/ami(e)s.

– **cherchez des informations complémentaires dans les livres/web**

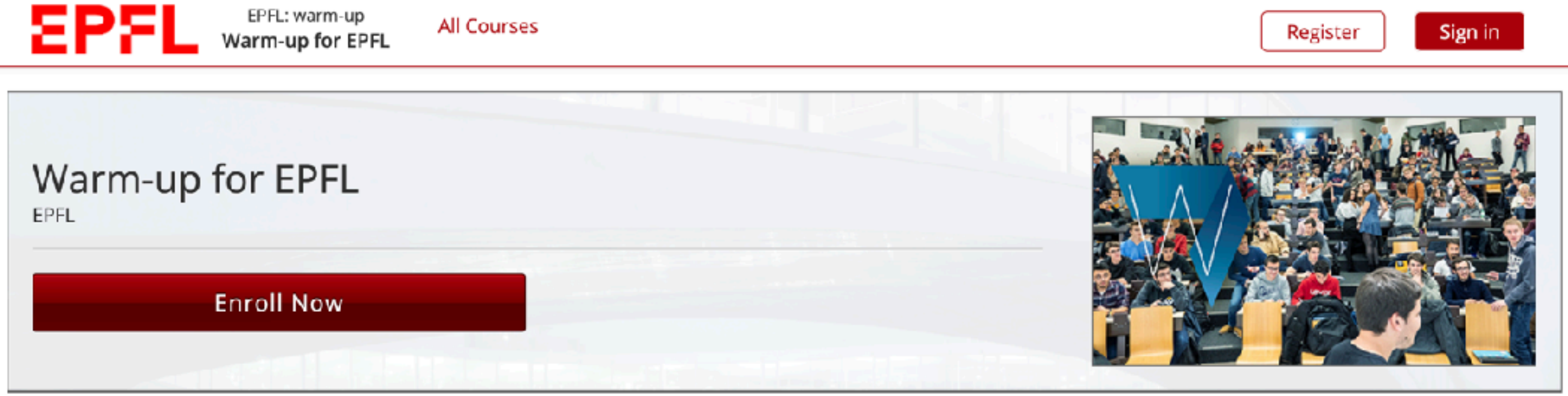
– **concentrez-vous ! Coupez votre téléphone!**

Info Pratiques - 5 - Savoir étudier

Important de réviser Régulièrement et Efficacement

Un bon investissement :

https://courseware.epfl.ch/courses/course-v1:EPFL+warm-up+2022/about



Info Pratiques - 6 - Examen

Examen :

Sujet : 3 exercices à résoudre en rédigeant !

Calculatrice, telephone etc. INTERDIT.

Applications numériques faisables à la main, et seul l'ordre de grandeur est demandé.

AUCUN autre document

SAUF: une feuille manuscrite A4 recto/verso contenant CE QUE VOUS VOULEZ.

=> rédigez là au cours du semestre, re-rédigez la plusieurs fois …

Info Pratiques - 7 - outcome

Learning outcomes : compétences que ce cours doit vous transmettre ?

Comprendre les bases de la **mécanique newtonienne du point et du solide**:

- **Apprendre**
  - **à modéliser MATHEMATIQUEMENT**
  - **à résoudre**
  - **à analyser son résultat <u>avec un regard critique</u>**

Vous serez **jugés** sur la ***compréhension conceptuelle***

ET sur la ***capacité à***

modéliser

résoudre

et apprécier le résultat

Questions ?

Cours 00 – 8 Sept 2023

1. Introduction, vecteurs, cinématique, systèmes de coordonnées

1.1. Référentiel et Repère

1.2. Scalaires et vecteurs

1.3. Rappels Mathématiques

A. Trigonométrie
B. Dérivées, primitive, intégrales
C. Développement limité (DL)
D. Trièdres Directs

1. Introduction

▪ Qu'est-ce que la PHYSIQUE ?

- ***Physique*** vient du grec et signifie ***Nature***

⇨ **Science qui étudie des phénomènes, dans la nature et en laboratoire.**

Aujourd'hui : étude des constituants de la matière au sens large (particules élémentaires, molécules, trou noir, *matière noire, énergie noire*), et de leurs interactions.

Démarche scientifique :

Observer ⇨ Analyser ⇨ Comprendre ⇨ Prédire

1. Introduction

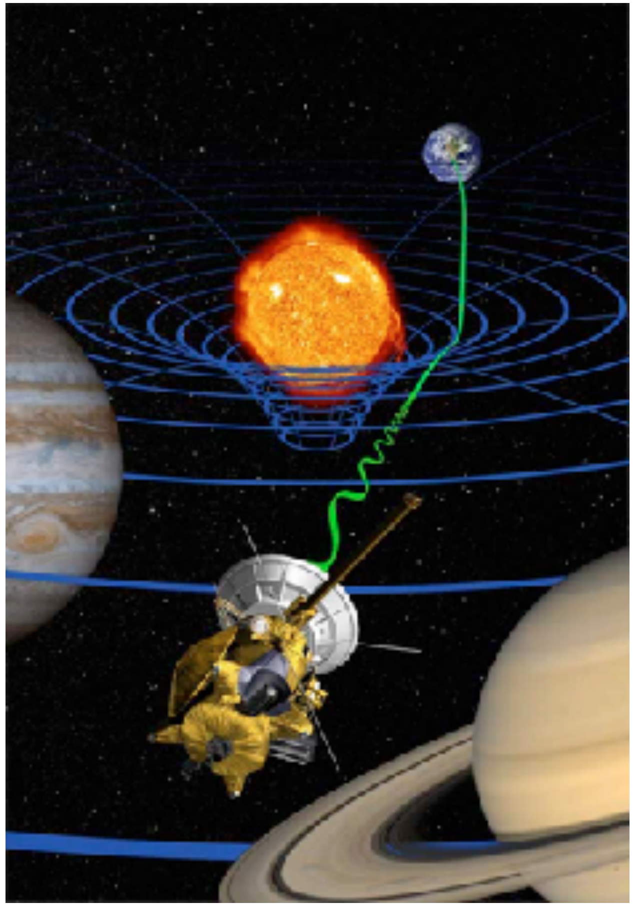
▪ Domaines de la physique

Domaines de la physique & perception

- **Vision** : lumière (gamma/X/***optique***/radio) et **mécanique** (mouvement = variation temporelle)
- **Ouïe** : acoustique (son)
- **Touché** : thermodynamique (chaleur)
- **Odorat/Gout** : chimie

Autres domaines de la Physique:

- Electromagnétisme (XIXème)
- *Relativité Générale (début XXème)*
- Mécanique quantique (début XXème)
- Physique du solide, physique nucléaire
- Physique de la matière molle, géophysique, biophysique
- *Astrophysique et Cosmologie*



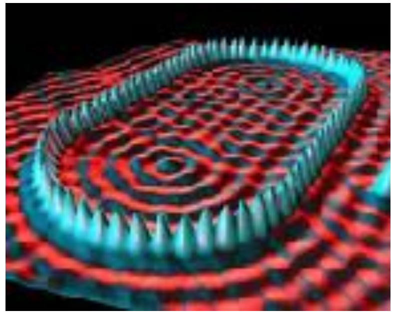
1. Introduction

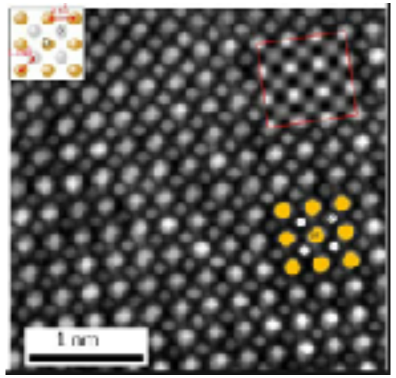
▪ Domaines de la physique

10^{-10} m — 10^{-8} m — 10^{-5} - 10^{5} m — 10^{8} m

Physique nucléaire

Physique quantique





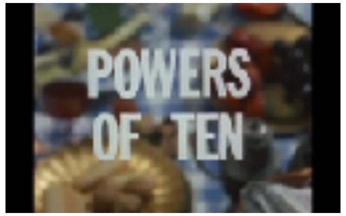
Physique « classique »

Astrophysique

10^{15}	peta
10^{12}	tera
10^{9}	giga
10^{6}	méga
10^{3}	kilo
10^{2}	hecto
10^{1}	déca
10^{0}	
10^{-1}	déci
10^{-2}	centi
10^{-3}	milli
10^{-6}	micro
10^{-9}	nano
10^{-12}	pico
10^{-15}	femto
10^{-18}	atto

Powers of Ten™ (1977)

https://www.youtube.com/watch?v=0fKBhvDjuy0



1. Introduction

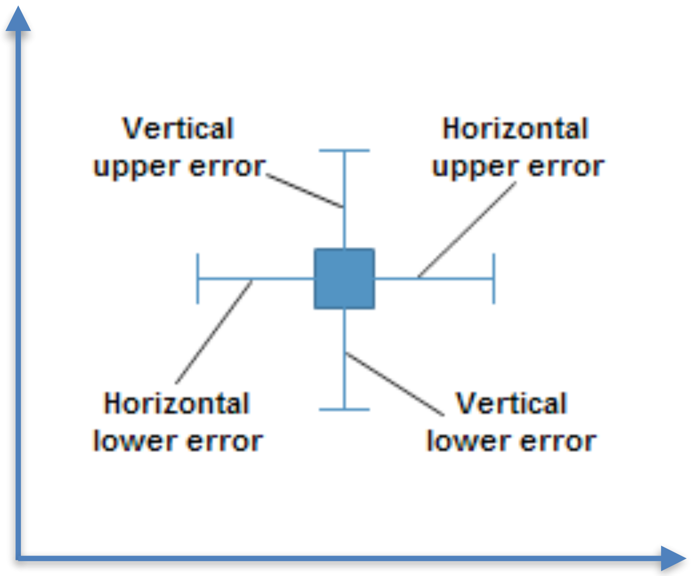
▪ La mesure

La mesure est essentielle en physique car elle permet une comparaison précise des résultats des expériences et de mettre en évidence la manifestation d’un phénomène.

La mesure est la base de toute expérience.

Protocole expérimental :

- *Comment mesurer ?*
- *Validité de la mesure?*
- *Précision ?*
- *Unité ?*



1. Introduction

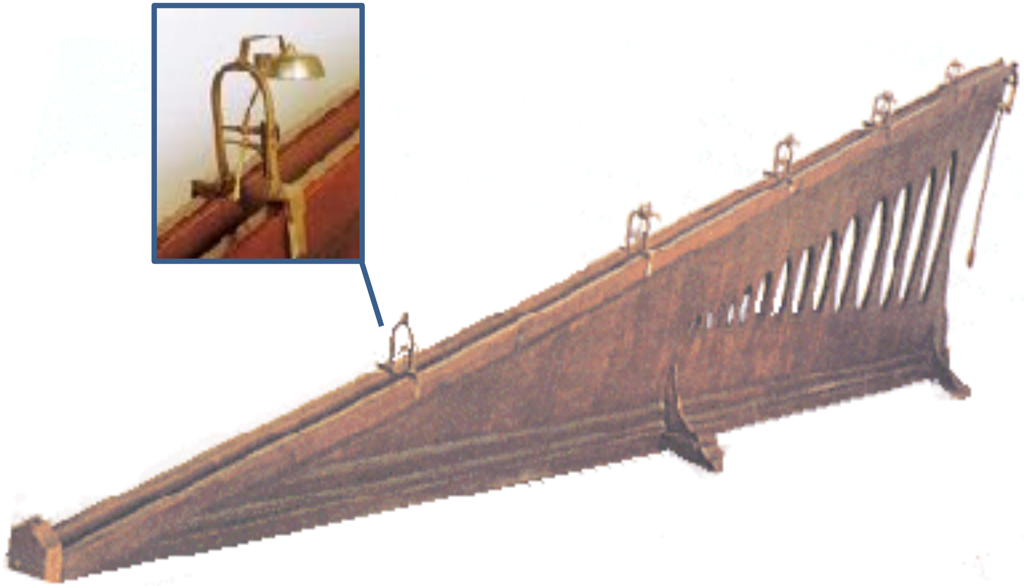
▪ La mesure

***Exemple** : la chute des corps (**distance, temps, masse**)*

Comment : chute de boulets de masses différentes (plein/vide) sur un plan incliné

Validité : taille des boulets identique, lancés de la même façon

Précision : mesure de la hauteur de chute et du temps



Galilée (1564-1642)

1. Introduction

▪ Distance

Définitions du mètre (m) :

1791 : dix-millionième partie d'un quart de méridien terrestre
(c'est de là que vient le fait que la circonférence de la Terre est ~40'000 km)

7 ans pour mesurer le ¼ de méridien (L)
de Dunkerque à Barcelone

1 mètre = 10^{-7} *L*

1889 à 1960 : barre de platine-iridium utilisée comme étalon pour le mètre

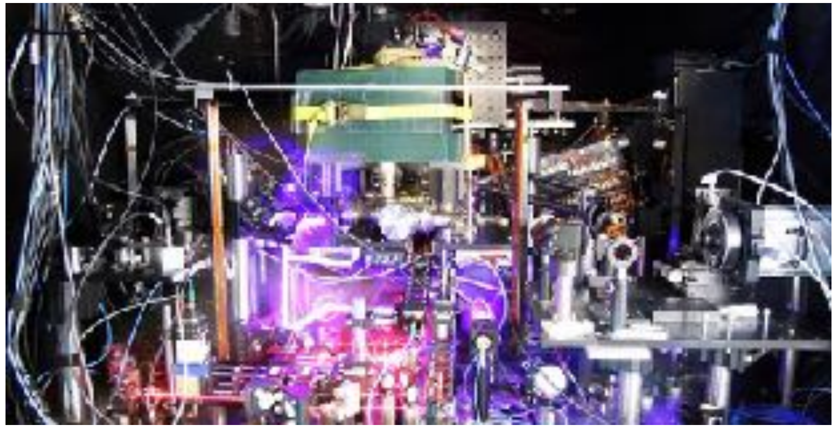
1983: *distance parcourue par la lumière dans le vide en 1/299 792 458 seconde*

▪ Temps

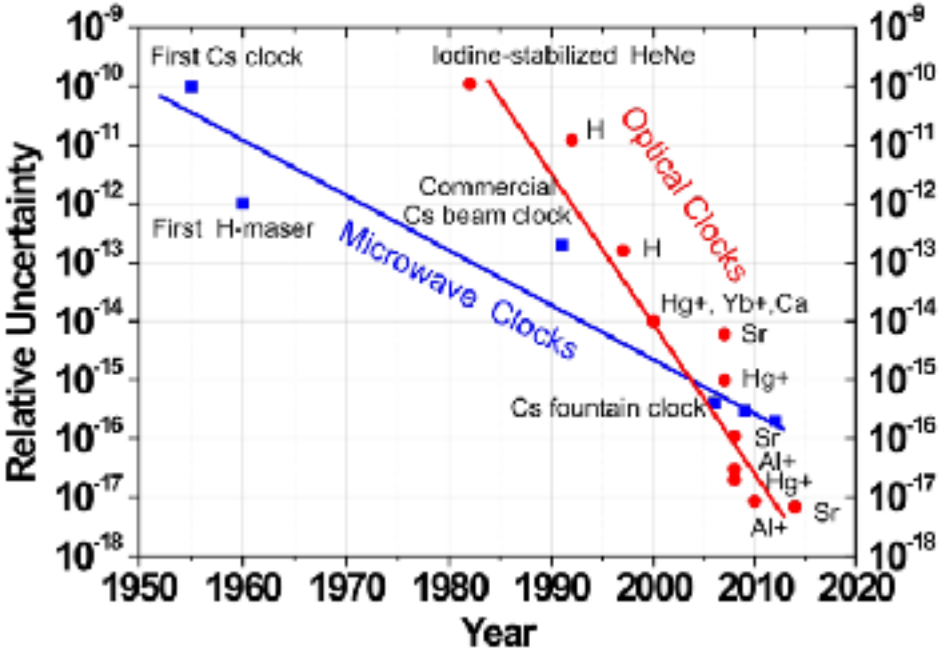
Définitions de la seconde (s) :

- **1960**, définie comme une fraction de l'année solaire 1900.

- **1967**, la seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux d'énergies de l'état fondamental de l'atome de césium 133 pris à 0 K (*précision actuelle 10^{-15}*).



Horloge atomique



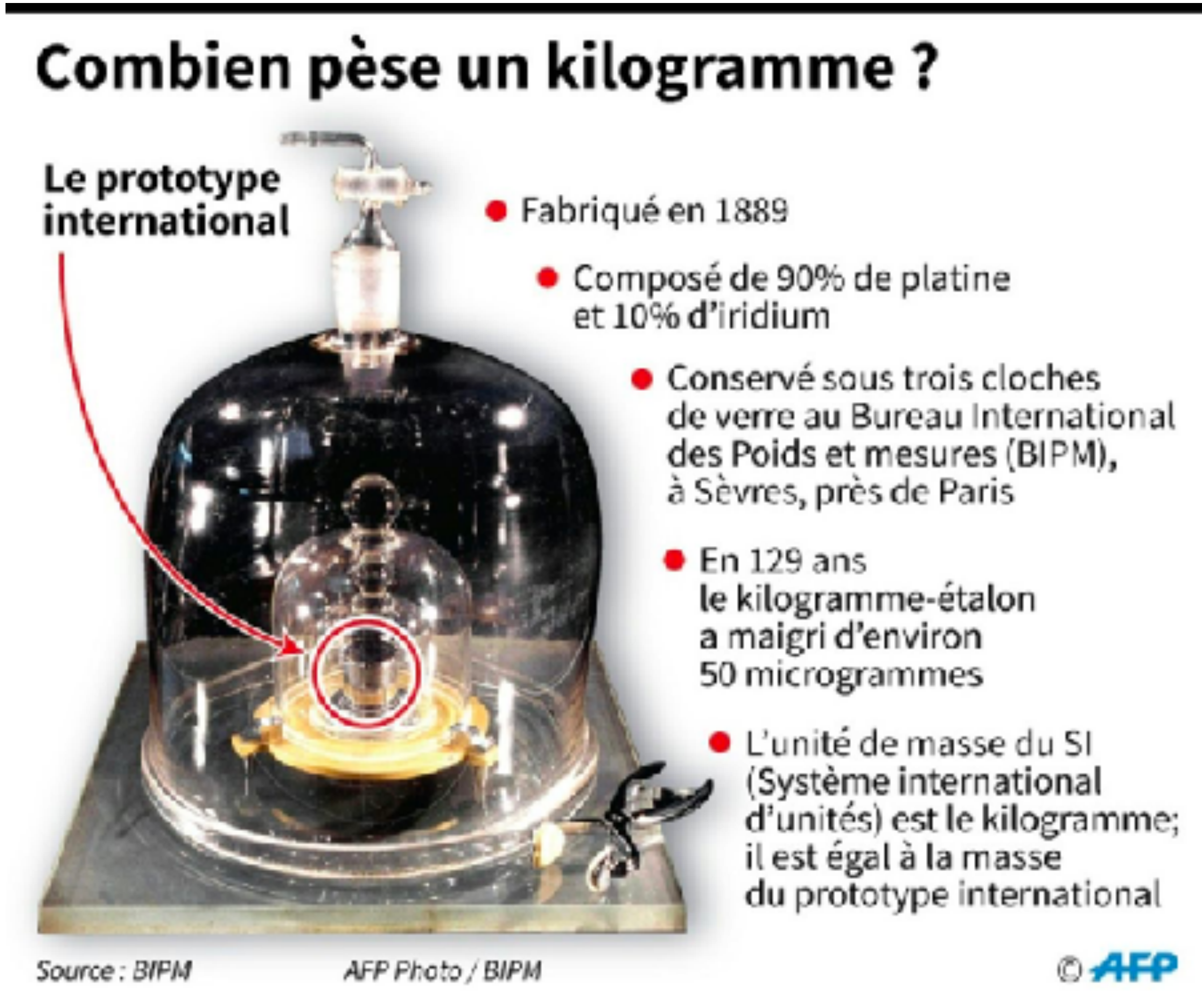
1. Introduction

- **Masse**

Définitions du kilogramme (kg) :

- **1795**: introduction du **gramme** (*masse d'un centimètre cube d'eau à 4°C*)
- **1875**, l'unité de masse fut redéfinie comme «**kilogramme** » *(unité du SI)*
- **1889**, le prototype du kg est conservé au Bureau International des Poids et Mesures (Paris)

- **2019**, nouvelle définition du kg, exprimé en fonction de la *constante de Planck*: $h=6.62607004 \times 10^{-34}$ m^2 kg/s



1. Introduction

2019:

Le nouveau Système Internationale des unités en physique,

Et le lien avec 7 constantes fondamentales.

https://www.bipm.org/fr/measurement-units/

Le kilogramme : de l'artefact à la constante de Planck

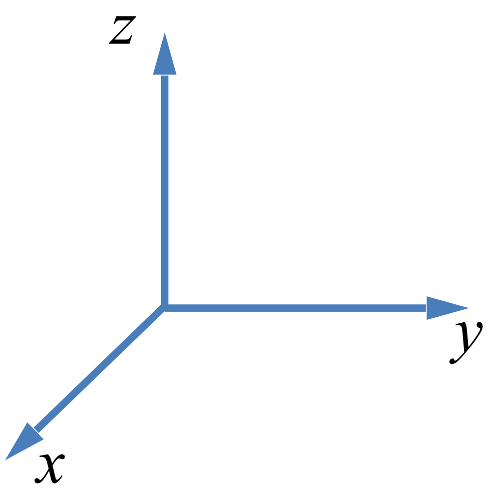
https://www.youtube.com/watch?v=N4ASLIUH1HM&app=desktop

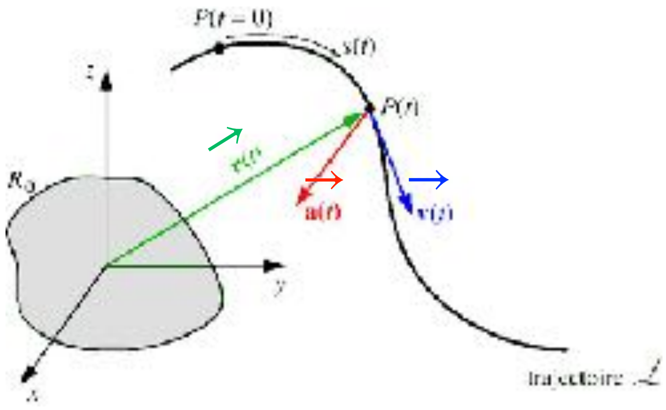
1.1. Référentiel et Repère

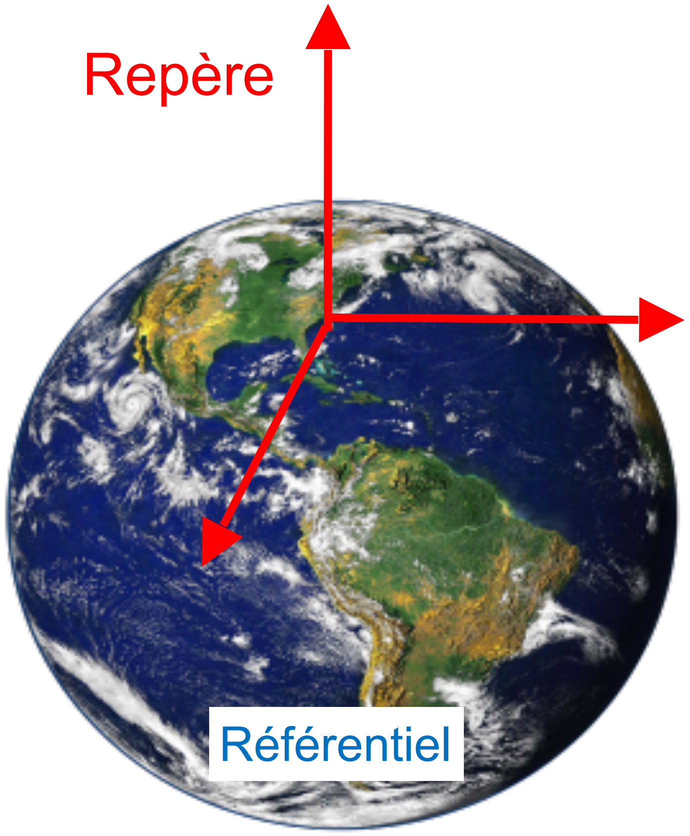
Référentiel
(échelle de référence)

Référentiel : *terrestre*, galiléen, géocentrqiue, *héliocentrique* (Kepler), Copernicien, barycentrique, *galactique*

Repère (Math)







1.2. Scalaires et vecteurs

■ Scalaires

Un **scalaire** est une grandeur déterminée par sa **valeur numérique**

Exemples : surface, longueur, masse, charge électrique, temps...

Un **invariant:** *Scalaire qui ne dépend pas du référentiel*

- *exemple*: charge de l'électron;
- pas toujours le cas pour la longueur et le temps.

(effets relativistes pour $v > 10\%$ *de la vitesse de la lumière*)

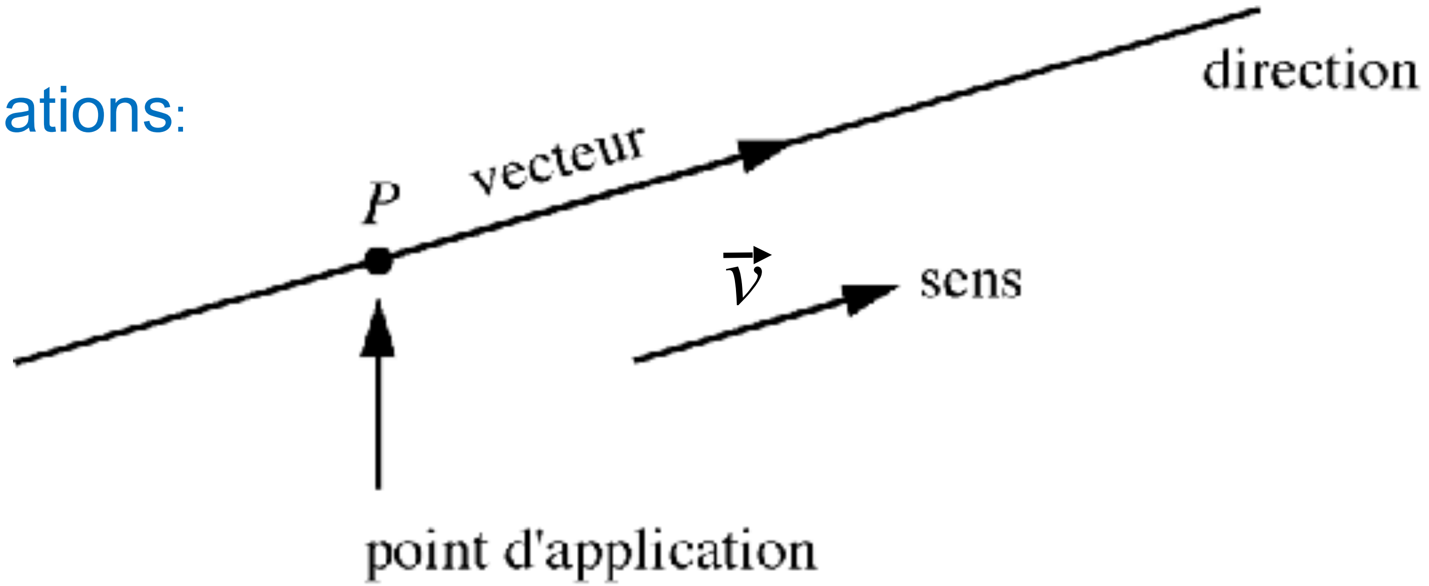
En mécanique **classique** : **masse, longueur, temps** sont des **invariants**

1.2. Scalaires et vecteurs

▪ Vecteurs

Un **vecteur** comporte 3 informations:

- ***intensité***
- ***direction***
- ***sens***



Notation : $\vec{v}$ ou $\boldsymbol{v}$

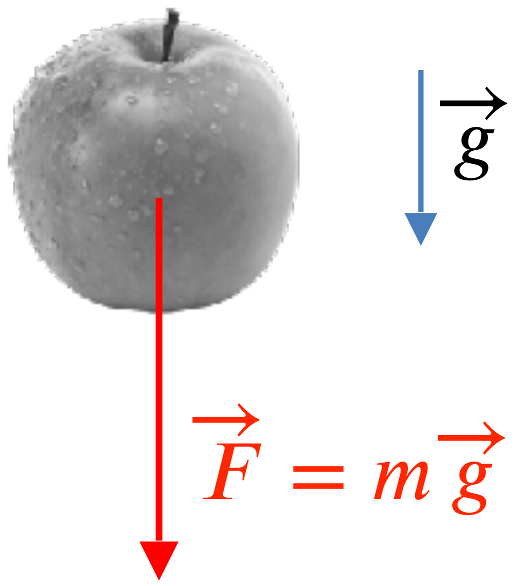
La **norme** (module, **intensité**) d'un vecteur est notée ||**vecteur**||

⇨ nombre positif qui a la dimension de la grandeur physique associée (exemple: vecteur vitesse)

- **Exemples : Force de pesanteur & masse**

Considérons un objet de masse m :

Relation entre force et accélération: $\vec{F} = m\vec{g} = m\vec{a}$



une **force** est un **vecteur**

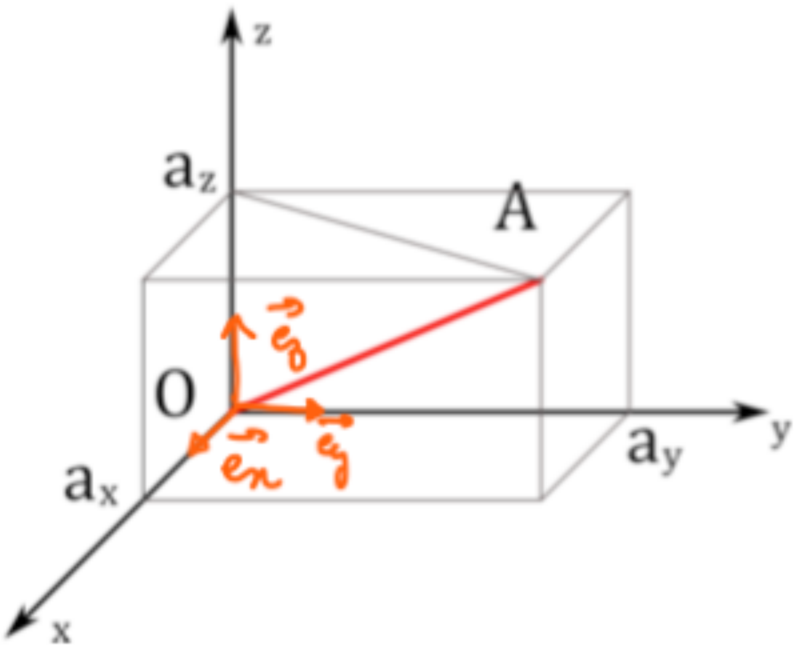
une **masse** est un **scalaire**

1.3. Rappels Mathématiques

▪ Vecteurs dans un repère cartésien

Vecteurs dans l'espace (à 3D): décomposition composantes cartésiennes.

On fait partir le vecteur de l'origine du repère, les composantes du vecteur sont alors les coordonnées cartésiennes de son extrémité :



$$(\vec{e}_x\,,\,\vec{e}_y\,,\,\vec{e}_z\,)$$

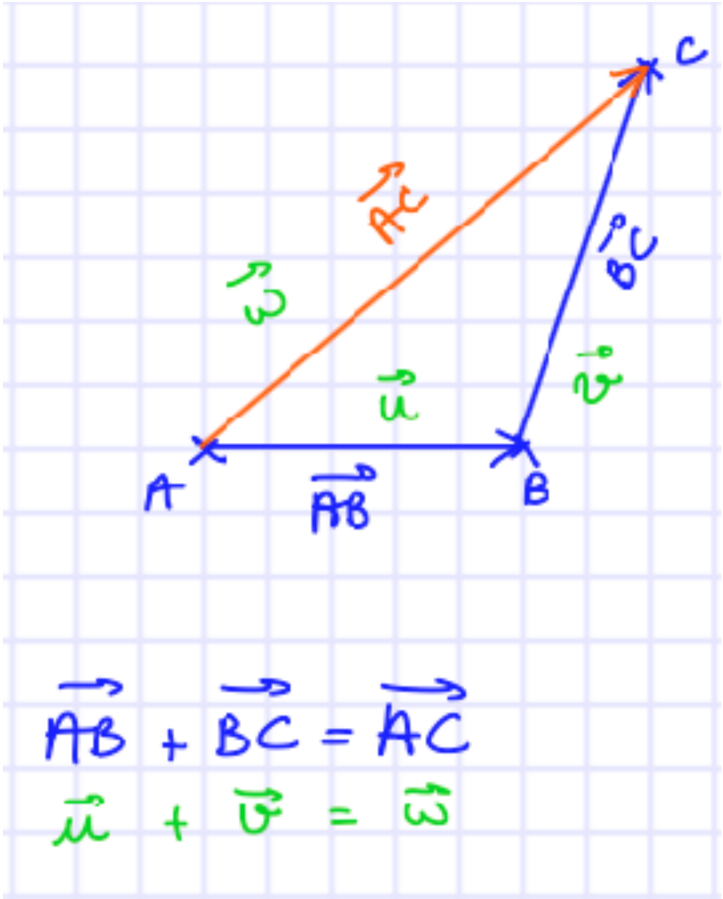
$$\vec{a} = \vec{OA} = (a_x, a_y, a_z)$$

Norme: $$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 +, a_z^2} = a$$

=longueur de OA

1.3. Rappels Mathématiques

- Vecteurs dans un repère cartésien



La somme de deux vecteurs se calcule par la somme de ses composantes

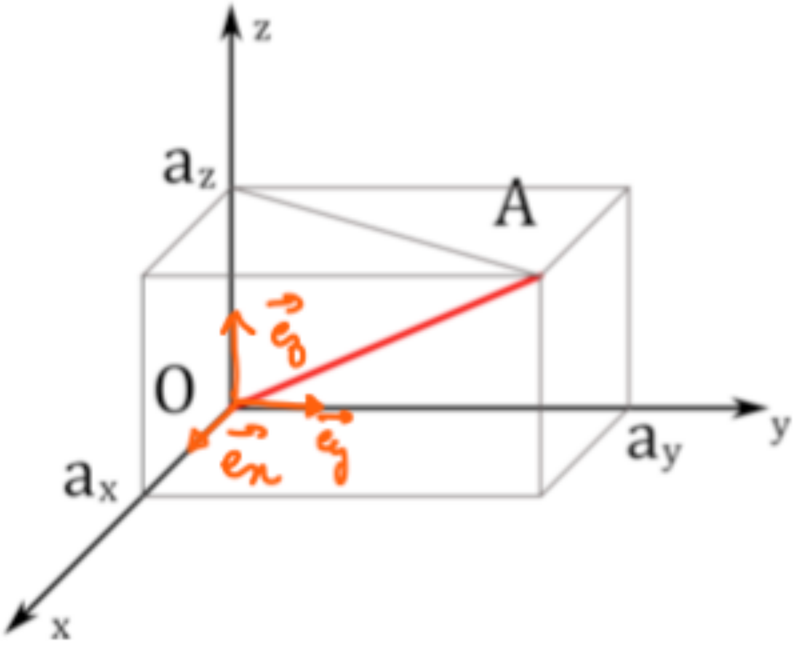
$$\vec{a}\left|\begin{matrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{matrix}\right. + \vec{b}\left|\begin{matrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{matrix}\right. = \vec{a}+\vec{b}\left|\begin{matrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{matrix}\right.$$

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'obtiennent par la soustraction des coordonnées des points B et A.

$$A\left|\begin{matrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{matrix}\right. \; ; \; B\left|\begin{matrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{matrix}\right. \rightarrow \overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{matrix}\right.$$

Produit Scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots$$



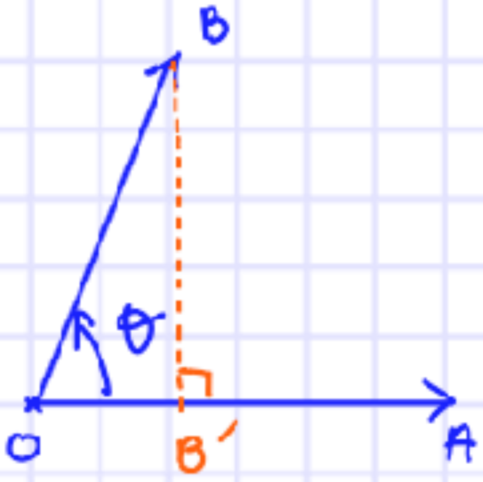
Composantes et **produit scalaire:**

Composante de **a** sur Ox: $a_x = \vec{a} \cdot \vec{e_x}$

Composante de **a** sur Oy: $a_y = \vec{a} \cdot \vec{e_y}$

Composante de **a** sur Oz: $a_z = \vec{a} \cdot \vec{e_z}$

Produit scalaire



$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \|\vec{OA}\| . \|\vec{OB}\| . \underbrace{\cos(\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}})}_{\cos\theta}$$

= norme de $\vec{OA}$ fois norme de la projection de $\vec{OB}$ sur $\vec{OA}$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \|\vec{OA}\| . \|\vec{OB'}\|$$

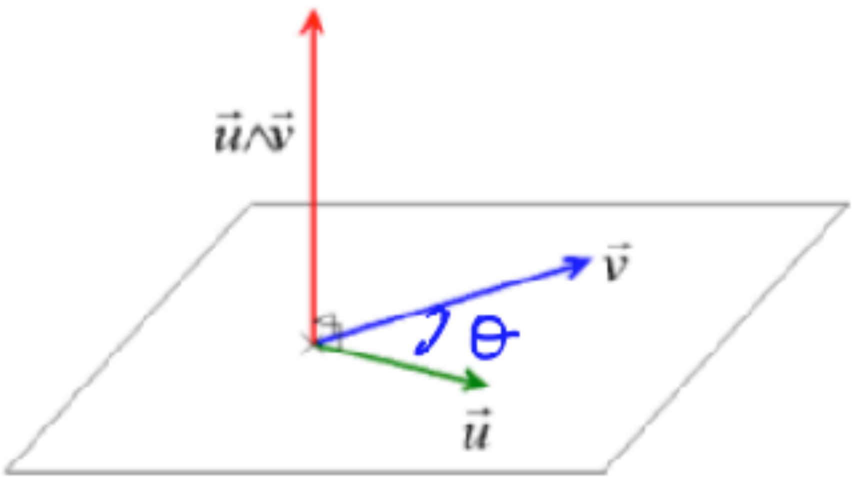
Le produit scalaire nous permettra de calculer la norme de la projection d'un vecteur.

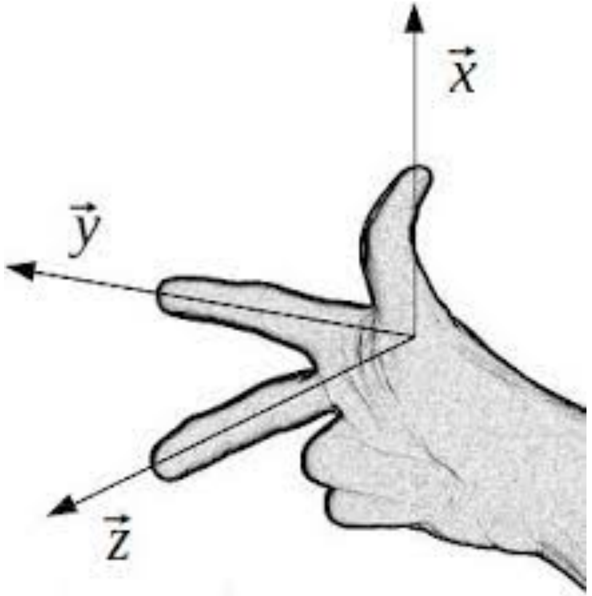
$\vec{u} \perp \vec{v}$ $\qquad$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v}$ et de même sens $\qquad$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = u . v$

— — — — de sens opposé $\qquad$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = -u v$

Produit vectoriel





Repère (sens) Direct

Définition

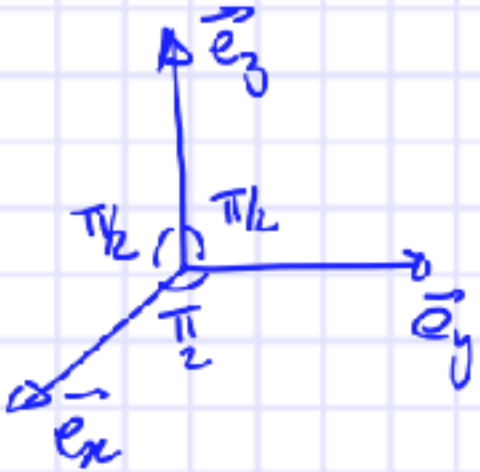
Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires se définit comme l'unique vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que

- le vecteur $\vec{w}$ est *orthogonal* aux deux vecteurs donnés ; $\Rightarrow$ direction de $\vec{w}$
- la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de *sens direct* ; $\Rightarrow$ sens de $\vec{w}$
- $||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot |\sin(\underbrace{\widehat{\vec{u}, \vec{v}}}_{\theta})|$

si $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v}$ $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

si on note $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ les vecteurs unitaires d'un trièdre orthonormé direct :

$$|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$$



$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_x \quad \vec{e}_y \quad \vec{e}_z \quad \vec{e}_x \quad \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_x = \vec{0}$$

et de plus

$$\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = -\vec{e}_z$$

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs se calcule par le produit croisé des composantes deux par deux selon la méthode suivante :

$$\vec{a} \left| \begin{matrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{matrix} \right. \qquad \vec{b} \left| \begin{matrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{matrix} \right. \qquad \vec{a} \wedge \vec{b} \left| \begin{matrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{matrix} \right.$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs se calcule par le produit croisé des composantes deux par deux selon la méthode suivante :

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array}\right. \qquad \vec{b}\left|\begin{array}{l} b_x \\ b_y \\ b_z \end{array}\right. \qquad \vec{a}\wedge\vec{b}\left|\begin{array}{l} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{array}\right.$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs se calcule par le produit croisé des composantes deux par deux selon la méthode suivante :

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right. \qquad \vec{b} \left| \begin{array}{l} b_x \\ b_y \\ b_z \end{array} \right. \qquad \vec{a} \wedge \vec{b} \left| \begin{array}{l} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{array} \right.$$

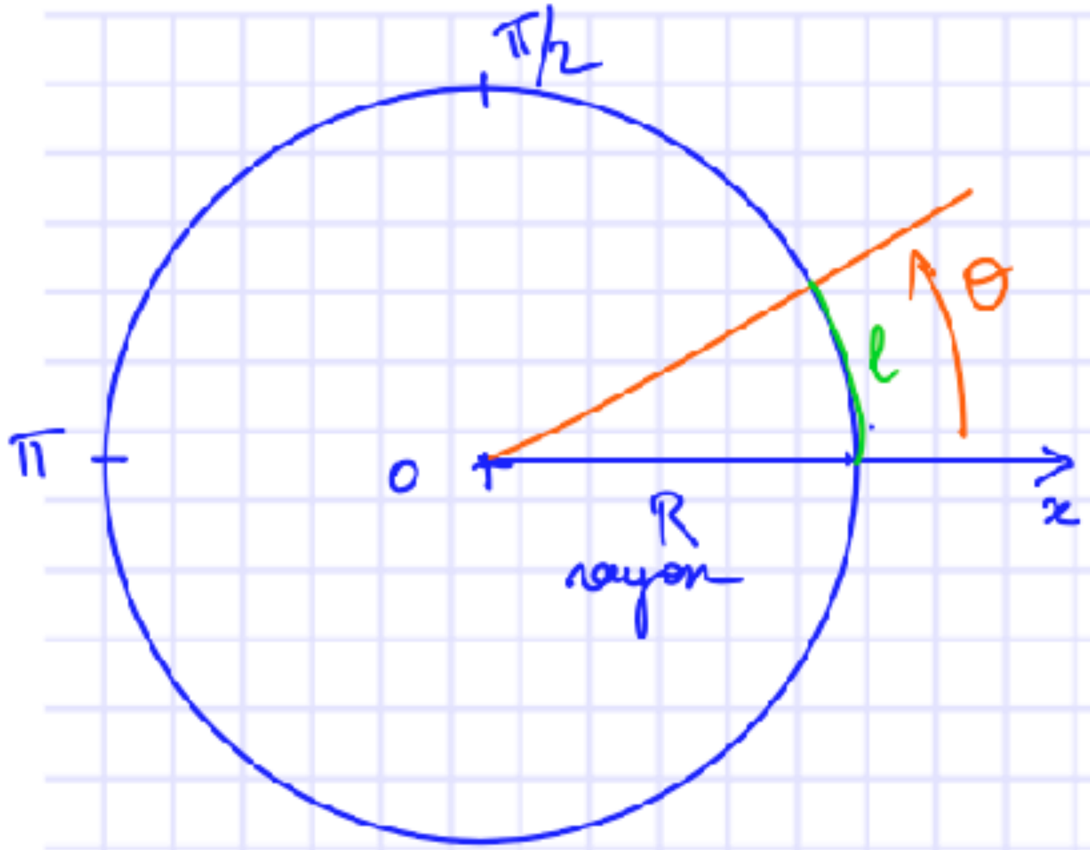
Le produit vectoriel de deux vecteurs se calcule par le produit croisé des composantes deux par deux selon la méthode suivante :

$$\vec{a}\left|\begin{matrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{matrix}\right. \qquad \vec{b}\left|\begin{matrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{matrix}\right. \qquad \vec{a}\wedge\vec{b}\left|\begin{matrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{matrix}\right.$$

Trigonométrie

Nous utiliserons souvent les angles en *radians* .

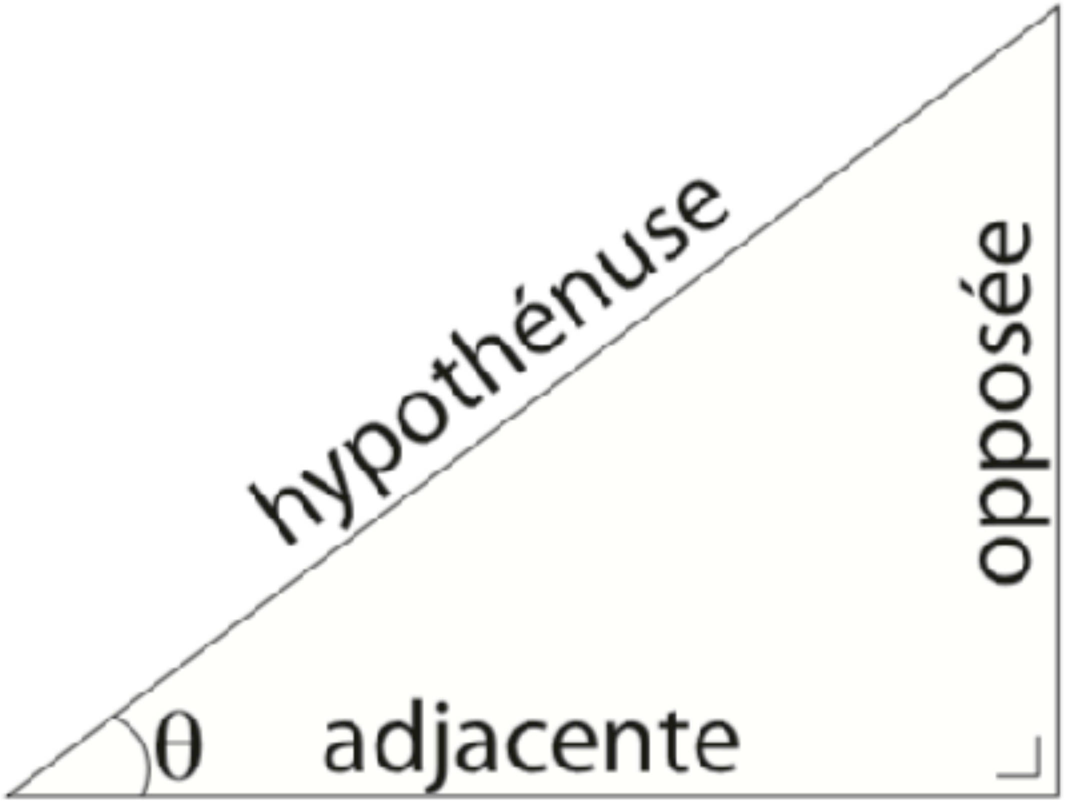
Le cercle complet fait 2π radians. Cette définition permet de relier directement la longueur de l'arc de cercle à l'angle et au rayon par $l = R\theta$ avec θ en radians.



	angle	longueur arc
tour complet	2π	$2\pi R$
	θ	$l = \dfrac{\theta \cdot \cancel{2\pi} R}{\cancel{2\pi}}$

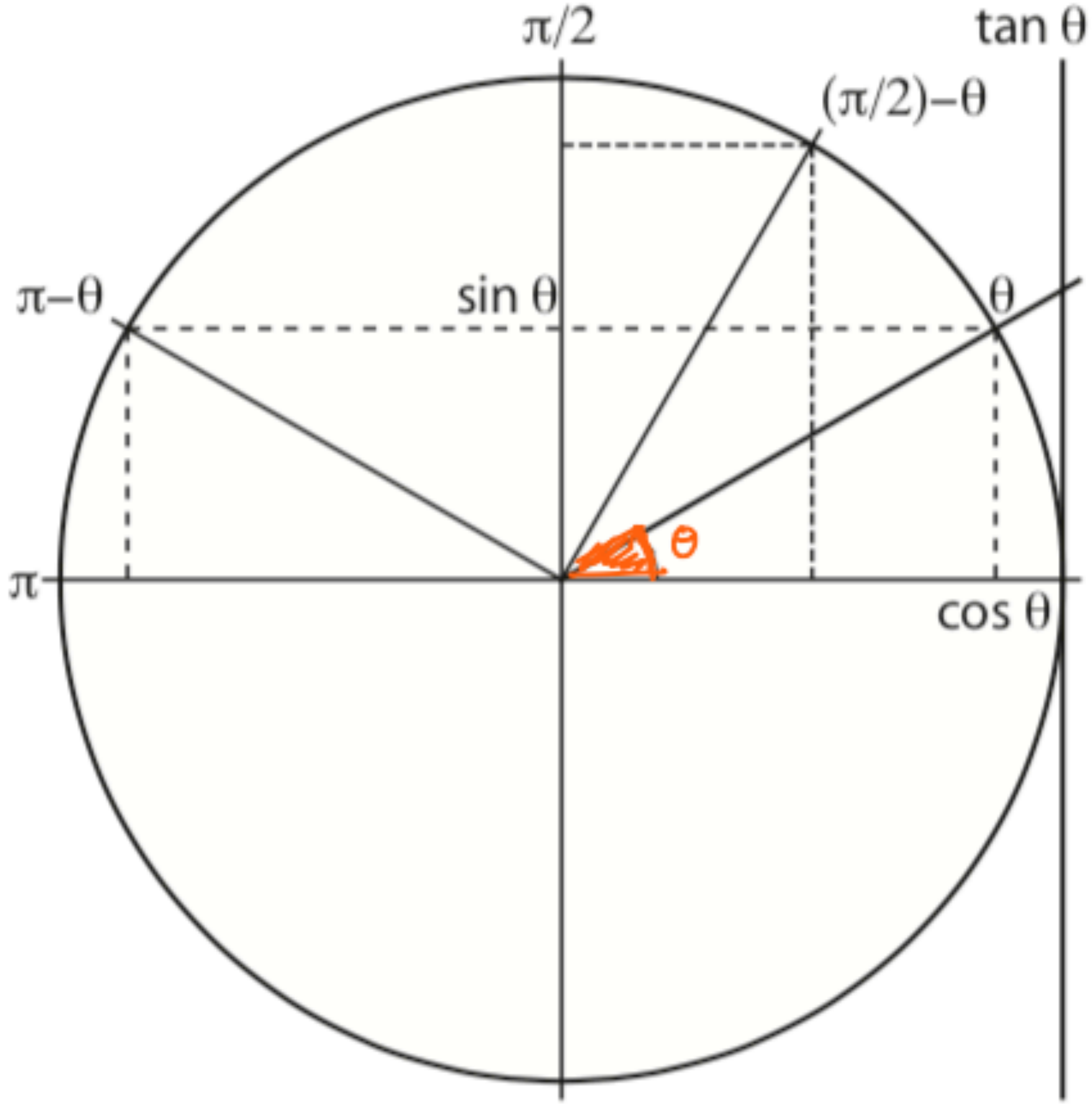
$l = \theta R$ si θ est en radians

Trigonométrie dans le triangle rectangle



$$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

Cercle trigonométrique



$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$
$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 0 = 1$ $\sin 0 = 0$

$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

Identités trigonométriques

$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1} \tag{1}$$

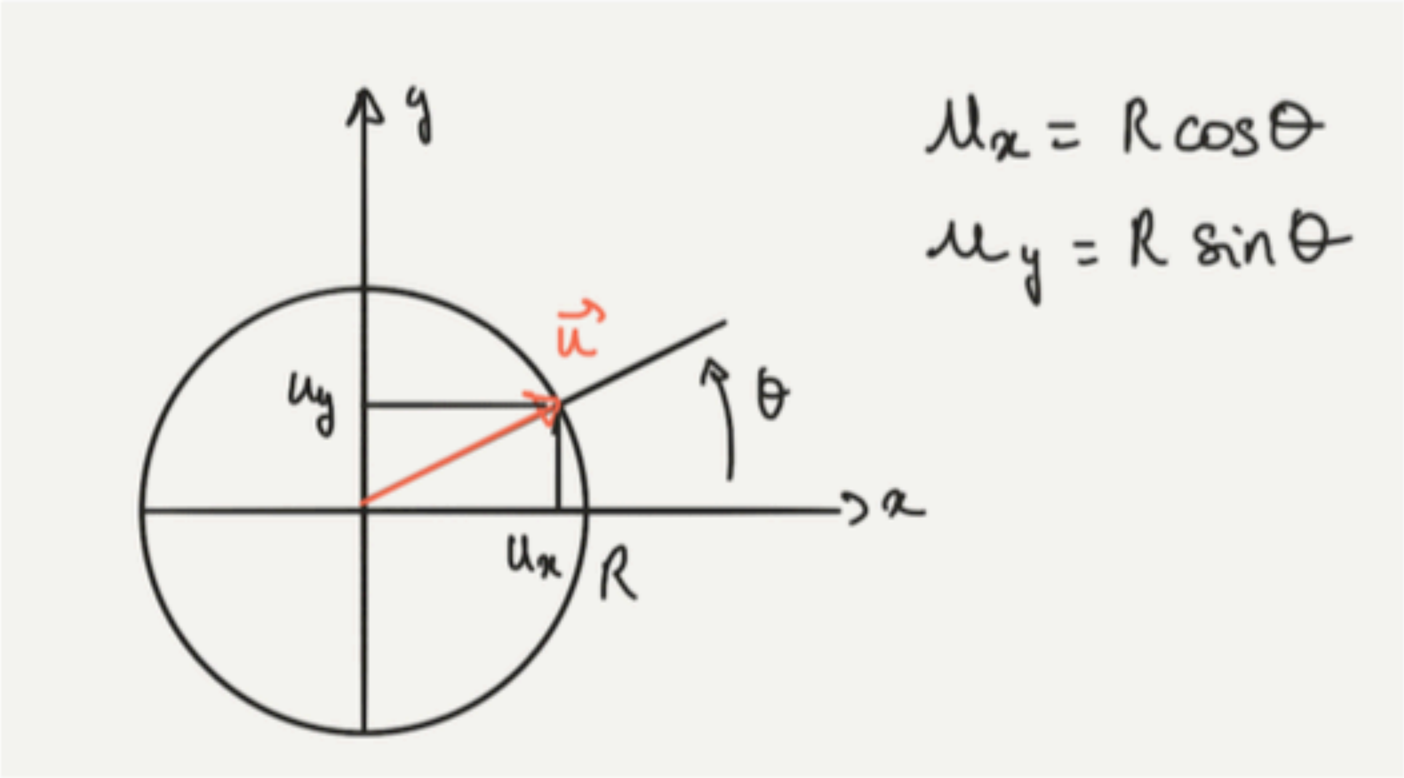
$$\boxed{\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1} \tag{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b & (3) \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a & (4) \end{aligned}}$$

…et bien d'autres dans votre formulaire et sur le web. Vous devez les savoir ou savoir les retrouver (ou les mettre dans votre formulaire personnel)

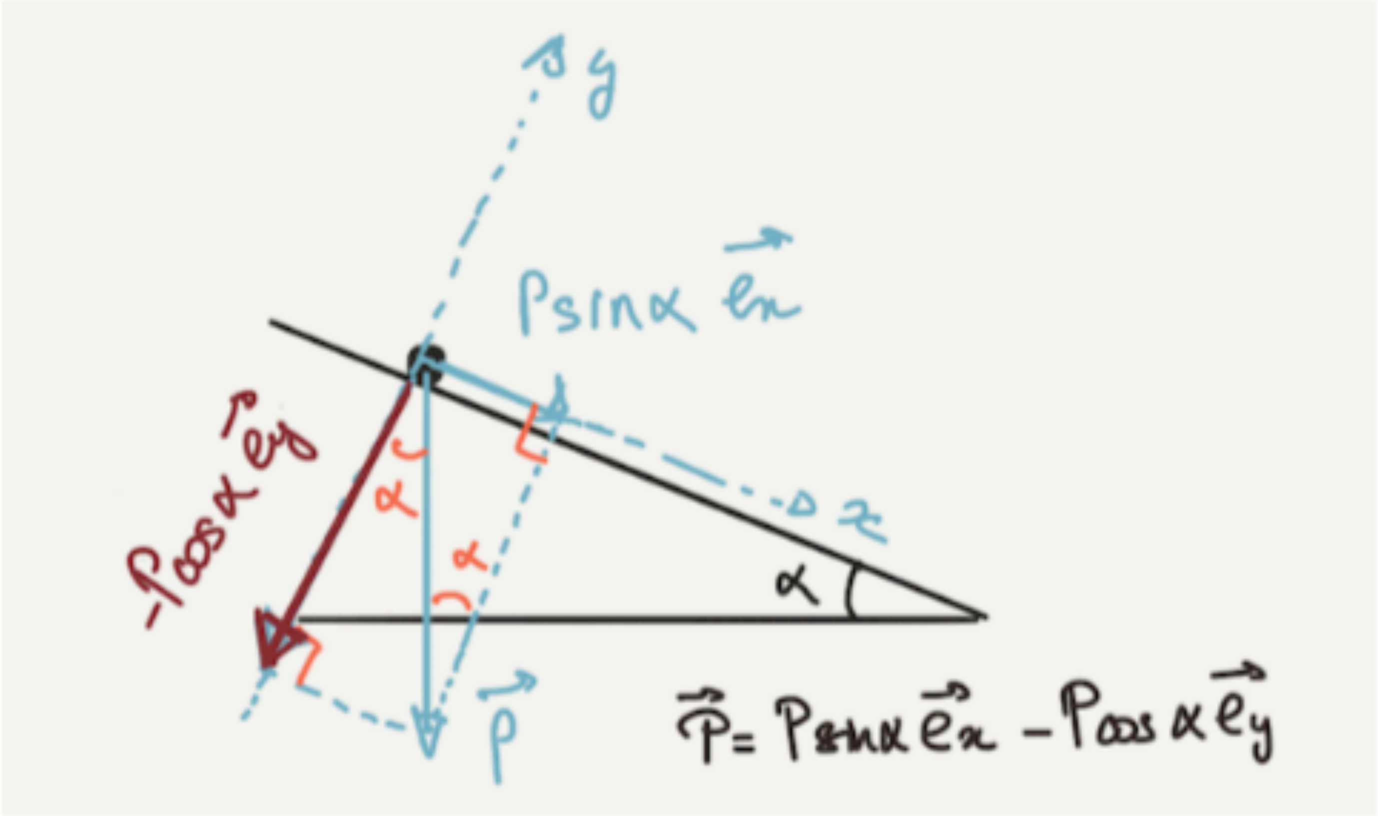
Vecteurs et trigonométrie

Vous aurez souvent à trouver les composantes d'un vecteur dont vous connaissez la norme, et l'angle qu'il fait par rapport à un axe de référence. En d'autre termes, la projection d'un vecteur donné sur des axes (pas forcément verticaux ou horizontaux).



Vecteurs et trigonométrie

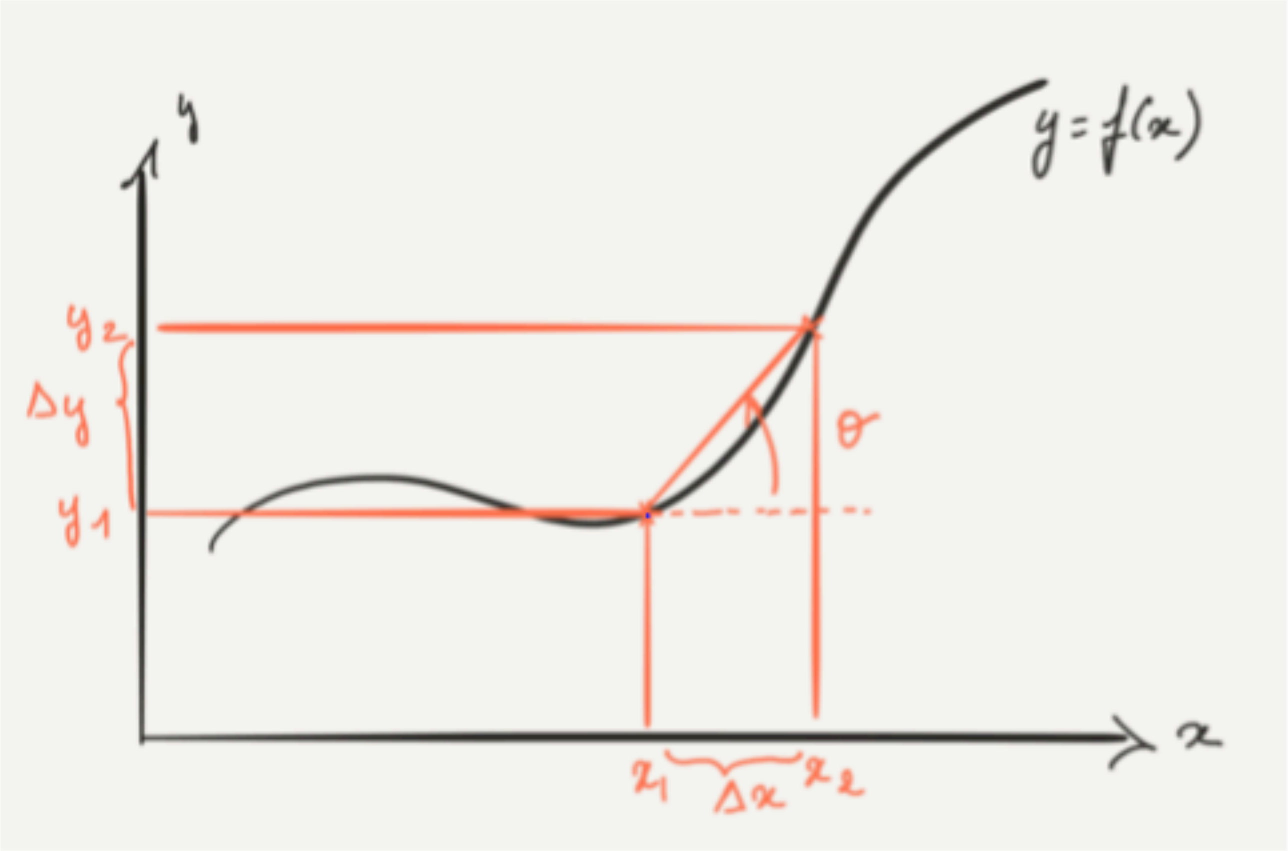
Par exemple, ici, on décompose une force (le poids) en deux composantes portées respectivement par l'axe *x* et l'axe *y*. Avant de faire la projection, il faut bien identifier l'angle par des considérations géométriques.



Conseil: *Pour vos dessins utilisez des* ***angles différents de 45 deg*** *(sinon risque de confusion entre sin/cos)*

Dérivées

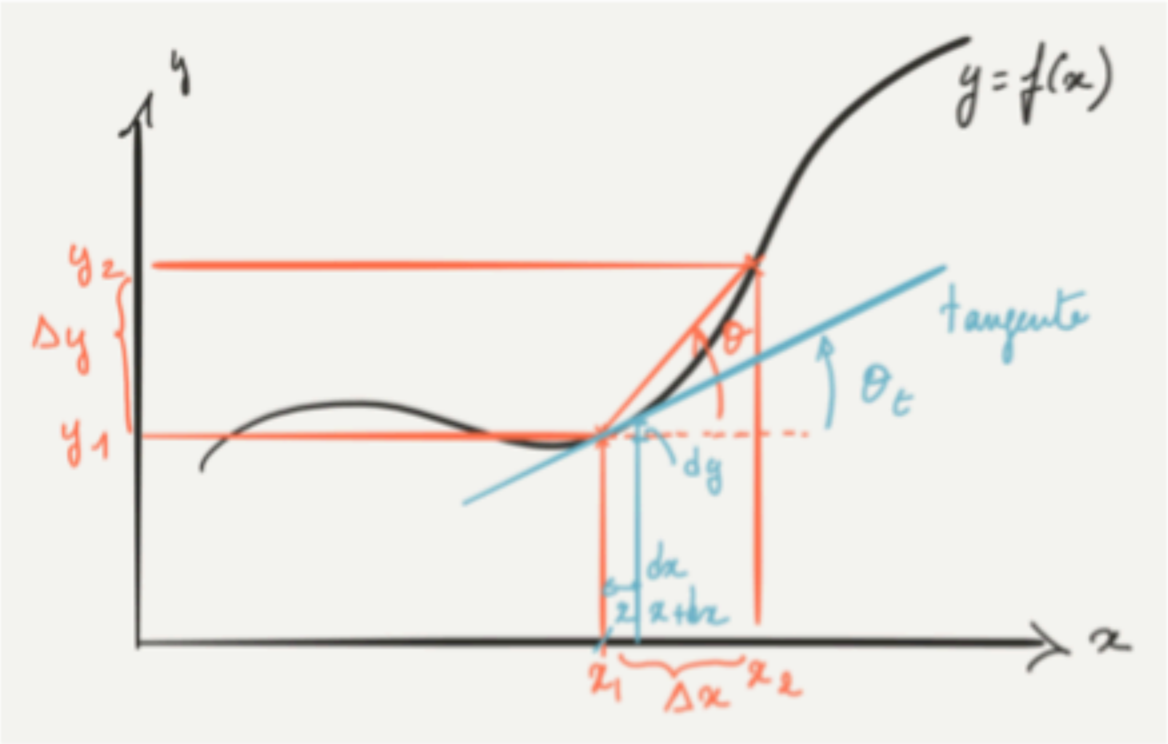
Soit une fonction $y = f(x)$ représentée par une courbe $y = f(x)$ dans le plan. La corde prise entre deux points a une pente caractérisée par l'angle θ.



$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La dérivée de la fonction f au point 1 est la limite de $\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ quand le point 2 tend vers le point 1. C'est donc la *pente de la tangente à la courbe*.

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x_1 + dx) - f(x_1)}{dx} = \frac{df}{dx}$$



En physique on utilisera souvent la variation infinitésimale de la fonction f

$$df = f(x + dx) - f(x)$$

pour une variation dx de x.

Vous devez connaître les dérivées des fonctions usuelles.

fonction	dérivée
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$
$\ln x$	$1/x$
e^x	e^x
x^n	$n\,x^{n-1}$

$\frac{1}{x^n} = x^{-n} \rightarrow$ dérivée $(-n)\,x^{-n-1}$

$\frac{1}{x} \xrightarrow{\text{dérivée}} -1\,x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

Produit et composition de fonctions

$$(f\,g)' = f'g + f\,g'$$

$$\left(f[g(x)]\right)' = g'(x) \cdot f'[g(x)]$$

$$f(t) = \cos \Omega t \qquad \frac{df}{dt} = \Omega\left[-\sin(\Omega t)\right] = -\Omega \sin \Omega t$$

Primitive

Calculer la primitive de f(x), c'est "la manoeuvre inverse" du calcul de la dérivée.

C'est chercher la fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$.

Comme la dérivée d'une constante est 0, on peut ajouter n'importe quelle constante à F ça ne change rien, donc "la primitive de F est définie à une constante près".

$f(x) = \cos x$ $F(x) = \sin x + A$ A constante

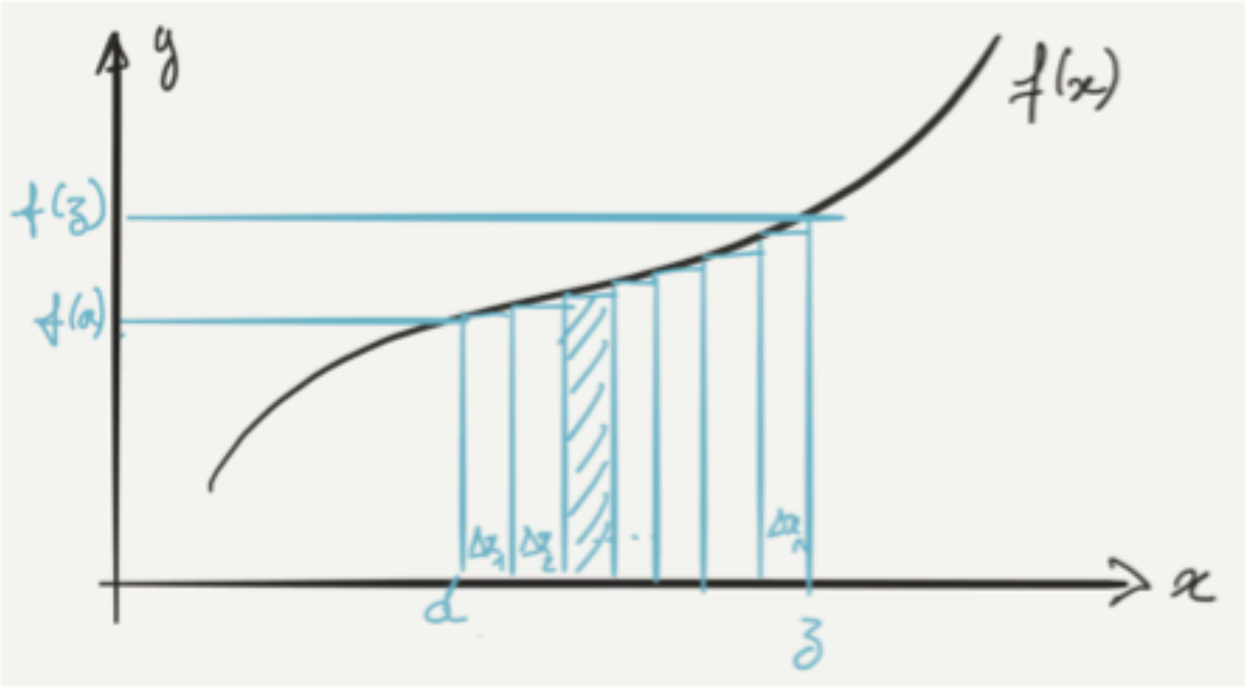
A : "constante d'intégration"

$F(x_0)$ connu $F(x_0) = F_0 \Rightarrow F(x_0) = \sin x_0 + A = F_0 \Rightarrow A = F_0 - \sin x_0$

$F(x) = \sin x - \sin x_0 + F_0$

Intégrale

On cherche à calculer l'aire sous la courbe entre le point $x = a$ et $x = z$.



C'est à peu près la somme des petits rectangles de largeur Δx_i et de hauteur $f(x_i)$

$$\mathcal{A} \simeq \sum_i f(x_i)\Delta x_i$$

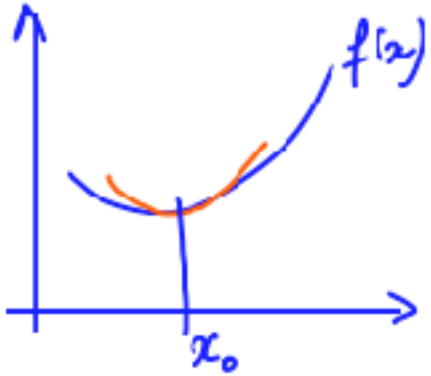
Plus Δx est petit plus l'aire est calculée juste. Finalement

$$\mathcal{A} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta x_i = \int_a^z f(x)dx = F(z) - F(a)$$

F(x) primitive de f(x)

Développement limité en série de Taylor

Intérêt : remplacer une fonction compliquée par un polynôme



$$f(x_0+\varepsilon) \simeq f(x_0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0)\varepsilon + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x_0)$$

$f(x) = (1+x)^n$ pour x petit : développement autour de $x_0 = 0$

$f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ $\quad$ $f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$ ...

$f(0+\varepsilon) = f(0) + f'(0)\,\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(0) + \dots = 1 + n\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} n(n-1) + \cdots$

$f(\varepsilon) = 1 + n\,\varepsilon + n(n-1)\frac{\varepsilon^2}{2} + \dots$

$f(x) = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2} + \dots \Rightarrow f(x) \simeq 1 + nx$

Développement limité en série de Taylor utiles dans ce cours

$$(1+x)^n \simeq 1+nx \qquad \frac{1}{(1+x)^n} \simeq 1-nx$$

$$\ln(1+x) \simeq x \qquad e^x \simeq 1+x$$

$$\cos x \simeq 1-\frac{x^2}{2} \qquad \sin x \simeq x \qquad \tan x \simeq x$$

Pour x petit (donc proche de 0)

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+(-x)} = [1+(-x)]^{-1} \simeq 1+(-1)(-x) = 1+x$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \simeq 1+x$$